ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 487, № 6, с. 607–610

МАТЕМАТИКА

УДК 517.765+515.172.2

ОБ ОРБИТАХ ДЕЙСТВИЙ 5-МЕРНЫХ НЕРАЗРЕШИМЫХ АЛГЕБР ЛИ В ТРЁХМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. В. Атанов[1], И. Г. Коссовский[2], А. В. Лобода[3,*]

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 10.04.2019 г.

Поступило 13.05.2019 г.

После описания Э. Картаном в 1932 г. голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей двумерных комплексных пространств аналогичное исследование в трёхмерном случае остаётся незавершённым. В серии работ, выполненных несколькими международными коллективами авторов, задача сводится к описанию однородных поверхностей, невырожденных по Леви и имеющих в точности 5-мерные алгебры Ли голоморфных векторных полей. В настоящей работе исследуются именно такие однородные поверхности. При этом значительная часть обширного списка абстрактных 5-мерных алгебр Ли не даёт новых примеров однородности. Полное описание орбит 5-мерных неразрешимых алгебр Ли в трёхмерном комплексном пространстве, приведённое в работе, включает в себя примеры новых однородных гиперповерхностей. Представленные результаты приближают к завершению крупное научное исследование, представляющее интерес для различных разделов математики.

Ключевые слова: однородное многообразие, голоморфное преобразование, неразрешимая алгебра Ли, векторное поле, вещественная гиперповерхность.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524876607-610

В задаче описания голоморфно-однородных вещественных гиперповерхностей трёхмерных комплексных пространств в настоящее время остаётся не до конца изученным случай невырожденных по Леви поверхностей, алгебры Ли голоморфных векторных полей на которых являются 5-мерными (см. [1–5]).

В работе рассматриваются реализации неразрешимых 5-мерных алгебр Ли в виде алгебр голоморфных векторных полей в пространстве $\mathbb{C}^3$ и приводится описание всех невырожденных по Леви голоморфно-однородных поверхностей, являющихся орбитами таких алгебр. Согласно классификации [6] имеется всего пять неразрешимых 5-мерных алгебр Ли. Обозначения этих алгебр и задающие их коммутационные соотношения приведены ниже:

$$\mathfrak{m}_9\colon\ [e_1, e_2] = e_1,\ [e_1, e_3] = 2e_2,\ [e_2, e_3] = e_3;$$

$$\mathfrak{m}_{10}\colon\ [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = -e_2,\ [e_2, e_3] = e_1;$$

$$\mathfrak{m}_{16}\colon\ [e_1, e_2] = e_1,\ [e_1, e_3] = 2e_2,\ [e_2, e_3] = e_3,\ [e_4, e_5] = e_4;$$

$$\mathfrak{m}_{17}\colon\ [e_1, e_2] = e_3,\ [e_1, e_3] = -e_2,\ [e_2, e_3] = e_1,\ [e_4, e_5] = e_4;$$

$$g_5\colon\ [e_1, e_2] = 2e_1,\ [e_1, e_3] = -e_2,\ [e_1, e_4] = e_5,\ [e_2, e_3] = 2e_3,\ [e_2, e_4] = e_4,\ [e_2, e_5] = -e_5,\ [e_3, e_5] = e_4.$$

Теорема 1. *Пусть M — вещественно-аналитическая гиперповерхность в $\mathbb{C}^3$, а $g(M)$ — 5-мерная неразрешимая алгебра голоморфных векторных полей на M, имеющая полный ранг (вблизи некоторой точки M).*

1. *Если $g(M)$ имеет структуру $\mathfrak{m}_9$ или $\mathfrak{m}_{10}$, то M вырождена по Леви;*

2. *Невырожденными по Леви орбитами других неразрешимых алгебр являются (с точностью до локальной голоморфной эквивалентности) лишь следующие поверхности:*

$$\mathfrak{m}_{16}\colon\ v = \alpha \ln x_1 + \ln x_2,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{1}$$

$$v y_1 + x_2 = \alpha |z_2|,\ \alpha \ge 0,\ \alpha \ne 1, \tag{2}$$

$$\mathfrak{m}_{17}\colon\ v = \alpha \ln(e^{2x_1} + 1) + \ln x_2,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{3}$$

$$v \operatorname{ch} y_1 + x_2 \operatorname{sh} y_1 = \alpha |z_2|,\ \alpha \ge 0, \tag{4}$$

$$g_5\colon\ (v - x_2 y_1)^2 + y_1^2 y_2^2 = y_1, \tag{5}$$

где z_1, z_2, w — координаты в $\mathbb{C}^3$, $x_2 = \operatorname{Re} z_2$, $y_k = \operatorname{Im} z_k (k = 1, 2)$, $v = \operatorname{Im} w$.

Доказательство основной теоремы 1 состоит фактически из двух шагов.

На первом шаге голоморфная реализация любой из пяти обсуждаемых алгебр приводится (за счёт

[1] *Воронежский государственный университет*

[2] *Масариков университет, Брно, Чехия*

[3] *Воронежский государственный технический университет*

**E-mail*: *lobvgasu@yandex.ru*

использования техники работы [7]) к упрощённому представлению. Базисные векторные поля такой алгебры, имеющие первоначально общий вид

$$e_k = f_k(z_1, z_2, w)\frac{\partial}{\partial z_1} + g_k(z_1, z_2, w)\frac{\partial}{\partial z_2} + \\ + h_k(z_1, z_2, w)\frac{\partial}{\partial w} \quad (k = 1, \ldots, 5)$$

(для краткости $e_k = (f_k, g_k, h_k)$), совместно приводятся за счёт (локальных) голоморфных замен к некоторой "нормальной форме". С учётом первого утверждения теоремы 1 из всех пяти неразрешимых алгебр основной интерес представляют при этом три алгебры $\mathfrak{m}_{16}$, $\mathfrak{m}_{17}$, g_5.

На втором шаге система уравнений в частных производных, отвечающих таким полям, интегрируется для получения наглядных координатных представлений изучаемых однородных поверхностей.

Выводы, получаемые из рассмотрений первого шага, сформулированы в следующих трёх утверждениях.

Теорема 2. *Любая голоморфная реализация алгебры $\mathfrak{m}_{16}$, имеющая невырожденные по Леви интегральные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$, сводится (с точностью до локальной голоморфной эквивалентности) к алгебре с базисом следующего вида*:

$$\begin{aligned} &e_1\colon (z_1^2, -2Bz_1z_2, Cz_2),\\ &e_2\colon (z_1, Bz_2, 0),\\ &e_3\colon (1, 0, 0),\\ &e_4\colon (0, 0, 1),\\ &e_5\colon (0, z_2, w) \end{aligned} \tag{6}$$

с параметрами B, C, удовлетворяющими условию $(B+1)C = 0$.

Теорема 3. *Любая голоморфная реализация алгебры $\mathfrak{m}_{17}$, имеющая невырожденные по Леви интегральные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$, сводится (с точностью до локальной голоморфной эквивалентности) к алгебре с базисом одного из двух следующих видов ($t \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$)*:

$$\begin{aligned} &e_1\colon (i\cos z_1, i\sin z_1, 0),\\ &e_2\colon (-i\sin z_1, i\cos z_1, 0),\\ &e_3\colon (1, 0, 0),\\ &e_4\colon (0, 0, 1),\\ &e_5\colon (0, t, w) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &e_1\colon (i\cos z_1, -iz_2\sin z_1, z_2\cos z_1),\\ &e_2\colon (-i\sin z_1, -iz_2\cos z_1, -z_2\sin z_1),\\ &e_3\colon (1, 0, 0),\\ &e_4\colon (0, 0, 1),\\ &e_5\colon (0, z_2, w). \end{aligned} \tag{7}$$

Предложение 1. *Базис (любой) голоморфной реализации алгебры g_5, допускающей невырожденные по Леви орбиты, можно привести локальным голоморфным преобразованием к виду*

$$\begin{aligned} &e_1\colon (1, 0, 0),\\ &e_2\colon (2z_1, -z_2, w),\\ &e_3\colon (-z_1^2, z_1z_2 - w, -z_1w),\\ &e_4\colon (0, 1, z_1),\\ &e_5\colon (0, 0, 1). \end{aligned} \tag{8}$$

При интегрировании полученных алгебр на втором шаге естественно учесть вид $v = F(y_1, x_2, y_2)$ уравнений искомых однородных поверхностей, связанный с наличием в упрощённом базисе каждой из алгебр двух "выпрямленных" полей $\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \dfrac{\partial}{\partial w}$. Последовательное интегрирование уравнений в частных производных, отвечающих трём остальным полям в каждой из таких алгебр, приводит к пяти типам поверхностей из второй части теоремы 1.

Помимо двух обозначенных шагов в изучаемой задаче полного описания голоморфно-однородных гиперповерхностей отметим ещё один момент. Он связан с выяснением вопроса о новизне получаемых (на двух первых шагах описанной схемы) многообразий.

Например, поверхности (1) и (3) из формулировки теоремы 1, т.е. $v = \alpha\ln x_1 + \ln x_2$ и $v = \alpha\ln(e^{2x_1}+1) + \ln x_2$, получены нами как орбиты голоморфных реализаций 5-мерных алгебр $\mathfrak{m}_{16}$ и $\mathfrak{m}_{17}$. При этом известно, что поверхности (1) и (3) обладают 7-мерными алгебрами симметрий (см. [3]), подалгебрами которых являются рассмотренные голоморфные реализации $\mathfrak{m}_{16}$ и $\mathfrak{m}_{17}$.

Достаточно неожиданным для авторов оказался следующий результат.

Предложение 2. *При $\alpha > 0, \alpha \ne 1$ поверхность $vy_1 + x_2 = \alpha|z_2|$, отвечающая 5-мерной алгебре $\mathfrak{m}_{16}$, голоморфно-эквивалентна поверхности*

$$(1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + |w|^2) = \alpha|1 - z_1^2 - z_2^2 + w^2| \tag{9}$$

с тем же значением параметра α.

Замечание 1. Известное (см. [1]) семейство (9) обобщает однородные поверхности Картана [8] из пространства $\mathbb{C}^2$. Каждая поверхность этого семейства при $\alpha > 0$, $\alpha \ne 1$ имеет 6-мерную алгебру симметрий.

Для доказательства предложения 2 достаточно проверить непосредственными вычислениями, что голоморфное отображение

$$z_1^* = \frac{1+z_2}{w-z_1}, \quad z_2^* = \frac{1-z_1^2-z_2^2+w^2}{(w-z_1)^2}, \quad w^* = \frac{2(1-z_2)}{w-z_1} \tag{10}$$

переводит обсуждаемую поверхность из формулировки теоремы 1 в поверхность (9) с тем же α.

Отметим ещё, что само отображение (10) можно получить, учитывая вложение алгебры $\mathfrak{m}_{16} = \mathrm{sl}(2) + g_2$ в алгебру $\mathrm{sl}(2) + \mathrm{sl}(2) \cong \mathrm{so}(2, 2)$, ассоциированную с однородными поверхностями (9).

Замечание 2. Ещё один интересный момент связан с (локальной) голоморфной эквивалентностью каждой из картановых поверхностей (9), являющихся алгебраическими и имеющими 4-й порядок, некоторой поверхности второго порядка. Такая эквивалентность является следствием предложения 2. Квадратичное отображение $z_2^* = z_2^2$ превращает уравнение $vy_1 + x_2 = \alpha|z_2|$ в

$$vy_1 + x_2^2 - y_2^2 = \alpha|z_2|^2.$$

Замечание 3. При $\alpha = 0$ поверхность (2), отвечающая алгебре $\mathfrak{m}_{16}$, голоморфно эквивалентна индефинитной квадрике $v = |z_1|^2 - |z_2|^2$ и имеет 15-мерную алгебру симметрий. При $0 < \alpha < 1$ получаем в семействе (2) также поверхности с невырожденной знаконеопределённой формой Леви, а при $\alpha > 1$ — строго псевдовыпуклые поверхности; в обоих случаях алгебра симметрий 6-мерна. Наконец выколотому значению $\alpha = 1$ отвечает в уравнении (2) вырожденная по Леви поверхность, голоморфно эквивалентная трубке над конусом $x_1^2 + x_2^2 - v^2 = 0$. Алгебра автоморфизмов светового конуса, как известно, является 10-мерной биградуированной алгеброй Ли (см. [9]). Исходная 6-мерная алгебра, действующая на поверхностях (2) и (9), оказывается биградуированной подалгеброй этой алгебры, соответствующей чётным бииндексам.

Для определения места в задаче об однородности полученных в теореме 1 поверхностей (4) и (5) можно использовать понятие нормальной формы уравнения вещественной гиперповерхности многомерного комплексного пространства (см. [10]).

Уточним, что при $\alpha = 0$ уравнение (4)

$$v \operatorname{ch} y_1 + x_2 \operatorname{sh} y_1 = 0$$

сводится линейными заменами к виду $v = x_2 \exp(x_1)$ и (см. [11]) задаёт индефинитную сферическую поверхность.

При остальных $\alpha > 0$ уравнения (4), а также (5) задают индефинитные несферические поверхности. Напомним также, что в [1, Предложение 1.5] выделены голоморфно инвариантные типы многочленов N_{220} из нормальных уравнений именно такого класса гиперповерхностей. При этом все описанные в [3] индефинитные однородные поверхности с богатыми алгебрами симметрий попадают в два таких типа, имеющих в упомянутом предложении номера 4 (картанов и псевдо-картанов типы) и 6 (винкельманнов тип).

Предложение 3. *Нормальные уравнения поверхностей* (4) (*при* $\alpha > 0$) *и* (5), *ассоциированных с алгебрами* $\mathfrak{m}_{17}$ *и* g_5, *имеют многочлены* N_{220}, *относящиеся к первому типу предложения* 1.5 *работы* [1]. *При всех* $\alpha > 0$ *набор коэффициентов такого многочлена для семейства* (4) *имеет вид*

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2) = \left(1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 0,\ 0\right),$$

а для поверхности (5)

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2) = \left(1,\ \frac{2}{3},\ 1,\ 0,\ 0\right).$$

Следствие 1. *Поверхности*

$$v \operatorname{ch} y_1 + x_2 \operatorname{sh} y_1 = \alpha|z_2| \quad (\alpha > 0), \qquad (v - x_2 y_1)^2 + y_1^2 y_2^2 = y_1 \tag{11}$$

просто однородны, т.е. их максимальные алгебры симметрий являются 5-*мерными*.

Предложение 4. *Поверхности* (11) *являются новыми в задаче об однородности*.

Для доказательства заметим, что к настоящему времени известны лишь два (правда, достаточно объёмных) списка однородных поверхностей в $\mathbb{C}^3$:

1) трубки над аффинно-однородными поверхностями из $\mathbb{R}^3$ [12];

2) однородные поверхности с нетривиальными изотропиями [3].

При этом поверхности из второго списка не могут быть голоморфно-эквивалентными обсуждаемым многообразиям (11) из-за больших, чем 5, размерностей их алгебр симметрии. Но и поверхности из первого списка отличаются от (11): алгебра симметрий любой трубки содержит 3-мерную абелеву подалгебру сдвигов, а у алгебр $\mathfrak{m}_{17}$ и g_5, отвечающих обсуждаемым поверхностям (11), таких абелевых подалгебр нет.

Источники финансирования. Второй автор поддержан GACR (грантовое агентство Чешской Республики, проект 17-19427S) и FWF (австрийский научный фонд). Третий автор поддержан РФФИ (проект № 17–01–00592-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лобода А.В.* // Тр. Мат. ин-та РАН. 2001. Т. 235. С. 114–142.
2. *Fels G.*, *Kaup W.* // Acta Math. 2008. V. 201. P. 1–82.
3. *Doubrov B.*, *Medvedev A.*, *The D.* // arXiv (2017) 1711.02389v1. http://arxiv.org/abs/1711.02389v1.
4. *Акопян Р.С.*, *Лобода А.В.* // Функц. анализ и его прил. 2019. Т. 53. № 2. С. 59–63.
5. *Атанов А.В.*, *Лобода А.В.* // Материалы международной конференции ВЗМШ-2019. 2019. С. 135–138.
6. *Мубаракзянов Г.М.* // Изв. вузов. Матем. 1963. № 3. С. 99–106.
7. *Beloshapka V.K.*, *Kossovskiy I.G.* // J. Geom. Anal. 2010. V. 20. № 3. P. 538–564.
8. *Cartan E.* // Ann. Math. Pura Appl. 1932. V. 11. № 4. P. 17–90.
9. *Fels G.*, *Kaup W.* // J. Reine Angew. Math. 2007. V. 604. P. 47–71.
10. *Chern S.S.*, *Moser J.K.* // Acta Math. 1974. V. 133. P. 219–271.
11. *Исаев А.В.*, *Мищенко М.А.* // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 6. С. 1123–1153.
12. *Doubrov B.*, *Komrakov B.*, *Rabinovich M.* // Geometry and Topology of Submanifolds, VIII. 1996. P. 168–178.

ON ORBITS OF ACTION OF 5-DIMENSIONAL NON-SOLVABLE LIE ALGEBRAS IN THREE-DIMENSIONAL COMPLEX SPACE

A. V. Atanov[1], I. G. Kossovskiy[2], A. V. Loboda[3]

[1]*Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
[2]*Masaryk University, Brno, Czech Republic*
[3]*Voronezh State Technical University, Voronezh, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin April 10, 2019

Received May 13, 2019

After the description by E. Cartan in 1932 holomorphically homogeneous real hypersurfaces of two-dimensional complex spaces, a similar study in the 3-dimensional case remains incomplete. In a series of works performed by several international teams of authors, the problem is reduced to describing homogeneous surfaces that are non-degenerate in Levi sense and have exactly 5-dimensional Lie algebras of holomorphic vector fields. In this paper, precisely such homogeneous surfaces are investigated. At the same time, a significant part of the extensive list of abstract 5-dimensional Lie algebras does not provide new examples of homogeneity. A complete description of the orbits of 5-dimensional non-solvable Lie algebras in a three-dimensional complex space, given in the paper, includes examples of new homogeneous hypersurfaces. The presented results bring to finish a large-scale scientific study of interest to various branches of mathematics.

Keywords: homogeneous variety, holomorphic transformation, non-solvable Lie algebra, vector field, real hypersurface.