

УДК 517.962.24

## КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДИНАМИКУ ЛОГИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

С. Д. Глызин<sup>1,\*</sup>, С. А. Кашенко<sup>1,2,\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 03.10.2018 г.

Поступило 05.05.2019 г.

Рассматривается семейство отображений, которые используются при численном моделировании логистического уравнения с запаздыванием. Это уравнение находит широкое применение в задачах математической экологии. В работе сопоставляются свойства решений данных отображений и исходного уравнения с запаздыванием. Показано, что поведение решений разностных уравнений может быть достаточно сложным, в то время как логистическое уравнение с запаздыванием имеет лишь устойчивое состояние равновесия или цикл. Построенные отображения сами по себе могут служить моделями динамики популяций, поэтому их изучение представляет интерес.

*Ключевые слова:* логистическое уравнение с запаздыванием, отображение, бифуркации.

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0869-56524876611-616>

1. Вывод разностных логистических уравнений с запаздыванием. Логистическое уравнение с запаздыванием

$$\frac{du}{dt} = \rho[1 - u(t - h)]u, \quad \rho > 0, h > 0, u(t) \geq 0, \quad (1)$$

является базовым для целого ряда прикладных задач. Это уравнение подробно исследовано, например, в [1, 2].

Выполним в (1) стандартную разностную аппроксимацию  $\dot{u} \approx \delta^{-1}(u(t + \delta) - u(t))$  и замену “времени”  $t \rightarrow \delta t$ .

Предположим, что  $h\delta^{-1} = k$ , где  $k > 0$  — целое. В силу этого предположения для дискретных значений  $t = 1, 2, \dots, n$  приходим к нелинейному конечно-разностному уравнению  $(k + 1)$ -го порядка

$$u_{n+1} = [1 + rk^{-1}(1 - u_{n-k})]u_n, \quad r = \rho h, n \geq 0. \quad (2)$$

Поставим задачу исследования динамических свойств тех решений уравнения (2), которые остаются неотрицательными при всех  $n > 0$ . Отметим, что при  $h = 0$  от уравнения (2) переходим к одномерному отображению  $u_{n+1} = [1 + r\delta(1 - u_n)]u_n, n \geq 0$ , которое после замены  $w_n = r\delta(1 + r\delta)^{-1}u_n$  принимает вид стандартного логистического отображения

$$w_{n+1} = (1 + r\delta)(1 - w_n)w_n. \quad (3)$$

Отображение (3) является одномерным и унимодальным. К нему применимы все результаты общей теории одномерных отображений [3, 4]. При  $0 < r\delta \leq 3$  оно действует из отрезка  $[0, 1]$  в отрезок  $[0, 1]$ . При  $r\delta > 3$  для почти всех начальных условий, за исключением множества меры ноль, итерации отображения (3) начиная с некоторого  $n$  выходят за пределы данного отрезка. В этой ситуации положительные значения  $w_n$  сменяются отрицательными. Тем самым решение перестаёт быть биологически осмысленным.

В то же время если  $0 < r\delta \leq 2$ , то отображение (3), как и уравнение (1) с  $h = 0$ , имеет единственное устойчивое положительное состояние равновесия  $w_n \equiv r\delta(1 + r\delta)^{-1}$  ( $u_n \equiv 1$ ). Это означает, что чем меньше  $\delta$ , тем в более широком промежутке значений  $r$  отображение (3) имеет близкие динамические свойства с уравнением с непрерывным временем. В случае когда  $2 < r\delta \leq 3$ , итерации отображения (3) могут иметь сложный колебательный характер.

2. Случай  $k = 1$ . Рассмотрим теперь разностное уравнение (2) при  $k = 1$  и найдём области начальных условий и значений  $r$ , при которых его решение  $u_n > 0$  для всех натуральных  $n$ . В этом случае уравнение (2) двумерно и после замены  $w_n = r(1 + r)^{-1}u_n$  приводится к двумерному отображению вида

$$w_{n+1} = v_n, \quad v_{n+1} = (1 + r)(1 - w_n)v_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

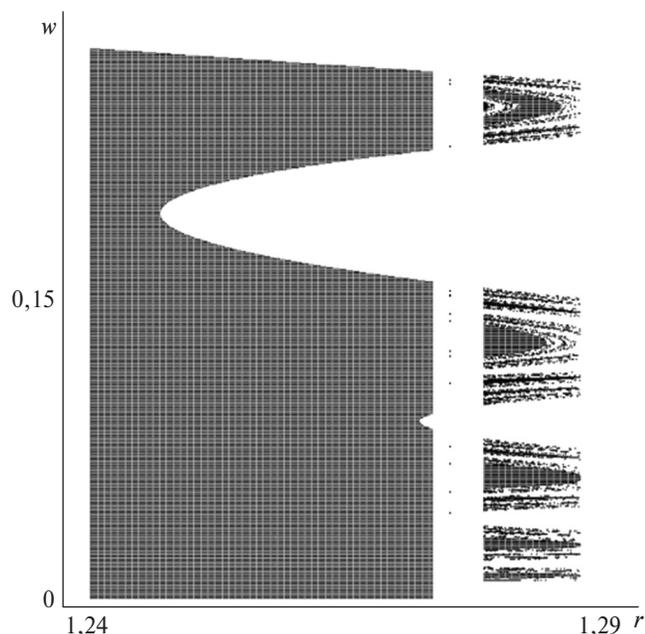
областью определения которого естественно рассматривать квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$ , поскольку выход

<sup>1</sup>Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

<sup>2</sup>Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва

\*E-mail: glyzin.s@gmail.com

\*\*E-mail: kasch@uniyar.ac.ru



**Рис. 1.** Начальные условия, соответствующие положительным решениям, при  $k = 1$  и  $1,24 \leq r \leq 1,29$ .

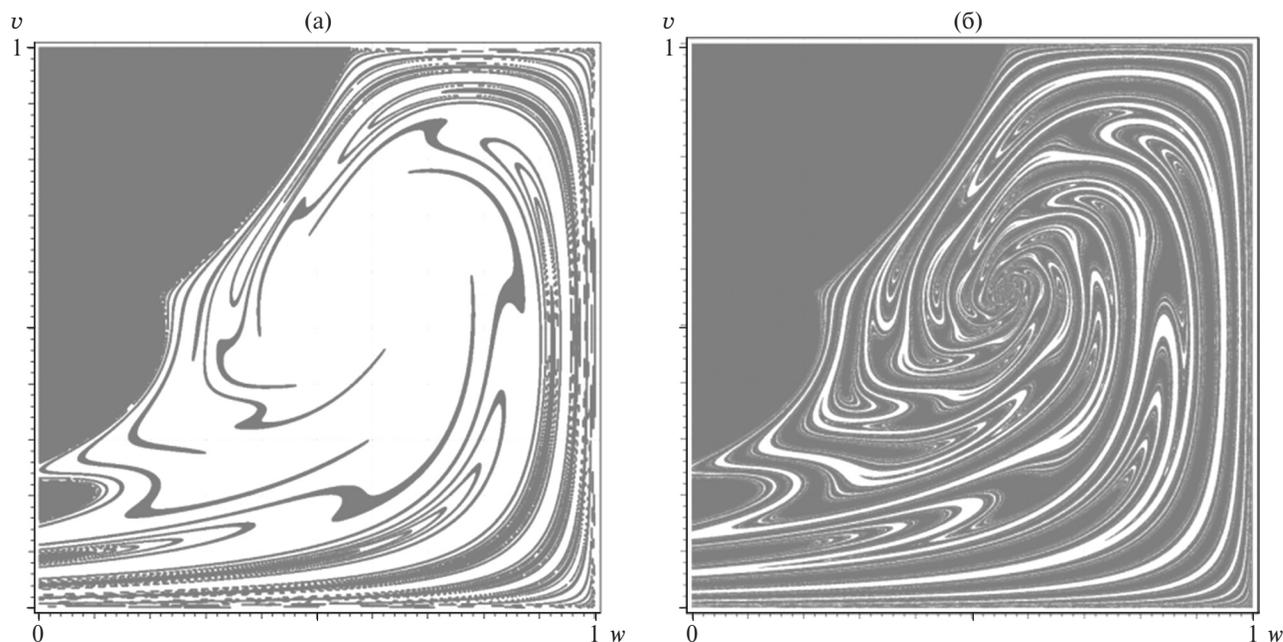
из этой области приводит к решениям с отрицательными компонентами.

На рис. 1 представлены результаты вычислений итераций отображения (4) с биологически естественными начальными условиями  $w_0 = 0, v_0 = w$ . Для каждой точки плоскости  $rOw$  вычислялось не более 10 тыс. итераций, до тех пор, пока какая-либо из итераций не становилась отрицательной, в этом случае

соответствующая точка не окрашивалась, а в случае если для всех итераций  $1 \leq n \leq 10\,000$  компоненты  $w_n$  оставались положительными, ставилась чёрная точка. На рис. 1 изображены значения, близкие к граничным для параметра  $r$  ( $1,24 \leq r \leq 1,29$ ). Граница области, где компоненты  $w_n$  положительны, имеет достаточно сложную структуру. Следует отметить, что выполненный для  $k > 1$  вычислительный эксперимент показал, что вид области с положительными решениями не имеет принципиальных отличий по сравнению с  $k = 1$ .

Коротко остановимся на структуре фазового квадрата отображения (4). Для её выявления строятся множества точек, которые уходят из него за одну, две и т.д. итераций отображения (4). На рис. 2а окрашены точки, уходящие из области  $[0, 1] \times [0, 1]$  не более чем за 18 итераций. Для того чтобы выяснить, имеется ли в фазовом квадрате множество точек ненулевой меры, которые не уходят из неё под действием отображения (4), был выполнен численный эксперимент, по результатам которого удалось показать, что для  $1,27\,569 < r < 1,28\,441$  область точек фазового квадрата, инвариантная относительно отображения (4), имеет сложный масштабно инвариантный характер. На рис. 2б изображена эта область для значения  $r = 1,2774$  (точки, уходящие из фазового квадрата, окрашены, а остающиеся в нём — нет).

3. Локальные свойства дискретного аналога логистического уравнения.



**Рис. 2.** Точки фазового квадрата, уходящие за его пределы, при итерациях отображения (4): а — серым обозначены точки, уходящие не более чем за 18 итераций, при  $r = 1,273$ ; б — не окрашены точки, остающиеся инвариантными относительно отображения (4) при  $r = 1,2774$ .

Бифуркация Андронова—Хопфа. Рассмотрим локальные свойства модели (2), в связи с чем отметим, что разностное уравнение (2), как и уравнение (1), имеет состояние равновесия  $u_n \equiv 1$ , за устойчивость которого отвечает расположение корней полинома

$$P(\lambda) = \lambda^{k+1} - \lambda^k + \frac{r}{k}. \quad (5)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.

1. Пусть выполнено неравенство

$$0 < r < r_*, \text{ где } r_* = 2k \sin\left(\frac{\pi}{2(2k+1)}\right), \quad (6)$$

тогда все корни многочлена (5) лежат в круге  $S = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| < 1\}$ , а при  $r = r_*$  уравнение  $P(\lambda) = 0$  имеет простую пару корней

$$\lambda = \exp(\pm i\omega_0), \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2k+1}, \quad (7)$$

а все остальные его корни по-прежнему находятся в  $S$ .

2. Корни (7) удовлетворяют требованиям отсутствия главных резонансов  $\exp(it\omega_0) \neq 1, t = 1, 2, 3, 4$ .

Из приведённой леммы следует, что при

$$r = r_* + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (8)$$

мы находимся в рамках применимости известной бифуркационной теоремы Андронова—Хопфа для отображений (см. [5, 6], отметим также [7]). Из линейного анализа следует, что, как и для уравнения с запаздыванием (1), в некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия  $u_0 = \dots = u_k = 1$  это отображение имеет экспоненциально устойчивое двумерное инвариантное многообразие. После перемещения этого состояния равновесия в начало координат и последующего перехода к подходящим криволинейным координатам отображение (2) при условии (8) на двумерном инвариантном многообразии можно записать в виде системы из двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Тогда для этих уравнений отображение сдвига по траекториям за время  $t = 1$  с точностью до величин порядка  $\varepsilon^{3/2}$  совпадает с (2), а сами уравнения принимают вид

$$\frac{dw}{d\tau} = \alpha w + d|w|^2 w, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (9)$$

где  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, d = d_1 + id_2$ .

Для вычисления коэффициентов  $\alpha, d$  от уравнения (2) переходим к соответствующему разностному уравнению с непрерывным временем

$$u(t+1) = u(t)[(r_* + \varepsilon)k^{-1}(1 - u(t-k))], \quad t \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

формальное решение которого будем искать в виде ряда

$$u = 1 + \sqrt{\varepsilon}(w(\tau)\exp(i\omega_0 t) + \bar{w}(\tau)\exp(-i\omega_0 t)) + \varepsilon h_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} h_2(t, \tau) + \dots \quad (11)$$

Здесь  $w(\tau)$  — медленно меняющаяся комплексная амплитуда, которая определяется на третьем шаге алгоритма, а  $h_1(t, \tau), h_2(t, \tau)$  — некоторые тригонометрические полиномы аргумента  $\omega_0 t$  с зависящими от  $\tau$  коэффициентами.

Выполняя соответствующие вычисления, убеждаемся, что для  $w(\tau)$  получается дифференциальное уравнение (9), в котором

$$\alpha = -\frac{1}{k} \frac{\exp(-ik\omega_0)}{(k+1)\exp(-i\omega_0) - k}, \quad (12)$$

$$d = -\frac{(1 + \exp(i\omega_0) - 2\exp(-ik\omega_0))(\exp(i\omega_0) - 1)}{2(1 + \exp(i\omega_0) - \exp(-ik\omega_0))((k+1)\exp(i\omega_0) - k)}.$$

Сделаем одно замечание. Выше вместо разностного уравнения (2) использовалось соответствующее уравнение с непрерывным временем (10) и был приведён формализм построения асимптотического разложения для решения специального вида. С точки зрения теории нормальных форм ситуация является достаточно сложной. Дело в том, что характеристический многочлен (5) для линеаризованного (на положительном состоянии равновесия) уравнения с непрерывным временем имеет при  $r = r_*$  не одну пару корней на единичной окружности  $\lambda_{\pm} = \exp(\pm i\omega_0)$ , а бесконечно много пар корней

$$\lambda_{n\pm} = \exp(i2\pi n \pm i\omega_0), \quad n = 1, 2, \dots$$

Поэтому критический случай в задаче об устойчивости состояния равновесия имеет бесконечную размерность. В статье [8] был исследован этот критический случай, и на основе приведённого в ней анализа получаются, конечно, те же формулы для коэффициентов  $\alpha$  и  $d$ .

Непосредственный анализ коэффициентов (12) позволяет обосновать следующее утверждение.

Лемма 2. Выполнены неравенства

$$\alpha_1 = \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad d_1 = \operatorname{Re} d < 0. \quad (13)$$

Неравенства (13) гарантируют существование у уравнения (9) экспоненциально орбитально устойчивого цикла  $w = \xi_* \exp(i\alpha_* \tau)$ , где  $\xi_* = \sqrt{-\alpha_1/d_1}, \alpha_* = \alpha_2 + d_2 \xi_*^2$ . Согласно результатам из [5, 6] в исходном разностном уравнении (2) данному циклу отвечает экспоненциально устойчивая замкнутая

инвариантная кривая диаметра порядка  $\sqrt{\epsilon}$ , бифурцирующая из единичного состояния равновесия при  $r = r_* + \epsilon$ ,  $0 < \epsilon \ll 1$ .

4. Нелокальные устойчивые решения дискретного аналога логистического уравнения. В этой части работы численными методами изучаются динамические свойства решений разностного уравнения (2) при  $k = 1$ , а точнее, эквивалентного ему отображения (4). Исходя из результатов предыдущего раздела, при  $0 < r < r_*$  у отображения (4) имеется единственная устойчивая неподвижная точка  $w_n = v_n = r(1+r)^{-1}$ , которая соответствует единичному состоянию равновесия уравнения (2). В данном случае в соответствии с формулой (6)  $r_* = 1$ . При значениях параметра  $r$ , близких к критическому значению от ненулевого состояния равновесия отображения (4), ответвляется экспоненциально устойчивая замкнутая инвариантная кривая диаметра порядка  $\sqrt{r-1}$ , которая всюду плотно заполняется точками итераций отображения (4). При увеличении параметра  $r$  эта кривая довольно быстро теряет гармоническую форму. На рис. 3а инвариантная устойчивая кривая представлена при  $r = 1,17$ .

Важной особенностью отображения (4) является то, что, имея схожие квадратичные правые части, например, с отображением Эно (см. [9]), оно при всех значениях  $r$ , для которых её решения ограничены, имеет устойчивую инвариантную кривую (см. рис. 3, 4). Численный анализ показал, что для всей области фазового квадрата, инвариантной относительно отображения (4), эта кривая является устойчи-

вой и итерации отображения асимптотически к ней приближаются. Вычисления итераций отображения (4) выполнялись, естественно, лишь для тех значений  $r$ , при которых инвариантная область не пуста. Используя результаты предыдущих пунктов, имеем два промежутка значений  $1 < r < r_\infty \approx 1,27101$  и  $1,27569 < r < 1,28441$ , при которых отображение обладает таким свойством.

Для отображений с квадратичной нелинейностью типа Эно характерно сложное хаотическое поведение траекторий [9]. В данном случае ситуация иная. Все фазовые перестройки динамической системы (4) оказываются связаны с её поведением на инвариантной кривой, причём динамика на этой кривой может быть как регулярной, так и хаотической. В рамках регулярной динамики отображение может иметь устойчивые циклы и двухчастотные колебания. В частности, при  $1 < r < 1,1764$  имеем двухчастотные колебания на инвариантной кривой, а при  $1,1764 < r < 1,22765$  им на смену приходят циклы различных периодов. Каскад бифуркаций удвоения приводит к появлению при  $r \approx 1,22765$  хаотического аттрактора типа цикла интервалов (о циклах интервалов см. работу [10] и библиографию в ней). На рис. 3б представлен цикл интервалов при  $r = 1,228$ . Характерной особенностью хаотического аттрактора такого типа является то, что точки траектории последовательно обходят интервалы, принадлежащие аттрактору, а старший ляпуновский показатель, вычисленный вдоль траектории, положителен. Численные исследования показали, что в этом случае  $\lambda_{\max} \approx 0,0251$  (вычисления выполнялись на основе метода динамической перенорми-

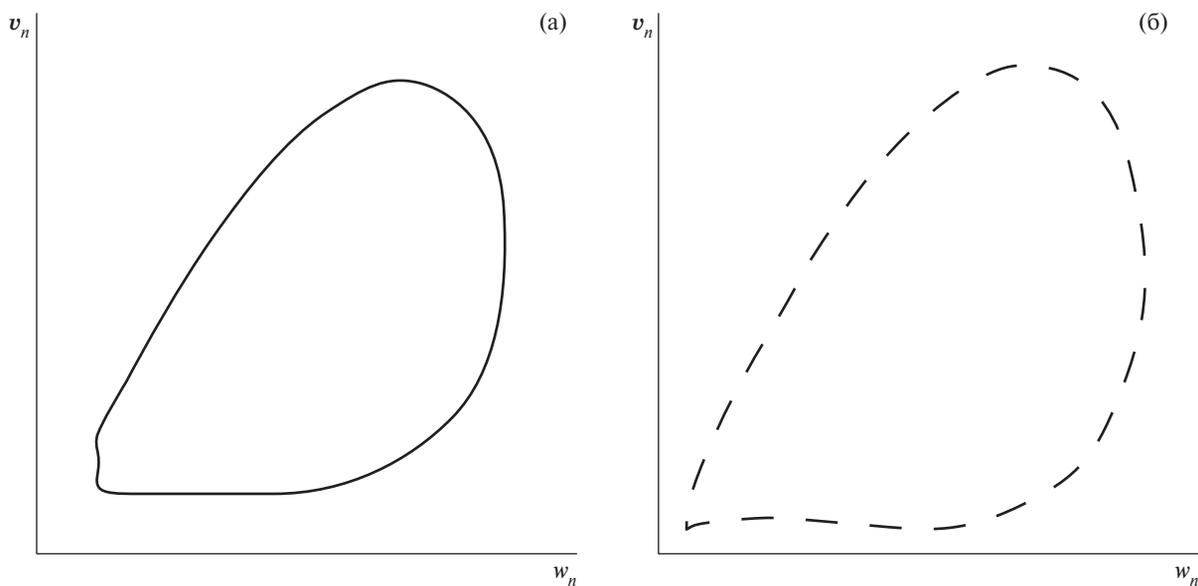
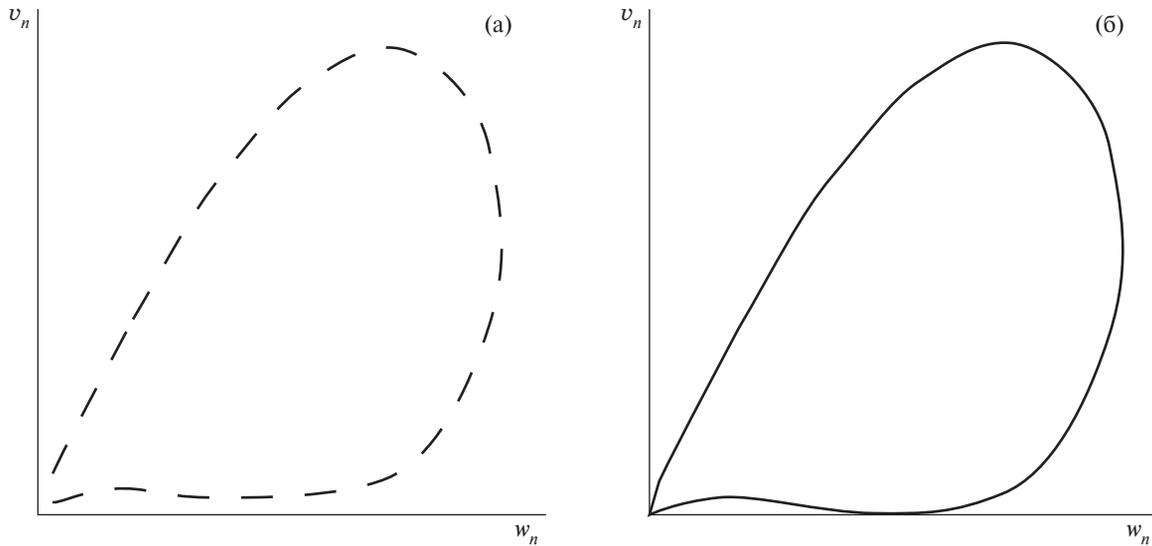


Рис. 3. Инвариантная кривая отображения при  $r = 1,17$  (а) и  $r = 1,228$  (б).



**Рис. 4.** Инвариантная кривая отображения при  $r = 1,243$  (а) и  $r = 1,27$  (б).

ровки, см. [11]). Увеличение параметра  $r$  приводит к потере устойчивости цикла интервалов и появлению устойчивых циклов. На промежутке  $1,2277 < r < 1,242$  аттрактором отображения (4) являются циклы различных периодов. При  $r \approx 1,242$  снова происходит переход к циклу интервалов. На рис. 4а представлен аттрактор отображения при  $r = 1,243$ , по сравнению с циклом интервалов из предыдущего промежутка у него меньше количество интервалов, что же касается старшего ляпуновского показателя, то он больше, чем в предыдущем случае,  $\lambda_{\max} \approx 0,04324$ .

Дальнейшее увеличение параметра  $r$  приводит, вероятно, к счётному числу переходов от циклов интервалов с хаотической динамикой к обычным устойчивым циклам различных периодов. На рис. 4б показано, что для значения  $r = 1,27$  инвариантная кривая заполнена точками траектории без пробелов. Старший ляпуновский показатель в этом случае равен  $\lambda_{\max} \approx 0,1819$ . Это означает, что поведение траекторий на этой кривой является хаотическим.

**5. Выводы.** Предложено семейство нелинейных логистических разностных уравнений всех порядков  $k = 1, 2, 3, \dots$ , возникающее при разностных аппроксимациях классического логического уравнения с запаздыванием. При небольших значениях порядка  $k$  проведено исследование динамических свойств решений и сделаны выводы о тенденциях изменения динамики при увеличении порядка. Показано, что в зависимости от величины мальтузианского коэффициента  $r$  может наблюдаться как простая (т.е. наличие устойчивых состояний равновесия или цикла), так и сложная динамическая

структура решений, например цикл интервалов и др. Рассмотрен вопрос о зависимости поведения решений от порядка  $k$  рассматриваемого разностного уравнения. Этот вопрос может быть связан со значением коэффициента разностной аппроксимации оператора дифференцирования в классическом дифференциальном логическом уравнении с запаздыванием. Например, при уменьшении шага такой аппроксимации динамические свойства соответствующих дифференциальных и разностных уравнений сближаются.

Представляет интерес исследование структуры инвариантной области определения решений разностных уравнений. В фазовом пространстве выделены области начальных условий, траектории из которых остаются положительными в процессе итераций отображения, т.е. сохраняется биологический смысл логистического уравнения. Проиллюстрированы явления в зависимости от параметра  $r$  и значения порядка  $k$ , когда указанные области могут иметь как простую, так и сложную структуру. Сформулирован вывод о структуре области в предельном случае.

**Источник финансирования.** Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 1.12873.2018/12.1).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Hale J.K. Theory of Functional Differential Equations. N.Y.: Springer Verlag, 1977. 626 p.
2. Kuang Y. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic Press, 1993. 398 p.

3. Шарковский А.Н. Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя // Украин. матем. журн. 1964. Т. 16. № 1. С. 61–71.
4. Feigenbaum M.J. Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations // J. Stat. Phys. 1978. V. 19. № 1. P. 25–52.
5. Marsden J.E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications // Appl. Math. Sci. 19. Springer-Verlag, 1976.
6. Шноль Э.Э. Об устойчивости неподвижных точек двумерных отображений // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30. № 7. С. 1156–1167.
7. Sacker R.J. On Invariant Surfaces and Bifurcation of Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations. 1964. Report IMM-NYU333, New York University.
8. Kashchenko I.S., Kashchenko S.A. Normal and Quasinormal Forms for Systems of Difference and Differential-Difference Equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2016. Sept. V. 38. P. 243–256.
9. Henon M. A Two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor // Communications in Mathematical Physics. 1976. V. 50 (1). P. 69–77.
10. Ruelle S. Chaos on the Interval / University Lecture Series. AMS, 2017. V. 67.
11. Глызин Д.С., Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Метод динамической перенормировки для нахождения максимального ляпуновского показателя хаотического аттрактора // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 2. С. 268–273.

## FINITE-DIMENSIONAL MAPS DESCRIBING THE DYNAMICS OF A LOGISTIC EQUATION WITH DELAY

S. D. Glyzin<sup>1</sup>, S. A. Kashchenko<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation*

<sup>2</sup>*National Research Nuclear University “MEPhI”, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov October 3, 2018

Received May 5, 2019

This article discusses a family of maps that are used in the numerical simulation of a logistic equation with delay. This equation and presented maps are widely used in problems of mathematical ecology as models of the dynamics of populations. The paper compares the dynamic properties of the trajectories of these mappings and the original equation with delay. It is shown that the behavior of the solutions of maps can be quite complicated, while the logistic equation with delay has only a stable equilibrium state or cycle.

*Keywords:* logistic equation with delay, maps, bifurcations.