УДК 512.73

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ГРОТЕНДИКА—СЕРРА И ТЭТА-ИНВАРИАНТЫ НА АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Д. В. Осипов

Представлено академиком РАН А. Н. Паршиным 10.05.2019 г.

Поступило 13.05.2019 г.

Приведено описание двойственности Гротендика—Серра на арифметической поверхности при помощи фиксации горизонтального дивизора. Это описание применено затем к обобщению тэта-инвариантов.

Ключевые слова: арифметические поверхности, двойственность Гротендика—Серра, тэта-инварианты.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524876617-621>

Цель сообщения — описание двойственности Гротендика—Серра на арифметической поверхности при фиксированном горизонтальном дивизоре на этой поверхности. Мы применяем это описание для обобщения θ -инвариантов со случая арифметических кривых на случай арифметических поверхностей. (Обзор θ -инвариантов на арифметических кривых приведён в [1, Ch. 2].)

Двойственность Серра для локально свободных пучков на проективных многообразиях над полем — очень важный инструмент в алгебраической геометрии, нашедший множество применений при изучении многообразий и пучков на них. Двойственность Гротендика—Серра обобщает двойственность Серра на относительный случай и работает также для схем, не определённых над полем. В случае арифметических поверхностей двойственность Гротендика—Серра является частью “очень общего формализма” (см. [2]). Отметим, что первая группа когомологий локально свободного пучка на арифметической поверхности может содержать кручение, являющееся конечной абелевой группой, так как первая группа когомологий не есть векторное пространство над полем. Эта подгруппа кручения — тоже предмет этой двойственности. Так как арифметические поверхности очень важны для теории алгебраических кривых над глобальными полями, то более конкретное изучение двойственности Гротендика—Серра на арифметических поверхностях является важной задачей. Кроме того, мы применяем наше описание этой двойственности для определения новых инвариантов локально свободных пучков на арифметических поверхностях,

зависящих от некоторых данных из геометрии Аракелова.

Пусть X — двумерная целая нормальная схема, так что естественный морфизм $f: X \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ проективен и сюръективен. Отсюда имеем, что f — плоский морфизм. Назовём такую схему X арифметической поверхностью.

Пусть $C = \bigcup_{1 \leq j \leq w} C_j$ — приведённая одномерная подсхема схемы X , так что для любого j одномерная подсхема C_j целая и $f(C_j) = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Отсюда имеем, что $f|_C$ — плоский морфизм. Предположим также, что C — дивизор Картье на X . (Если, например, X регулярен, то C всегда дивизор Картье.) Предположим, что открытая подсхема $U = X \setminus C$ аффинна. Из [3, Ch. 5, Cor. 3.24] следует, что это условие эквивалентно условию: схема $U_p = U \cap f^{-1}(p)$ аффинна для любого простого числа $p \in \mathbb{Z}$.

Для любого локально линейно компактного векторного пространства V над полем k и поля $L \supset k$ обозначим $V \hat{\otimes}_k L = \varinjlim_U ((V/U) \otimes_k L)$, где U пробегает по множеству всех открытых линейно компактных подпространств пространства V . Отметим, что $V \hat{\otimes}_k L$ — локально линейно компактное векторное пространство над L .

Для любых $1 \leq j \leq w$ пусть K_{C_j} — пополнение поля рациональных функций на X относительно дискретного нормирования, заданного подсхемой C_j . Поле вычетов поля K_{C_j} — это поле рациональных функций $\mathbb{Q}(C_j)$ схемы C_j , и оно есть конечное расширение поля $\mathbb{Q}$. Поле K_{C_j} совпадает с локальным полем точки, соответствующей схеме C_j на общем слое морфизма f . Поле K_{C_j} есть локально линейно компактное векторное пространство над полем $\mathbb{Q}$.

Зафиксируем когерентный пучок $\mathcal{F}$ на X . Для любых $1 \leq j \leq w$ пусть $\hat{\mathcal{F}}_{C_j}$ — пополнение слоя $\mathcal{F}_{C_j}$ в точке C_j , если рассматривать C_j как схемную точку на X . (Если $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, то $\hat{\mathcal{F}}_{C_j}$ — кольцо дискретного нормирования $\mathcal{O}_{K_{C_j}}$ поля K_{C_j} .)

Пусть $J_C \subset \mathcal{O}_X$ — пучок идеалов подсхемы C . Определим группы

$$R_{012}(\mathcal{F}) = \prod_{1 \leq j \leq w} (\hat{\mathcal{F}}_{C_j} \otimes_{\mathcal{O}_{K_{C_j}}} K_{C_j} \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}),$$

$$R_{12}(\mathcal{F}) = \prod_{1 \leq j \leq w} (\hat{\mathcal{F}}_{C_j} \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}),$$

$$R_{01}(\mathcal{F}) = \varinjlim_{n \in \mathbb{Z}} \varprojlim_{m \geq n} H^0(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_C^n / J_C^m),$$

$$R_{02}(\mathcal{F}) = H^0(U, \mathcal{F}|_U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = H^0(U_{\mathbb{Q}}, \mathcal{F}|_{U_{\mathbb{Q}}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R},$$

$$R_0(\mathcal{F}) = H^0(U, \mathcal{F}|_U), \quad R_1(\mathcal{F}) = \varinjlim_{m \geq 0} H^0(X, \mathcal{F} / J_C^m \mathcal{F}),$$

$$R_2(\mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = H^0(X_{\mathbb{Q}}, \mathcal{F}|_{X_{\mathbb{Q}}}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R},$$

где $X_{\mathbb{Q}}, U_{\mathbb{Q}}$ — общие слои (т.е. слои над $\text{Spec } \mathbb{Q}$) морфизмов f и $f|_U$.

Используя (если необходимо) ограничение на общий слой $X_{\mathbb{Q}}$, получаем естественные отображения $\alpha_I^J: R_I(\mathcal{F}) \rightarrow R_J(\mathcal{F})$, если для множеств индексов выполнено $I \subset J$.

Рассмотрим комплекс $\mathcal{R}(\mathcal{F})$:

$$\begin{aligned} R_0(\mathcal{F}) \oplus R_1(\mathcal{F}) \oplus R_2(\mathcal{F}) &\rightarrow \\ \rightarrow R_{01}(\mathcal{F}) \oplus R_{02}(\mathcal{F}) \oplus R_{12}(\mathcal{F}) &\rightarrow R_{012}(\mathcal{F}), \end{aligned}$$

где первая стрелка задана как

$$\begin{aligned} (r_0, r_1, r_2) &\mapsto (-\alpha_0^{01}(r_0) - \alpha_1^{01}(r_1), \\ \alpha_0^{02}(r_0) - \alpha_2^{02}(r_2), \alpha_1^{12}(r_1) + \alpha_2^{12}(r_2)) \end{aligned}$$

и вторая стрелка задана как

$$(r_{01}, r_{02}, r_{12}) \mapsto \alpha_{01}^{012}(r_{01}) + \alpha_{02}^{012}(r_{02}) + \alpha_{12}^{012}(r_{12}).$$

Предложение 1. Пусть A_{tor} — подгруппа кручения абелевой группы A . Тогда выполнено

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{R}(\mathcal{F})) &= H^0(X, \mathcal{F}), \quad H^1(\mathcal{R}(\mathcal{F})) = H^1(X, \mathcal{F})_{\text{tor}}, \\ H^2(\mathcal{R}(\mathcal{F})) &= H^1(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R} / \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Далее везде предположим, что морфизм f — локально полное пересечение. (Например, это выполнено, если схема X регулярна.) Тогда получаем, что дуализирующий пучок ω_f есть обратимый пучок на X и ω_f совпадает с пучком 1-дифференциалов на гладком локусе морфизма f (см. [3, Ch. 6]).

Далее везде предположим, что пучок $\mathcal{F}$ локально свободен. Отметим, что тогда все отображения α_I^J —

вложения, и относительно этих вложений имеем $R_{I_1}(\mathcal{F}) \cap R_{I_2}(\mathcal{F}) = R_{I_1 \cap I_2}(\mathcal{F})$ внутри группы $R_{012}(\mathcal{F})$.

Обозначим $\mathcal{G} = \omega_f \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}^\vee$, где $\vee$ — обозначение для двойственного пучка $\mathcal{O}_X$ -модулей. Двойственность Гротендика—Серра (см., например, [4, Ch. 7.5]) влечёт

$$R\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}}} (Rf_* \mathcal{F}, \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathbb{Z}})[-1] = Rf_* \mathcal{G}.$$

Рассматривая инъективную резольвенту

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z},$$

получаем два равенства

$$H^0(X, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^1(X, \mathcal{G}), \mathbb{Z}), \quad (1)$$

$$H^1(X, \mathcal{F})_{\text{tor}} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H^1(X, \mathcal{G})_{\text{tor}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \quad (2)$$

Естественные спаривания (для любых $1 \leq j \leq w$)

$$\hat{\mathcal{F}}_{C_j} \times \hat{\mathcal{G}}_{C_j} \rightarrow \widehat{\omega_f}_{C_j}$$

индуцируют спаривание:

$$\begin{aligned} R_{012}(\mathcal{F}) \times R_{012}(\mathcal{G}) &\rightarrow \\ \rightarrow R_{012}(\omega_f) &\simeq \prod_{1 \leq j \leq w} \Omega_{K_{C_j}}^{\text{cont}} \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \xrightarrow{\prod \text{res}_j} \\ \xrightarrow{\prod \text{res}_j} \prod_{1 \leq j \leq w} \mathbb{Q}(C_j) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} &\xrightarrow{\sum \text{Tr}_j \otimes \text{id}_{\mathbb{R}}} \mathbb{R} \rightarrow \\ \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\xrightarrow{x \mapsto \exp(2\pi i x)} \mathbb{T}, \end{aligned} \quad (3)$$

где (для любых $1 \leq j \leq w$)

$$\Omega_{K_{C_j}}^{\text{cont}} \simeq \Omega_{K_{C_j}} / \bigcap_{l \geq 0} (m_{C_j})^l d\mathcal{O}_{K_{C_j}},$$

идеал m_{C_j} максимальный в кольце $\mathcal{O}_{K_{C_j}}$, отображение res_j есть вычет

$$\Omega_{K_{C_j}}^{\text{cont}} \hat{\otimes}_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}(C_j) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R},$$

индуцированный обычным вычетом на дифференциальных формах, отображение Tr_j есть след из $\mathbb{Q}(C_j)$ в $\mathbb{Q}$.

Отметим, что $\mathbb{R}$ -векторные пространства $R_{012}(\mathcal{F})$ и $R_{012}(\mathcal{G})$ — объекты категории C_2^{ar} (см. [5, § 5]). Спаривание (3) задаёт двойственность этих объектов в этой категории, где двойственность обобщает двойственность Понтрягина для локально компактных абелевых групп.

Теорема 1. Рассмотрим все группы $R_I(\mathcal{F})$ как подгруппы группы $R_{012}(\mathcal{F})$ (и также для пучка $\mathcal{G}$). Спаривание (3) влечёт

$$\begin{aligned} R_{01}(\mathcal{F})^\perp &= R_{01}(\mathcal{G}), \quad R_{02}(\mathcal{F})^\perp = R_{02}(\mathcal{G}), \\ R_{12}(\mathcal{F})^\perp &= R_{12}(\mathcal{G}). \end{aligned}$$

То же самое верно, если переставить $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$.

Из предложения 1 получаем

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathcal{F}) &= R_{01}(\mathcal{F}) \cap R_{02}(\mathcal{F}) \cap R_{12}(\mathcal{F}), \\ H^1(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{T} &= \frac{R_{012}(\mathcal{F})}{R_{01}(\mathcal{F}) + R_{12}(\mathcal{F}) + R_{02}(\mathcal{F})}, \\ H^1(X, \mathcal{F})_{\text{tor}} &= \frac{R_{01}(\mathcal{F}) \cap (R_{02}(\mathcal{F}) + R_{12}(\mathcal{F}))}{R_0(\mathcal{F}) + R_1(\mathcal{F})} = \\ &= \frac{R_{02}(\mathcal{F}) \cap (R_{12}(\mathcal{F}) + R_{01}(\mathcal{F}))}{R_0(\mathcal{F}) + R_2(\mathcal{F})}. \end{aligned}$$

Те же самые выражения верны для $\mathcal{G}$.

Из теоремы 1 и его следствия

$$\begin{aligned} (R_{01}(\mathcal{F}) \cap R_{02}(\mathcal{F}) \cap R_{12}(\mathcal{F}))^\perp &= \\ &= R_{01}(\mathcal{G}) + R_{02}(\mathcal{G}) + R_{12}(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

получаем, что группа, двойственная по Понтрягину к дискретной абелевой группе $H^0(X, \mathcal{F})$, есть компактная абелева группа $H^1(X, \mathcal{G}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{T}$.

Кроме того (снова после теоремы 1), получаем, что

$$\begin{aligned} (R_{01}(\mathcal{F}) \cap (R_{02}(\mathcal{F}) + R_{12}(\mathcal{F})))^\perp &= R_{01}(\mathcal{G}) + R_2(\mathcal{G}), \\ (R_0(\mathcal{F}) + R_1(\mathcal{F}))^\perp &= \\ &= (R_{01}(\mathcal{G}) + R_{02}(\mathcal{G})) \cap (R_{12}(\mathcal{G}) + R_{01}(\mathcal{G})). \end{aligned}$$

Это задаёт двойственность между конечными абелевыми группами:

$$H^1(X, \mathcal{F})_{\text{tor}} = \frac{R_{01}(\mathcal{F}) \cap (R_{02}(\mathcal{F}) + R_{12}(\mathcal{F}))}{R_0(\mathcal{F}) + R_1(\mathcal{F})}$$

и

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathcal{G})_{\text{tor}} &= \frac{R_{02}(\mathcal{G}) \cap (R_{12}(\mathcal{G}) + R_{01}(\mathcal{G}))}{R_0(\mathcal{G}) + R_2(\mathcal{G})} = \\ &= \frac{(R_{01}(\mathcal{G}) + R_{02}(\mathcal{G})) \cap (R_{12}(\mathcal{G}) + R_{01}(\mathcal{G}))}{R_2(\mathcal{G}) + R_{01}(\mathcal{G})}. \end{aligned}$$

Предложение 2. *Только что описанные двойственности совпадают с двойственностями, индуцированными двойственностью Гротендика—Серра, см. (1), (2).*

В [6, § 4] было доказано, что

$$\frac{R_{012}(\mathcal{F})}{R_{01}(\mathcal{F}) + R_{02}(\mathcal{F})} = \lim_{m \geq 0} \Theta_m(\mathcal{F}), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \Theta_m(\mathcal{F}) &= \frac{R_{012}(\mathcal{F})}{R_{01}(\mathcal{F}) + R_{02}(\mathcal{F}) + R_{12}(J_C^m \mathcal{F})} = \\ &= H^1(X, J_C^m \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{T}, \end{aligned}$$

отображения $\Theta_m(\mathcal{F}) \rightarrow \Theta_{m-1}(\mathcal{F})$ сюръективны, и имеется целое число m_0 , так что для любого $m \geq m_0$ ядро последнего отображения есть

$$H^0(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_C^{m-1}/J_C^m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{T}.$$

Из теоремы 1 получаем, что группа, двойственная по Понтрягину к компактной группе (4), есть дискретная абелева группа

$$\begin{aligned} R_0(\mathcal{G}) &= H^0(U, \mathcal{G}|_U) = \lim_{\overleftarrow{m}} H^0(X, J_C^{-m} \mathcal{G}) = \\ &= \lim_{\overleftarrow{m}} \Delta_m(\mathcal{G}), \end{aligned}$$

где конечно порождённая дискретная абелева группа $\Delta_m(\mathcal{G}) = R_0(\mathcal{G}) \cap R_{12}(J_C^{-m} \mathcal{G})$ двойственна по Понтрягину к компактной абелевой группе $\Theta_m(\mathcal{F})$.

Отсюда и из конструкции спаривания (3) получаем, что

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R_0(\mathcal{G}), \mathbb{Z}) &= \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\lim_{\overleftarrow{m}} R_0(\mathcal{G}) \cap R_{12}(J_C^{-m} \mathcal{G}), \mathbb{Z}\right) = \\ &= \lim_{\overleftarrow{m}} \Lambda_m(\mathcal{F}) = R_{01}(\mathcal{F})/R_0(\mathcal{F}), \end{aligned}$$

где

$$\Lambda_m(\mathcal{F}) = \frac{R_{01}(\mathcal{F})}{R_{01}(\mathcal{F}) \cap (R_{02}(\mathcal{F}) + R_{12}(J_C^m \mathcal{F}))}$$

и

$$\begin{aligned} \Lambda_m(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} &= \frac{R_{012}(\mathcal{F})}{R_{02}(\mathcal{F}) + R_{12}(J_C^m \mathcal{F})} = \\ &= H^1(X, J_C^m \mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Мы хотим задать структуру индеклидовой и проевклидовой решётки на $R_0(\mathcal{G})$ и $R_{01}(\mathcal{F})/R_0(\mathcal{F})$ в смысле определения из [1, § 5.1.5, 5.3], так что эти структуры были бы двойственны друг другу (см. [1, § 5.5]).

Зафиксируем структуру эрмитова векторного расслоения над C на $H^0(C, \mathcal{F}/J_C \mathcal{F})$ и на $H^0(C, J_C/J_C^2)$. В случае группы $H^0(C, \mathcal{F}/J_C \mathcal{F})$ это значит, что для любых $1 \leq j \leq w$ задано семейство $(\|\cdot\|_{\sigma})_{\sigma: \mathbb{Q}(C_j) \hookrightarrow \mathbb{C}}$ эрмитовых норм на комплексных векторных пространствах

$$H^0(C_j, \mathcal{F}/J_{C_j} \mathcal{F}) \otimes_{H^0(C_j, \mathcal{O}_{C_j}), \sigma} \mathbb{C},$$

определённых при помощи вложения поля $\sigma: \mathbb{Q}(C_j) \rightarrow \mathbb{C}$, так что это семейство $(\|\cdot\|_{\sigma})_{\sigma: \mathbb{Q}(C_j) \hookrightarrow \mathbb{C}}$ инвариантно относительно комплексных сопряжений. Аналогично такая структура определяется в случае группы $H^0(C, J_C/J_C^2)$.

Ясно, что эти выбранные структуры задают также структуру эрмитова векторного расслоения над C на $H^0(C, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_C^{m-1}/J_C^m)$ (для любого $m \in \mathbb{Z}$) при помощи соответствующих структур на тензорных про-

изведениях, двойственных расслоениях и на $H^0(C, \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_C^{-m}/J_C^{-m+1})$, где используем, что по формуле присоединения пучок $\omega_f \otimes_{\mathcal{O}_X} J_C^{-1}/\mathcal{O}_X$ есть дуализирующий пучок для C над $\text{Spec } \mathbb{Z}$, и на этом пучке есть естественная структура эрмитова линейного расслоения над C (снова сперва построенная на каждом C_j), см. [1, § 1.2.2].

Таким образом, получаем естественные евклидовы нормы на каждом $\mathbb{R}$ -векторном пространстве

$$\begin{aligned} R_{12}(J_C^{m-1}\mathcal{F})/R_{12}(J_C^m\mathcal{F}) = \\ = H^0(C, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_C^{m-1}/J_C^m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \end{aligned} \quad (5)$$

через вложение последнего пространства в

$$\begin{aligned} H^0(C, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_C^{m-1}/J_C^m) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \\ = \bigoplus_{j: \sigma: \mathbb{Q}(C_j) \rightarrow \mathbb{C}} \bigoplus H^0(C_j, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} J_{C_j}^{m-1}/J_{C_j}^m) \otimes_{H^0(C_j, \mathcal{O}_{C_j}), \sigma} \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Имеем также аналогичные евклидовы нормы на каждом пространстве $R_{12}(J_C^{m-1}\mathcal{G})/R_{12}(J_C^m\mathcal{G})$ и индуцированные нормы на подпространствах и факторпространствах этого пространства и пространства (5).

Рассматривая абелеву группу $R_0(\mathcal{G})$ как бесконечную прямую сумму абелевых групп $\Delta_m(\mathcal{G})/\Delta_{m-1}(\mathcal{G})$ и $R_{01}(\mathcal{F})/R_0(\mathcal{F})$ как бесконечное прямое произведение абелевых групп, получим из структур, описанных выше, структуры индевклидовых и проевклидовых решёток соответственно.

При помощи описанной выше евклидовой нормы на пространстве $H^0(C, J_C/J_C^2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ и естественной евклидовой нормы на $H^0(C, \mathcal{O}_C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ определим аракеловскую степень нормального пучка для C :

$$\begin{aligned} \widehat{\deg} N_{C/X} = \log \text{covol } H^0(C, J_C/J_C^2) - \\ - \log \text{covol } H^0(C, \mathcal{O}_C), \end{aligned}$$

где covol — кообъём соответствующей решётки.

Предложение 3. *Выполнено следующее.*

1. *Проевклидова решётка $R_{01}(\mathcal{F})/R_0(\mathcal{F})$ естественно двойственна индевклидовой решётке $R_0(\mathcal{G})$.*

2. *Если $\widehat{\deg} N_{C/X} > 0$, то θ -инвариант, построенный по $R_{01}(\mathcal{F})/R_0(\mathcal{F})$, конечен:*

$$h_C^{\text{pro}}(\mathcal{F}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \log \sum_{x \in \Lambda_m(\mathcal{F})} e^{-\pi \|x\|^2} < +\infty.$$

3. *Если $\widehat{\deg} N_{C/X} < 0$, то θ -инвариант, построенный по $R_0(\mathcal{G})$, конечен:*

$$h_C^{\text{ind}}(\mathcal{G}) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \log \sum_{x \in \Lambda_m(\mathcal{G})} e^{-\pi \|x\|^2} < +\infty.$$

Было бы интересно рассмотреть элементы из групп $\widehat{\text{Ext}}_{\mathbb{Z}}^1$ от прямых слагаемых из разложения группы $R_0(\mathcal{G})$ (и группы $R_{01}(\mathcal{F})/R_0(\mathcal{F})$), см. [1, § 1.4], для получения новых структур инд (и про) евклидовых решёток. При этом предложение 3 останется верным.

Источник финансирования. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00237).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bost J.-M.* Theta Invariants of Euclidean Lattices and Infinite Dimensional Hermitian Vector Bundles over Arithmetic Curves. arxiv: 1512.08946
2. *Hartshorne R.* Residues and Duality. Lecture Notes of a Seminar on the Work of A. Grothendieck, Given at Harvard 1963/64. With an Appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics. № 20. B.; N.Y.: Springer-Verlag, 1966.
3. *Liu Q.* Algebraic Geometry and Arithmetic Curves. Translated from the French by Reinie Ern. Oxford Graduate Texts in Mathematics, 6. Oxford Science Publications. Oxford: Oxford University Press, 2002.
4. *Deligne P.* Le Dterminant de la Cohomologie. Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry (Arcata, Calif., 1985), 93–177. Contemp. Math., 67. Amer. Math. Soc., Providence (RI), 1987.
5. *Осипов Д.В., Паршин А.Н.* Гармонический анализ на локальных полях и пространствах аделей // Изв. РАН. Сер. матем. 2011. Т. 75. № 4. С. 91–164.
6. *Осипов Д.В.* Арифметические поверхности и адельные факторгруппы // Изв. РАН. Сер. матем. 2018. Т. 82. № 4. С. 178–198.

GROTHENDIECK—SERRE DUALITY AND THETA-INVARIANTS ON ARITHMETIC SURFACES

D. V. Osipov

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS A. N. Parshin May 10, 2019

Received May 13, 2019

In the paper, a description of the Grothendieck—Serre duality on an arithmetic surface by means of fixing a horizontal divisor is given and this description is applied to the generalization of theta-invariants.

Keywords: arithmetic surfaces, Grothendieck—Serre duality, theta-invariants.