ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 2, с. 123–125

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

ОЦЕНКА МЕЖДУ РАССТОЯНИЯМИ ПО ВАРИАЦИИ И В ПРОСТРАНСТВЕ L^2 ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ ОТ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ ВОГНУТЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ

Е. Д. Косов

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 02.04.2019 г.

Поступило 18.04.2019 г.

Получены новые оценки расстояний по вариации между распределениями многочленов на пространстве с логарифмически вогнутой мерой через расстояния между этими многочленами в пространстве L^2 по данной мере.

Ключевые слова: гауссовская мера, логарифмически вогнутая мера, распределение, распределение многочлена, расстояние по вариации.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524882123-125

Основной результат этого сообщения состоит в следующем.

Теорема 1. *Для всякого натурального числа $d \geq 2$ найдётся такое число $C(d) > 0$, что для всякой логарифмически вогнутой меры μ и для всех многочленов f, g степени d на $\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$\sigma_g^{1/d} \, \| \mu \circ f^{-1} - \mu \circ g^{-1} \|_{\mathrm{TV}} \leq C(d) \, \| f - g \|_{L^2(\mu)}^{1/d},$$

где $\sigma_g^2 := \mathbb{D}g$ — дисперсия g, $\mu \circ f^{-1}$ и $\mu \circ g^{-1}$ — распределения случайных величин f и g соответственно.

Полное доказательство будет опубликовано в отдельной работе.

Сформулированная теорема обобщает следующее свойство многочленов на пространстве с гауссовской мерой γ. Пусть $d \in \mathbb{N}$ и g — непостоянный многочлен степени d. Тогда найдётся такое число $C(d, g) > 0$, зависящее только от d и g, что для всякого многочлена f степени d выполнено неравенство

$$\| \gamma \circ f^{-1} - \gamma \circ g^{-1} \|_{\mathrm{TV}} \leq C(d, g) \, \| f - g \|_{L^2(\gamma)}^{1/d}.$$

Данное утверждение было изначально сформулировано в работе [1], а полное доказательство с важными техническими подробностями может быть найдено в кандидатской диссертации Г.В. Мартыновой [2] (в одномерном случае, из которого можно вывести многомерный). Тем не менее, так как полное доказательство нельзя получить из опубликованной работы [1], а диссертация Г.В. Мартыновой доступна лишь в нескольких библиотеках, было предпринято несколько попыток доказать указанное неравенство, используя идеи метода Маллявена. Первая такая попытка была предпринята Нурдиным и Поли [3], которые доказали следующий результат.

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$. Тогда найдётся такое число $C(d, a, b) > 0$, что для всякого многочлена g степени d с дисперсией $\sigma_g^2 \in [a, b]$ и всякого многочлена f степени d выполнено неравенство

$$\| \gamma \circ f^{-1} - \gamma \circ g^{-1} \|_{\mathrm{TV}} \leq C(d, a, b) \, \| f - g \|_{L^2(\gamma)}^{1/(2d)} .$$

Этот результат показывает, что число $C(d, g)$ зависит только от оценок на дисперсию. Однако степень L^2-нормы в теореме Нурдина–Поли хуже степени в исходном утверждении. В работе [4] был получен промежуточный результат: зависимость константы была хуже по сравнению с оценкой Нурдина–Поли, но зависимость правой части от L^2-нормы отличалась от анонсированной в [1] только логарифмическим множителем. Наконец, в работе [5] было установлено следующее утверждение.

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Найдётся такое число $c(d) > 0$, зависящее только от d, что для всех многочленов f, g степени $d \geq 2$ на $\mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$\| \gamma \circ f^{-1} - \gamma \circ g^{-1} \|_{\mathrm{TV}} \leq c(d) (\| \nabla g \|_*^{-1/(d-1)} + 1) \| f - g \|_2^{1/d},$$

где

$$\| \nabla g \|_*^2 := \sup_{|e|=1} \int | \partial_e g |^2 \, d\gamma.$$

Этот результат совпадает с оценкой Давыдова–Мартыновой. Кроме того, он даёт некоторую ин-

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва

E-mail: ked_2006@mail.ru

формацию о константе в правой части. Однако зависимость полученной константы от g всё ещё хуже, чем в теореме из [3].

Теорема 1 настоящей работы обобщает оценку Давыдова–Мартыновой на случай общих логарифмически вогнутых мер, т.е. вероятностных борелевских мер с плотностями вида e^{-V} относительно мер Лебега на аффинных подпространствах L, где $V\colon L \to (-\infty, +\infty]$ — выпуклая функция. Отметим, что даже в случае гауссовской меры полученный результат даёт новую информацию о константе в неравенстве. Также отметим, что из-за независимости константы в неравенстве от размерности аналогичная оценка выполнена и в бесконечномерном случае. Доказательство теоремы 1 сочетает некоторые идеи из работ [3, 5, 6].

Для $x, y \in \mathbb{R}^n$ через (x, y) обозначим стандартное евклидово скалярное произведение на $\mathbb{R}^n$ и положим $|x| := \sqrt{(x,x)}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Через $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем. Напомним определение нормы полной вариации $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ знакопеременной меры ν на $\mathbb{R}^n$:

$$\|\nu\|_{\mathrm{TV}} := \sup\left\{\int \varphi d\nu, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|\varphi\|_\infty \le 1\right\},$$

где $\|\varphi\|_\infty := \sup|\varphi(x)|$. Распределение $\mu \circ F^{-1}$ случайной величины F на измеримом пространстве с мерой μ определяется соотношением

$$\mu \circ F^{-1}(A) := \mu(F \in A),$$

где A — борелевское множество. Логарифмически вогнутая мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется изотропной, если

$$\int_{\mathbb{R}^n} (x,\theta)\mu(dx) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} (x,\theta)^2 \mu(dx) = |\theta|^2 \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}^n.$$

Производной по Скороходу $D_e\mu$ борелевской меры μ вдоль вектора $e \in \mathbb{R}^n$ называется такая борелевская мера на $\mathbb{R}^n$, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_e \varphi d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d(D_e\mu)$$

для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В работе [7] было показано, что каждая логарифмически вогнутая мера μ с плотностью ρ дифференцируема по Скороходу вдоль каждого вектора $e \in \mathbb{R}^n$, кроме того,

$$\|D_e\mu\|_{\mathrm{T}V} = 2\int_{\langle e\rangle^\perp} \max_t \rho(x + te)dx,$$

где $\langle e\rangle^\perp$ обозначает ортогональное дополнение до вектора e.

Для μ-измеримой функции f положим

$$\|f\|_r := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r d\mu\right)^{1/r}, \ r > 0;$$

$$\|f\|_0 := \exp\left(\int_{\mathbb{R}^n} \ln|f| d\mu\right) = \lim_{r\to 0} \|f\|_r.$$

Важной частью доказательства теоремы 1 оказывается следующее обратное неравенство Пуанкаре для многочленов на пространстве с логарифмически вогнутой мерой, которое представляет отдельный интерес.

Т е о р е м а 2. *Для всякого $d \in \mathbb{N}$ найдётся такое число $C(d) > 0$, что для всяких логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$, многочлена f степени d и вектора e единичной длины выполнено неравенство*

$$\|\partial_e f\|_2 \le C(d)\, \|D_e\mu\|_{\mathrm{TV}} \|f\|_2.$$

Доказательство теоремы 1 основано на нескольких технических леммах.

Л е м м а 1. *Пусть $n, d \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Найдётся такое число $c(d,n) > 0$, зависящее только от d и n, что для всяких изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ с плотностью ρ, многочлена h степени d и единичного вектора $e \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство*

$$\int_{\langle e\rangle^\perp} \max_s [|h(x+se)|\,\rho(x+se)]dx \le c(d,n)\int_{\mathbb{R}^n} |h| d\mu.$$

В следующей лемме получена оценка, похожая на теорему 1, но зависящая от размерности.

Л е м м а 2. *Пусть $n, d \in \mathbb{N}$, $d \ge 2$. Найдётся такое число $c(d, n) > 0$, что для всяких изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$, многочленов f и g степени d, функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с $\|\varphi\|_\infty \le 1$ и вектора e единичной длины выполнена оценка*

$$\|\partial_e g\|_2^{1/d} \int \varphi(f) - \varphi(g) d\mu \le c(d,n)\, \|f - g\|_1^{1/d}.$$

Доказательства этих двух лемм основаны на нескольких оценках Клартага из работ [8–10]. В доказательствах также используется эквивалентность всех L^p-норм многочленов фиксированной степени на пространстве с логарифмически вогнутой мерой (см. [11, 12]), а также следующее неравенство Карбери–Райта из [13]: существует такая постоянная c, что для всякой логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ и для всякого многочлена f степени d выполнено неравенство

$$\mu(|f| \le t)\left(\int |f| d\mu\right)^{1/d} \le cdt^{1/d}.$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть $n, d \in \mathbb{N}$. Найдётся такое число $c(d,n) > 0$, что для всяких изотропной логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$, многочленов f и g степени d на $\mathbb{R}^n$ и функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ с $\|\varphi\|_\infty \le 1$ выполнено неравенство*

$$\left(\int |g - \mathbb{E}g|^{1/d}\, d\mu\right) \int \varphi(f) - \varphi(g) d\mu \le c(d,n) \int |f - g|^{1/d}\, d\mu.$$

Доказательство предыдущего следствия основано на неравенстве Пуанкаре для логарифмически вогнутых мер из работы [14]: существует такая абсолютная постоянная M, что для всякой логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ и всякой локально липшицевой функции f выполнено неравенство

$$\int \left(f - \int f d\mu\right)^2 d\mu \le M \int |x - x_0|^2 d\mu \int |\nabla f|^2 d\mu, \ x_0 = \int x d\mu.$$

Заключительная часть доказательства теоремы 1 основана на следующей локализационной лемме.

Лемма [15]. *Пусть K — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, $F_i : K \to \mathbb{R}$, $1 \le i \le p$. Пусть все функции F_i полунепрерывны сверху. Пусть $P_{F_1,\dots,F_p}$ — множество всех таких логарифмически вогнутых мер с носителем в K, что*

$$\int F_i\, d\mu \ge 0,\ i = 1, 2, \dots, p.$$

Пусть Φ: $P(K) \to \mathbb{R}$ — выпуклая полунепрерывная сверху функция, где $P(K)$ обозначает пространство всех борелевских вероятностных мер с носителем в K со слабой топологией. Тогда

$$\sup_{\mu \in P_{F_1,\dots,F_p}} \Phi(\mu)$$

достигается на таких логарифмически вогнутых мерах μ, что наименьшее аффинное подпространство, содержащее носитель μ, имеет размерность не выше p.

Благодарности. Автор является лауреатом конкурса “Молодая математика России” и выражает благодарность спонсорам и жюри конкурса.

Источник финансирования. Это исследование поддержано Российским научным фондом, грант 17–11–01058 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Давыдов Ю.А., Мартынова Г.В.* В сб.: Статистика и управление случайными процессами. М.: Наука, 1987. С. 55–57.
2. *Мартынова Г.В.* // Диссертация канд. физ.-мат. наук. 01.01.05. Л.: ЛГУ, 1987; № 1-1-5/ЛГУ. Рос. гос. библиотека (М.).
3. *Nourdin I., Poly G.* // Stochastic Processes Appl. 2013. V. 123. № 2. P. 651–674.
4. *Bogachev V.I., Kosov E.D., Zelenov G.I.* // Trans. Amer. Math. Soc. 2018. V. 370. № 6. P. 4401–4432.
5. *Zelenov G.I.* // Theory Stoch. Processes. 2017. V. 38. № 2. P. 79–85.
6. *Kosov E.D.* // J. Math. Anal. Appl. 2018. V. 462. № 1. P. 390–406.
7. *Кругова Е.П.* // Мат. сб. 1997. Т. 188. № 2. С. 57–66.
8. *Klartag B.* // Geom. & Funct. Anal. GAFA. 2006. V. 16. № 6. P. 1274–1290.
9. *Klartag B.*// J. Funct. Anal. 2007. V. 245. № 1. P. 284–310.
10. *Klartag B.* // Inventiones Math. 2007. V. 168. № 1. P. 91–131.
11. *Bobkov S.G.* // Geom. & Funct. Anal. GAFA. 2000. V. 1745. P. 27–35.
12. *Bobkov S.G.* // Теор. вероятн. и примен. 2000. V. 45. № 4. С. 745–748.
13. *Carbery A., Wright J.* // Math. Res. Lett. 2001. V. 8. № 3. P. 233–248.
14. *Bobkov S.G.* // Ann. Probab. 1999. V. 27. № 4. P. 1903–1921.
15. *Fradelizi M., Guédon O.* // Discrete Comput. Geom. 2004. V. 31. № 2. P. 327–335.

AN INEQUALITY BETWEEN TOTAL VARIATION AND L^2 DISTANCES FOR POLYNOMIALS IN LOG-CONCAVE RANDOM VECTORS

E. D. Kosov

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russian Federation

Presented by Academicain of the RAS B. S. Kashin April 2, 2019

Received April 18, 2019

In the paper we discuss a new bound of the total variation distance in terms of L^2 distance for random variables that are polynominals in log-concave random vectors.

Keywords: Gaussian measure, logarithmically concave measure, distribution, distribution of a polynomial, total variation distance.