ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 2, с. 126–129

МАТЕМАТИКА

УДК 519.615

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ *p*-РЕГУЛЯРНОСТИ

Б. Медак[1], А. А. Третьяков[1,2,3,*]

Представлено академиком РАН Ю.Г. Евтушенко 15.05.2019 г.

Поступило 20.05.2019 г.

Рассмотрена проблема существования непрерывной зависимости решения краевой задачи от параметра. Доказывается, что при наличии свойства *p*-регулярности существует решение, непрерывно зависящее от малого параметра. Основной результат работы базируется на теоремах, представляющих различные версии теоремы о неявной функции. Для вырожденных отображений теоремы применяются для анализа краевой задачи с малым параметром. В случае абсолютного вырождения найден *p*-фактор оператор. Вводится понятие *p*-ядра оператора, а также правый и левый обратные операторы. Сформулированы теоремы, которые являются специальными версиями обобщённой теоремы Люстерника и теоремы о неявной функции в вырожденном случае. Доказана теорема о неявной функции в случае нетривиального ядра.

Ключевые слова: краевые задачи, *p*-регулярность, зависимость решения от параметра, теорема о неявной функции, вырожденные отображения, оператор проектирования, замыкание линейной оболочки квадратичной формы, *p*-фактор оператор, абсолютная вырожденность, *p*-ядро оператора, правый обратный оператор.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524882126-129

Рассматривается проблема существования непрерывной зависимости решения краевой задачи вида

$$P(x) = P(x^{(k)},\dots,x',x) = 0,\quad x(a) = \nu,\quad x(b) = \rho, \tag{1}$$

где $P\colon C_m^k[a,b] \to C_m[a,b]$, $x(t) \in C_m^k[a,b]$, $\mu \triangleq (\nu,\rho) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ от малого параметра $\mu - \mu^*$ в окрестности решения (1), где $x^*(t) = x^*(t,\mu^*)$ при $\mu = \mu^*$, т.е. $\mu \in U_\varepsilon(\mu^*)$ и $\varepsilon > 0$ – достаточно малое, а μ^* – фиксированный элемент из $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. В общем случае, как известно, такой зависимости не будет, однако, как показывается в данной работе, при наличии свойства *p*-регулярности задач (1) доказать существование непрерывно зависящего от параметра μ решения задачи (1) при малых $\mu - \mu^*$ удаётся (может и не единственного).

Например, для краевой задачи

$$P(x) = x'' + x + x^2 = 0,\quad x(0) = \nu,\quad x(2\pi) = \rho, \tag{2}$$

где ν и ρ – малые параметры из $U_\varepsilon(\nu^*,\rho^*)$, $\nu^* = \rho^* = 0$, а $x^*(t) = 0$, $\mu^* = 0$, в окрестности $V_\varepsilon(0)$ существует решение $x(t,\mu) \in V_\varepsilon(0)$, непрерывно зависящее от малого параметра $\mu = (\nu,\rho) \in U_\varepsilon(0)$. В дальнейшем задачу (1) мы трансформируем преобразованием переменных к виду

$$F(x,\mu) = F(x^{(k)},\dots,x',x) = 0,$$
$$F\colon X \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to C_m[a,b], \tag{3}$$

где $X = \{C_m^k[a,b] \mid x(a) = 0,\ x(b) = 0\}$, аналогично, как это сделано в работе [1].

Основной результат работы базируется на следующих теоремах, которые представляют собой различные версии обобщённой теоремы о неявной функции в случае исследования вырожденных отображений и применяются для анализа краевой задачи с малым параметром (1). Причём эти теоремы могут рассматриваться и как независимые результаты нелинейного анализа. Введём необходимые нам в дальнейшем определения и конструкции теории *p*-регулярности для исследования свойств решений уравнения

$$F(x,\mu) = 0, \tag{4}$$

где $F\colon X \times M \to Z$ и X, M, Z – банаховы пространства в случае вырождения отображения $F(\cdot)$ в решении (x^*,μ^*), т.е. $\operatorname{Im} F'(x^*,\mu^*) \neq Z$ (см., например, [1, 4, 5]). Предположим, что пространство Z разложимо в прямую сумму замкнутых подпространств $Z_1,\dots,Z_p$, т.е.

$$Z = Z_1 \oplus \dots \oplus Z_p, \tag{5}$$

где $Z_1 = \operatorname{cl}(\operatorname{Im} F'(x^*,\mu^*))$ и $W_1 \triangleq Z$. В качестве W_2 мы берём замкнутое прямое дополнение к Z_1 в Z, т.е.

[1] Siedlce University, Siedlce, Poland

[2] Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» Российской Академии наук, Москва

[3] System Research Institute Academy, Warsaw, Poland

*E-mail: prof.tretyakov@gmail.com

$Z = Z_1 \oplus W_2$. Пусть $P_{W_2}\colon Z \to W_2$ — оператор проектирования на W_2 параллельно Z_1. Через Z_2 мы обозначим замыкание линейной оболочки квадратичной формы (квадратичное отображение) $P_{W_2} F''(x^*, \mu^*)[\cdot]^2$. Таким образом, определим индуктивно

$$Z_i = \mathrm{cl}\left(\mathrm{Im}\, P_{W_i} F^{(i)}(x^*, \mu^*)[\cdot]^i\right) \subseteq W_i,\ \ i = 2, 3, \ldots, p-1, \quad (6)$$

где W_i – замкнутое прямое дополнение к $Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, p$ в Z и $P_{W_i}\colon Z \to W_i$ – оператор проектирования на W_i параллельно $Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_{i-1}$, $i = 2, 3, \ldots, p$ в Z. Окончательно $Z_p = W_p$. Порядок p определён как минимальное число (если такое существует), для которого выполнено (5). Далее будем для удобства обозначать $\varphi^{(0)} = \varphi$. Определим следующее отображение:

$$f_i\colon X \times M \to Z_i,\ f_i(x, \mu) = P_{Z_i} F(x, \mu),\ i = 1, 2 \ldots, p, \quad (7)$$

где $P_{Z_i}\colon Z \to Z_i$ – оператор проектирования на Z_i параллельно $Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_{i-1} \oplus Z_{i+1} \oplus \ldots \oplus Z_p$. Тогда отображение F может быть представлено как

$$F(x, \mu) = f_1(x, \mu) + \ldots + f_p(x, \mu) \quad (8)$$

или $F(x, \mu) = (f_1(x, \mu), \ldots, f_p(x, \mu))$. Обозначим $h = [h_x, h_\mu]$, $h_x \in X$, $h_\mu \in M$.

Определение 1. Линейный оператор $\Psi_p(h)$: $X \times M \to Z$

$$\Psi_p(h) = f_1'(x^*, \mu^*) + f_2''(x^*, \mu^*)[h] + \ldots$$
$$\ldots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^{p-1} \quad (9)$$

называется *p*-фактор оператором.

Определение 2. Будем говорить, что отображение F абсолютно вырождено в точке (x^*, μ^*) до порядка p, если $F^{(i)}(x^*, \mu^*) \equiv 0$, $i = 1, 2, \ldots, p-1$.

Замечание 1. В случае абсолютного вырождения *p*-фактор оператор равен

$$F^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^{p-1}.$$

Замечание 2. Для каждого отображения $f_i(\cdot)$ будет

$$f_i^{(k)}(x^*, \mu^*) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, i-1, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, p.$$

Замечание 3. Каждое отображение $f_i(\cdot)$ будет абсолютно вырождено до порядка i. Это означает, что $f_i^{(i)}(x^*, \mu^*)[h]^{i-1}$ – i-фактор оператор, соответствующий абсолютно вырожденному до порядка i отображению $f_i(\cdot)$. Поэтому общее вырождение отображения $F(\cdot)$ сводится к анализу абсолютно вырожденных отображений $f_i(\cdot)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, и их композиций.

Определение 3. *P*-ядро оператора $\Psi_p(h)$ в точке (x^*, μ^*) – это множество

$$H_p(x^*, \mu^*) = \mathrm{Ker}^p \Psi_p(h) = \{h \in X \times M\colon f_1'(x^*, \mu^*)[h] +$$
$$+ f_1'(x^*, \mu^*)[h]^2 + \ldots + f_p^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^p = 0\}.$$

Заметим, что $\mathrm{Ker}^p \Psi_p(h) = \left\{ \bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*, \mu^*) \right\}$.

P-ядро оператора $F^{(p)}(x^*, \mu^*)$ в случае абсолютного вырождения отображения $F(\cdot)$ – это

$$\mathrm{Ker}^p F^{(p)}(x^*, \mu^*) = \{h \in X \times M : F^{(p)}(x^*, \mu^*)[h]^p = 0\}.$$

Определение 4. Отображение F называется *p*-регулярным в точке (x^*, μ^*) на элементе h $(p > 1)$, если $\mathrm{Im}\, \Psi_p(h) = Z$ (т.е. оператор $\Psi_p(h)$ – сюръективен).

Определение 5. Отображение F называется *p*-регулярным в точке (x^*, μ^*), если оно *p*-регулярно на каждом элементе $h \in H_p(x^*, \mu^*) \backslash \{0\}$ или $H_p(x^*, \mu^*) = \{0\}$.

Обозначим через $\{\cdot\}^{-1}$ правый обратный оператор, т.е. $A^{-1} y = \{x \in X | Ax = y\}$ и $\| A^{-1} y \| = \inf\{\| x \| | Ax = y\}$. Очевидно, что оператор $\{\cdot\}^{-1}$ многозначный.

Определение 6. Пусть $F\colon X \times M \to Z = Z_1 \oplus \ldots \oplus Z_p$. Отображение $F(x, \mu)$ называется строго *p*-регулярным в точке x^*, μ^*, если существуют константы $\gamma > 0$ и $c > 0$ такие, что

$$\sup_{h \in H_\gamma} \| \{\Psi_p(h)\}^{-1} \| \le c < \infty,$$

где $H_\gamma = \{h = (h_x, h_\mu) \in X \times M\colon \| f_k^{(k)}(x^*, \mu^*)[h]^k \|_{Z_k} \le \gamma$, $k = 1, 2, \ldots, p$, $\|h\|_{X \times M} = 1\}$. Пусть $S = S(x^*, \mu^*) = \{(x, \mu) \in X \times M : F(x, \mu) = F(x^*, \mu^*) = 0\}$ – множество решений уравнения $F(x, \mu) = 0$ и $T_{(x^*, \mu^*)} S$ – касательный конус к множеству S в точке (x^*, μ^*), т.е.

$$T_{(x^*, \mu^*)} S = \{h \in X \times M : (x^*, \mu^*) + \varepsilon h + r(\varepsilon) \in S,$$
$$\| r(\varepsilon) \| = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [0, \delta], \quad \delta > 0\}.$$

Далее мы сформулируем несколько теорем, которые являются специальными версиями обобщения известной теоремы Люстерника и теорем о неявной функции на вырожденный случай, специфичных для наших результатов.

Теорема 1. *Пусть* $F(x, \mu) \in C^{p+1}(X \times M)$, $F : X \times M \to Z$, *где* M – *многомерное евклидово про-*

странство, X, Z — банаховы пространства. Пусть $F(x^*,\mu^*)=0$ *и* $\forall\bar{\mu}\in M$, $\|\bar{\mu}\|=1$, $(0,\bar{\mu})\in$ $\in\bigcap\limits_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*,\mu^*)$ *и F строго p-регулярно на M, т.е.*

$$\|\{f_1'(x^*,\mu^*)+f_2''(x^*,\mu^*)[0,\bar{\mu}]+\ldots \\ \ldots+f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[0,\bar{\mu}]^{p-1}\}^{-1}\|\le c. \qquad (10)$$

Тогда существует непрерывное отображение $x=x(\mu)$, $\mu\in V_\varepsilon(\mu^*)$, *где* $V_\varepsilon(\mu^*)$ *— окрестность точки* μ^*, $x(\mu)\in C\left(V_\varepsilon(\mu^*)\right)$, $\varepsilon>0$ *— достаточно малое, такое что*

$$F(x(\mu),\mu)=0,$$

$$x(\mu)=x^*+\omega(\mu),\quad \|\omega(\mu)\|=o(\|\mu-\mu^*\|), \qquad (11)$$

$$\|x(\mu)-x^*\|\le c\sum_{k=1}^{p}\|f_k(x^*,\mu^*)\|_{Z_k}^{1/k}\quad \forall\mu\in V_\varepsilon(\mu^*). \qquad (12)$$

Теорема 2 (о неявной функции в случае нетривиального ядра). *Пусть* $F(x,\mu)\in C^{p+1}(X\times M)$, $F\colon X\times M\to Z$, *где M — конечномерное евклидово пространство, X, Z — B-пространства. Предположим, что* $F(x^*,\mu^*)=0$ *и* $\forall\bar{\mu}\in M$, $\|\bar{\mu}\|=1$, $(0,\bar{\mu})\in$ $\in\bigcap\limits_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*,\mu^*)$:

$$\|\{f_1'(x^*,\mu^*)+f_2''(x^*,\mu^*)[0,\bar{\mu}]+\ldots \\ \ldots+f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[0,\bar{\mu}]^{p-1}\}_X^{-1}\|\le C. \qquad (13)$$

Тогда существует отображение $x=x(\mu)$, $\mu\in V_\varepsilon(\mu^*)$, $x(\mu)\in C\left(V_\varepsilon(\mu^*)\right)$, $\varepsilon>0$ *— достаточно малое, такое, что*

$$F(x(\mu),\mu)\equiv 0,$$

$$x(\mu)=x^*+\omega(\mu),\quad \|\omega(\mu)\|=o(\|\mu-\mu^*\|), \qquad (14)$$

$$\|x(\mu)-x^*\|\le c\sum_{k=1}^{p}\|f_k(x^*,\mu)\|_{Z_k}^{1/k}\quad \forall\mu\in V_\varepsilon(\mu^*). \qquad (15)$$

Теорема 3. *Пусть* $F(x,\mu)\in C^{p+1}(X\times M)$, $F\colon X\times M\to Z$, *где M — конечномерное евклидово пространство, X, Z — B-пространства. Пусть для* $h_\mu\ne 0$, $h_\mu\in V_\varepsilon(\mu)$ *существует* $\bar{h}_x\in X$, $\|\bar{h}_x\|\le c<\infty$ *такое, что F p-регулярно на* $\bar{h}=[\bar{h}_x,\bar{h}_\mu]$, *т.е.*

$$\|\{f_1'(x^*,\mu^*)+f_2''(x^*,\mu^*)\bar{h}+\ldots \\ \ldots+f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[\bar{h}]^{p-1}\}_X^{-1}\|\le C. \qquad (16)$$

$\bar{h}\in\bigcap\limits_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*,\mu^*)$, $\bar{h}_\mu=\dfrac{h_\mu}{\|h_\mu\|}$. *Тогда существует непрерывное отображение* $x=x(\mu)$, $\mu\in V_\varepsilon(\mu^*)$, $x(\mu)\in C(V_\varepsilon(\mu^*))$, $\varepsilon>0$ *— достаточно малое, такое, что*

$$F(x(\mu),\mu)=0,$$

$$\mu=\mu^*+h_\mu,\quad x(\mu)=x^*+c(\mu)\bar{h}_x+\omega(\mu), \\ \|\omega(\mu)\|=o(\|\mu\|),\quad c(\mu)=\|\mu\|, \qquad (17)$$

$$\|x(\mu)-x^*\|\le c\sum_{k=1}^{p}\|f_k(x^*+h_x,\mu)\|_{Z_k}^{1/k}. \qquad (18)$$

Возвращаясь к уравнению (2), нетрудно показать, что его можно заменой переменных преобразовать к виду

$$F(x,\mu)=F(x,\nu,\rho)=\ddot{x}+\left(1+\frac{\rho}{2\pi}-\frac{\nu}{2\pi}\right)(x+x^2)=0, \\ F\colon X\to C[0,2\pi], \\ X=\{C^2[0,2\pi]\times\mathbb{R}^2|x(0)=x(2\pi)=0\}. \qquad (19)$$

При этом отображение F будет 2-регулярным в точке $(0,0,0)$ на элементе $h=[0,h_\nu,h_\rho]$, $h_\nu\ne h_\rho$ (или $\nu\ne\rho$) и $h=[q\sin t,h_\nu,h_\rho]$ для $h_\nu=h_\rho$ (или $\nu=\rho$). Поэтому на основе вышесформулированных теорем мы можем дать основной результат.

Теорема 4. *Отображение* $F(x,\mu)$ *— 2-регулярно в точке* $(0,0,0)$, $\mu^*=0$ *на элементе* $\bar{h}=(\bar{h}_x,\bar{h}_\mu)$, *где* $\bar{h}_\mu=\dfrac{h_\mu}{\|h_\mu\|}$, $h_\mu=(\nu,\rho)$ *и* $\bar{h}_x(t,\mu)=\begin{cases} b\sin t,\ b\ne 0,\ \nu=\rho;\\ 0,\quad \nu\ne\rho.\end{cases}$

и для $\mu\in V_\varepsilon(\mu^*)$, $\varepsilon>0$ *достаточно малое, существует непрерывная функция* $x(t,\mu)$ *такая, что* $x(t,\mu)=$ $=c(\mu)\sin t+\omega(t,\mu)$, $x(0,\mu)=\nu$, $x(2\pi,\mu)=\rho$, *где*

$$c(\mu)=\begin{cases}\|\mu\|, & \nu=\rho;\\ o(\|\mu\|), & \nu\ne\rho.\end{cases}$$

В заключение сформулируем общую теорему о непрерывной зависимости решения краевой задачи от граничных условий. Итак, задачу (1) мы можем рассматривать в виде (3)

$$F(x,\mu)=F(x^{(k)},\ldots,x',x,\mu)=0,\quad F\colon X\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m,$$

$$X=\{C_m^k[a,b]\|x(a)=0,\quad x(b)=0\},$$

где $\mu\in V_\varepsilon(\mu^*)$ и $\varepsilon>0$ достаточно малое.

Теорема 5. *Пусть* $F(x,\mu)\in C^{p+1}(C_m^k[a,b]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m)$ *и для* $h_\mu\neq 0$, $h_\mu\in V_\varepsilon(0)$, $h_\mu=(\nu,\rho)$, *существует* $\bar h_x(t,\mu)\in X$, $\|\bar h_x(t,\mu)\|\le c<\infty$ *такое, что* $F(x,\mu)$ *p-регулярно в точке* (x^*,μ^*) *на векторе* $\bar h(\mu)=[\bar h_x(t,\mu),\bar h_\mu]$, *где* $\bar h(\mu)\in\bigcap_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}^k f_k^{(k)}(x^*,\mu^*)$.

Тогда существует непрерывное отображение $x=x(t,\mu)$, $\mu\in V_\varepsilon(\mu^*)$, $t\in[a,b]$, $x(t,\mu)\in C(V_\varepsilon(\mu^*))$, $\varepsilon>0$ *достаточно малое и такое, что*

$$F(x(t,\mu),\mu)=0,\quad x(a)=\nu,\quad x(b)=\rho, \tag{20}$$

$$x(t,\mu)=x^*+c(\mu)\bar h_x(t,\mu)+\omega(t,\mu), \tag{21}$$

где

$$O(\|\mu-\mu^*\|),\quad \omega(t,\mu)=o(\|\mu-\mu^*\|). \tag{22}$$

Заметим, что, вообще говоря, исходное уравнение (1) можно не преобразовывать к виду (3) и сформулировать результат в следующем виде.

Теорема 6. *Пусть* $P(x)\in C^{p+1}(X)$, $P\colon X\to C_m[a,b]$ *и* $F(x,\mu)=\begin{pmatrix}P(x)\\ \Phi(x,\mu)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P(x^{(k)},\dots,x)\\ G(x)-\mu\end{pmatrix}$, $F\colon X\times M\to Z$, *где* $X=C_m^k[a,b]$, $M=\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$, $Z=C_r[a,b]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$, *а* $G(x)$ *— оператор краевых условий, т.е.* $G(x)=\left(x(a),x(b)\right)^\top$. *Если* $\forall h_\mu=(\nu,\rho)\neq 0$, $\bar h_\mu=\dfrac{h_\mu}{\|h_\mu\|}$, *существует* $\bar h_x\in X$ *такой, что* $\bar h=[\bar h_x,\bar h_\mu]\in\bigcap_{k=1}^{p}\mathrm{Ker}^k F^{(k)}(x^*,\mu^*)$ *и*

$$\|\{f_1'(x^*,\mu^*)+f_2''(x^*,\mu^*)[\bar h]+\dots+f_p^{(p)}(x^*,\mu^*)[\bar h]^{p-1}\}^{-1}\|\le c, \tag{23}$$

то существует непрерывное отображение $x=x(\mu)$, $\mu\in V_\varepsilon(\mu^*)$, $x(\mu)\in C\left(V_\varepsilon(\mu^*)\right)$, $\varepsilon>0$ *достаточно малое и такое, что* $F(x(\mu),\mu)=0$ *и*

$$x(t,\mu)=x^*+c(\mu)\bar h_x(t,\mu)+\omega(t,\mu), \tag{24}$$

где $c(\mu)=O(\|\mu-\mu^*\|)$, $\|\omega(t,\mu)\|=o(\|\mu-\mu^*\|)$.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 17–07–00510).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* Факторанализ нелинейных отображений. М.: Наука, 1994.
2. *Измаилов А.Ф., Третьяков А.А.* 2-регулярные решения нелинейных задач. Теория и численные методы. М.: Наука, 1999.
3. *Tret'yakov A.A., Marsden J.E.* Factor-analysis of nonlinear mappings: *p*-regularity theory // Commun. Pure Appl. Anal. 2003. Т. 2. № 4. С. 425–445.
4. *Третьяков А.А.* Теорема о неявной функции в вырожденных задачах // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42. № 5 (257). С. 215–216.
5. *Медак Б., Третьяков А.А.* Теория *p*-регулярности. Анализ и приложения. М.: Физматлит, 2017.
6. *Michael E.* Continuous selections II //Annals of mathematics. 1956. С. 562–580.

ON THE CONTINUOUS DEPENDENCE OF THE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM ON BOUNDARY CONDITIONS. ELEMENTS OF *p*-REGULARITY THEORY

B. Medak[1], A. A. Tret'yakov[1,2,3]

[1] *Siedlce University, Siedlce, Poland*
[2] *Federal Research Center Computer Science and Control of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[3] *System Research Institite, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland*

Presented by Academicain of the RAS Yu. G. Evtushenko May 15, 2019

Received May 20, 2019

The problem of the existence of a continuous dependence of the solution of a boundary value problem on a parameter is considered. In this paper, it is proved that, in the presence of the *p*-regularity property, there exists a solution that continuously depends on a small parameter. The main result of the paper is based on theorems representing different versions of the implicit function theorem. In the case of degenerate mappings, the theorems are used to analyze a boundary value problem with a small parameter. In the case of absolute degeneration, a *p*-factor operator is found. The concept of the *p*-kernel of the operator is introduced, as well as the left and right inverse operators. Theorems are formulated that are special versions of the generalized Lyusternik theorem and the implicit function theorem in the degenerate case. An implicit function theorem is formulated and proved in the case of a nontrivial kernel.

Keywords: boundary value problems, *p*-regularity, dependence of a solution on a parameter, implicit function theorem, degenerate mappings, projection operator, closure of linear shell of quadratic form, completely degeneracy, *p*-kernel of operator *p*-factor operator, absolute degeneracy, right inverse operator.