ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 2, с. 130–132

МАТЕМАТИКА

УДК 515.122.5

К ВОПРОСУ ОБ УПЛОТНЕНИИ НА КОМПАКТЫ

А. В. Осипов[1,2,*], Е. Г. Пыткеев[1,2]

Представлено академиком РАН С.В. Матвеевым 06.05.2019 г.

Поступило 30.04.2019 г.

Доказывается (в предположении континуум-гипотезы CH) существование совершенно нормального компактного топологического пространства Z и счётного множества $E \subset Z$ таких, что $Z \setminus E$ не уплотняется на компакт. Существование такого пространства отвечает (в CH) отрицательно на вопрос В.И. Пономарёва: каждый ли совершенно нормальный компакт является α-пространством? Доказывается, что в классе упорядоченных компактов свойство быть α-пространством не является мультипликативным.

Ключевые слова: уплотнение, α-пространство, совершенно нормальный компакт.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524882130-132

Вопрос “Какие топологические пространства можно уплотнить на компакт?” принадлежит П.С. Александрову. Для метризуемых пространств этот вопрос поставил С. Банах [1].

Компактное топологическое пространство X называют α-пространством [2], если для всякого счётного $S \subseteq X$ подпространство $X \setminus S$ уплотняется (взаимно однозначно и непрерывно отображается) на компакт. Хорошо известно, что всякий метрический компакт является α-пространством [3]. В.И. Пономарёв предложил следующую задачу [4]: пусть X – совершенно нормальный компакт (компакт с первой аксиомой счётности), а D – его счётное подмножество. Можно ли подпространство $X \setminus D$ уплотнить на компакт?

В.И. Белугин получил положительный ответ в классе нульмерных компактов с первой аксиомой счётности [2] и, чуть позже, в классе упорядоченных компактных пространств [5]. В общем случае вопрос Пономарёва решается отрицательно. В работе [6] был построен компакт с первой аксиомой счётности, не являющийся α-пространством. Этот компакт не является совершенно нормальным, поэтому вопрос Пономарёва для класса совершенно нормальных компактов оставался открытым.

В этом сообщении (в предположении континуум-гипотезы CH) строится пример совершенного нормального компакта, который не является α-пространством. В построении примера (теорема 1) используются конструкции В.В. Федорчука [7] и работ [6, 8].

Обозначения: $\mathbb{K}$ – канторово совершенное множество, $\mathbb{I}$ – отрезок $[0,1]$, $\mathbb{J} = (0,1]$ – полуинтервал, ω_0 – первый бесконечный ординал, ω_1 – первый несчётный ординал, $[A]^{\omega}$ – множество всех бесконечных счётных подмножеств множества A, π_A и π_B – проекции множества $A \times B$ на множества A и B соответственно. Множество T сходится к точке t ($T \to t$), если всякая окрестность точки t содержит все точки T кроме конечного числа.

Теорема 1 (CH). *Существует совершенно нормальный компакт, не являющийся α-пространством.*

Схема доказательства. Пусть B – компактное расширение $\mathbb{I} \times \mathbb{N}$ с наростом, гомеоморфным $\mathbb{K}$. Далее считаем, что $B \setminus (\mathbb{I} \times \mathbb{N}) = \mathbb{K}$. Пусть $E = \{(0,n) \colon n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{I} \times \mathbb{N}$.

A) В силу CH, упорядочим следующие множества:

$$\mathbb{K} = \{t_\alpha \colon \omega_0 \le \alpha < \omega_1\};$$

$$\{P_\alpha \colon \alpha < \omega_1\} = \{P \subseteq \mathbb{K} \colon |P| = \aleph_0\};$$

$\{(S_\alpha, S'_\alpha), \alpha < \omega_1\} = \{(S, S') \colon S, S' \in [\mathbb{I} \times \mathbb{N}]^{\omega}$, $S \cap S' = \phi$, $\pi_{\mathbb{N}} \upharpoonright S$ взаимно однозначно и для любого $x \in S$ $|\{y \in S' \colon \pi_{\mathbb{N}}(x) = \pi_{\mathbb{N}}(y)\}| < \aleph_0\}$;

$\{(f_\alpha, \Phi_\alpha) \colon \alpha < \omega_1\} = \{(f, \Phi) \colon \Phi \in [\mathbb{I} \times \mathbb{N}]^{\omega}$, $\pi_{\mathbb{N}} \upharpoonright \Phi$ взаимно однозначно и $f \colon \Phi \to \mathbb{K}$ произвольное отображение$\}$;

$\{(\varphi_\alpha, Q_\alpha) \colon \alpha < \omega_1\} = \{(\varphi, Q) \colon Q \in [\mathbb{I} \times \mathbb{N}]^{\omega}$, $\pi_{\mathbb{N}} \upharpoonright Q$ взаимно однозначно и $\varphi \colon Q \to E$ произвольное конечно-кратное отображение при $Q \cap E = \phi\}$.

[1] *Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской Академии наук, Екатеринбург*

[2] *Уральский федеральный университет им. Б.Н. Ельцина, Екатеринбург*

* *E-mail: oab@list.ru*

Пусть $\beta \in [\omega_0, \omega_1)$. Положим $\mathcal{P}_\beta = \{\alpha < \beta\colon t_\beta \in \overline{P_\alpha} \setminus P_\alpha\}$, $\mathcal{N}_\beta = \{\alpha < \beta\colon t_\beta \in \overline{S_\alpha} \setminus S_\alpha\}$, $\mathcal{F}_\beta = \{\alpha < \beta\colon x_n \to t_\beta,\ x_n \in \Phi_\alpha \Rightarrow f_\alpha(x_n) \to t_\beta,$ $f_\alpha(x_n) \neq t_\beta\}$, $\mathcal{M}_\beta = \{\alpha < \beta\colon \alpha \notin \mathcal{F}_\beta,\ t_\beta \in \overline{\Phi_\alpha}\}$, $\mathcal{T}_\beta = \{\alpha < \beta\colon x_n \to t_\beta,\ x_n \in Q_\alpha \Rightarrow \varphi_\alpha(x_n) \to t_\beta\}$, $\mathcal{B}_\beta = \{\alpha < \beta\colon \alpha \notin \mathcal{T}_\beta,\ t_\beta \in \overline{Q_\alpha}\}$.

Построим множества $P_{\beta\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{P}_\beta$, $S_{\beta\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{N}_\beta$, $\Phi_{\beta\alpha}$, $\widetilde{\Phi}_{\beta\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{F}_\beta$, $M_{\beta\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{M}_\beta$, $Q_{\beta\alpha}$, $\tilde{Q}_{\beta\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{T}_\beta$, $B_{\beta\alpha}$, $\alpha \in \mathcal{B}_\beta$, такие, что:

1) все построенные множества бесконечны, счётны и попарно не пересекаются;

2) $P_{\beta\alpha} \subseteq P_\alpha \setminus \{t_\beta\}$, $S_{\beta\alpha} \subseteq S_\alpha$, $\Phi_{\beta\alpha} \subseteq \Phi_\alpha$, $\widetilde{\Phi}_{\beta\alpha} \subseteq K \setminus \{t_\beta\}$, $M_{\beta\alpha} \subseteq \Phi_\alpha$, $Q_{\beta\alpha} \subseteq Q_\alpha$, $\widetilde{Q}_{\beta\alpha} \subseteq E$, $B_{\beta\alpha} \subseteq Q_\alpha$;

3) $f_\alpha \restriction \Phi_{\beta\alpha}$ взаимно однозначно и $f_\alpha(\Phi_{\beta\alpha}) = \widetilde{\Phi}_{\beta\alpha}$, $\varphi_\alpha \restriction Q_{\beta\alpha}$ взаимно однозначно и $\varphi_\alpha(Q_{\beta\alpha}) = \widetilde{Q}_{\beta\alpha}$;

4) $t_\beta \notin \overline{f_\alpha(M_{\beta\alpha})}$, $t_\beta \in \overline{\varphi_\alpha(B_{\beta\alpha})}$;

5) если $T_\beta = \bigcup\limits_\alpha P_{\beta\alpha} \cup \bigcup\limits_\alpha S_{\beta\alpha} \cup \bigcup\limits_\alpha \Phi_{\beta\alpha} \cup \bigcup\limits_\alpha \widetilde{\Phi}_{\beta\alpha} \cup$ $\cup \bigcup\limits_\alpha M_{\beta\alpha} \cup \bigcup\limits_\alpha Q_{\beta\alpha} \cup \bigcup\limits_\alpha \widetilde{Q}_{\beta\alpha} \cup \bigcup\limits_\alpha B_{\beta\alpha}$, то $T_\beta \to t_\beta$.

Так как T_β дискретно в $B \setminus \{t_\beta\}$, построим непрерывное отображение $h_\beta : B \setminus \{t_\beta\} \mapsto \mathbb{I} \times \{\beta\}$ такое, что

6) $h_\beta \restriction P_{\beta\alpha}\colon P_{\beta\alpha} \to \mathbb{Q} \times \{\beta\}$ биекция;

7) $h_\beta(S_{\beta\alpha}) = 0$, $h_\beta(x, n) = 1$, если $(x,n) \in S'_\alpha$ и $n \in \pi_{\mathbb{N}} S_{\beta\alpha}$;

8) $h_\beta(Q_{\beta\alpha}) = 0$, $h_\beta(\widetilde{Q}_{\beta\alpha}) = 1$;

9) $h_\beta(\Phi_{\beta\alpha}) = 0$, $h_\beta(\widetilde{\Phi}_{\beta\alpha}) = 1$;

10) $h_\beta(M_{\beta\alpha}) = 0$;

11) $h_\beta(B_{\beta\alpha}) = 0$.

Воспользуемся методом построения примеров, предложенным В.В. Федорчуком в [7], а также конструкцией теоремы 7 в [8].

На множестве $\widetilde{B} = \{(x,\alpha)\colon x \in \mathbb{I},\ 1 \le \alpha < \omega_1\}$ определим топологию τ посредством базы окрестностей произвольной точки $z = (x,\alpha) \in \widetilde{B}$.

Пусть $\pi : \widetilde{B} \to B$ – отображение, определённое следующим образом:

$\pi((x,n)) = (x,n)$, $x \in \mathbb{I}$ и $n \in \mathbb{N}$, $\pi((x,\alpha)) = t_\alpha$, $x \in \mathbb{I}$ и $\omega_0 \le \alpha < \omega_1$.

Обозначим $O_\varepsilon(x) = \{y\colon |x - y| < \varepsilon,\ y \in \mathbb{I}\}$, $x \in \mathbb{I}$.

Если $z = (x,n)$, то $\widetilde{O}_\varepsilon(z) = O_\varepsilon(x) \times \{n\}$, $\varepsilon > 0$.

Если $z = (x,\alpha)$, $\omega_0 \le \alpha < \omega_1$, V – произвольная окрестность точки t_α в B, $\varepsilon > 0$, то $\widetilde{O}_\varepsilon(V,z) = (O_\varepsilon(x) \times$ $\times \alpha) \cup \pi^{-1}(h_\alpha^{-1}(O_\varepsilon(x) \times \{\alpha\}) \cap V)$. Тогда $\widetilde{B}$ – компакт с первой аксиомой счётности и отображение $\pi\colon \widetilde{B} \to B$ непрерывно [7].

Для доказательства совершенной нормальности компактного пространства $(\widetilde{B},\tau)$ достаточно доказать, что компакт $\widetilde{K} = \pi^{-1}(K)$ совершенно нормален.

Докажем, что $Z = \widetilde{B} \setminus E$ не уплотняется на компакт. Предположим противное. Пусть τ – исходная топология на Z, $\tau_1 \le \tau$, и (Z, τ_1) – компакт. Положим $T_n = \bigcap\{\overline{(0, \frac{1}{m}) \times \{n\}}^{\tau_1}\colon m \in \mathbb{N}\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда T_n – связный компакт как пересечение убывающей последовательности связных компактов и $\overline{\mathbb{J} \times \{n\}}^{\tau_1} = (\mathbb{J} \times \{n\}) \cup T_n$.

Б) $T_n \not\supseteq (0, \varepsilon) \times \{n\}$ для любого $\varepsilon > 0$.

Пусть $N_1 = \{n \in \mathbb{N}\colon T_n \cap (\mathbb{J} \times \{n\}) \neq \phi\}$,

$E_1 = = \{(0,n)\colon n \in N_1\} \subseteq B$.

В) $|\overline{E_1}^B \cap K| \le \aleph_0$.

Пусть $N_2 = \{n \in \mathbb{N}\colon T_n \cap \widetilde{K} \neq \phi\}$,

$E_2 = = \{(0,n)\colon n \in N_2\} \subseteq B$.

Г) $|\overline{E_2}^B \cap K| \le \aleph_0$.

Пусть $N_3 = \{n \in \mathbb{N}\colon T_n \cap (\mathbb{J} \times \{n\}) = \phi$, $T_n \subseteq \bigcup\{\mathbb{J} \times \{m\}\colon m \in D(n)\}$, где $D(n)$ конечно и для всякого $m \in D(n)$ выполняется $T_n \cap (\mathbb{J} \times \{m\}) = \phi$. Положим $N_4 = \bigcup\{D(n)\colon n \in N_3\}$ и

$E_4 = \{(0,n)\colon n \in N_4\} \subseteq B$.

Д) $|\overline{E_4}^B \cap K| \le \aleph_0$.

Условия А)–Д) достаточны, чтобы доказать свойства, аналогичные (6)–(10) в [6], и получить противоречие с тем, что (Z, τ_1) – компакт.

Вопрос. Существует ли в *ZFC* пример совершенно нормального компактного пространства, не являющегося α-пространством?

В.И. Белугин доказал [5], что упорядоченный компакт является α-пространством. Заметим, что в классе упорядоченных пространств свойство быть α-пространством не является мультипликативным.

Теорема 2. *Существует упорядоченный компакт, квадрат которого не является α-пространством.*

В доказательстве используются результаты работ [9–12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Banach S.* Problem 26 // Colloq. Math. 1948. V. 1. P. 150.
2. *Белугин В.И.* Уплотнение на бикомпакты // Докл. Болгарской АН. 1975. Т. 28. № 11. С. 1447–1449.
3. *Раухваргер И.Л.* Об уплотнениях в компакты // ДАН СССР. 1949. Т. 66. № 13. С. 13–15.
4. *Пономарев В.И.* О проблематике в теории топологических пространств. III Тираспольский симпозиум по общей топологии и её приложениям. Кишинев: Штиинца, 1973. С. 100–102.
5. *Белугин В.И.* Уплотнение на бикомпакты подпространств упорядоченных бикомпактов. Сб. трудов “Топология и теория множеств”. Ижевск, 1982. С. 3–8.
6. *Пыткеев Е.Г.* Об уплотнениях на бикомпакты // ДАН СССР. 1982. Т. 265. № 4. С. 819–823.
7. *Федорчук В.В.* О бикомпактах с несовпадающими размерностями // ДАН СССР. 1968. Т. 1182. № 2. С. 275–277.
8. *Пыткеев Е.Г.* О наследственно перистых пространствах // Матем. заметки. 1980. Т. 28. № 4. С. 603–618.
9. *Александров П.С., Урысон П.С.* Мемуар о компактных топологических пространствах. М.: Наука, 1971.
10. *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах. М.: Наука, 1974.
11. *Белугин В.И.* Уплотнения топологических пространств. Канд. дис. Свердловск, 1975.
12. *Пыткеев Е.Г.* К теории уплотнений на компакты // ДАН СССР. 1977. Т. 233. № 6. С. 1046–1048.

ON THE PROBLEM OF CONDENSATION ONTO COMPACTA

A. V. Osipov[1,2], E. G. Pytkeev[1,2]

[1] N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation

[2] Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation

The paper proves (assuming the continuum hypothesis CH) that there exists a perfectly normal compact topological space Z and a countable set $E \subset Z$, such that $Z \setminus E$ is not condensed onto a compact. The existence of such a space answers (in CH) negatively to the question of V.I. Ponomareva: Is every perfectly normal compact an α-space? It is proved that in the class of ordered compacts the property of being an α-space is not multiplicative.

Keywords: condense, α-space, perfectly normal compact.