ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 2, с. 133–136

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА СЛАБО КОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ВОДНЫХ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

Член-корреспондент РАН П. И. Плотников, М. В. Турбин*, А. С. Устюжанинова

Поступило 22.05.2019 г.

В работе доказывается теорема существования слабого решения задачи оптимального управления с обратной связью для модифицированной модели Кельвина–Фойгта слабо концентрированных водных растворов полимеров. Доказательство проводится на основе аппроксимационно-топологического подхода. На первом шаге рассматриваемая задача управления с обратной связью интерпретируется в виде операторного включения с многозначной правой частью. На втором шаге полученное включение аппроксимируется операторным включением, обладающим более хорошими свойствами. Затем на основе априорных оценок решений и теории степени одного класса многозначных отображений доказывается существование решений этого включения. На третьем шаге показывается, что из последовательности решений аппроксимационного включения можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению исходного включения. После чего показано, что среди решений рассматриваемой задачи существует решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

Ключевые слова: задача оптимального управления с обратной связью, модифицированная модель Кельвина–Фойгта, слабое решение, теорема существования, многозначное отображение, аппроксимационно-топологический подход.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524882133-136

1. При исследовании различных аспектов теории управляемых систем классическое понятие обратной связи в литературе всё чаще используется в расширенном смысле, а именно, отображение обратной связи понимается многозначным, ставящим в соответствие состоянию системы целое множество допустимых значений. При этом это множество может определяться как в каждый момент времени функционирования системы, так и на всём временном промежутке. Такой подход используется, например, в монографиях [1–3] и целом ряде работ. В работах В.Г. Звягина, М.В. Турбина, А.В. Звягина данный подход был применен к задачам оптимального управления движением различных моделей неньютоновской жидкости. А именно, в работах [4, 5] были рассмотрены задачи, когда внешняя сила, которая и является управлением, зависит от скорости движения жидкости. Это позволяет более точно выбирать управление, поскольку в данном случае управление не выбирается из конечного набора имеющихся управлений, а принадлежит образу некоторого многозначного отображения. Решением поставленной задачи управления движением жидкости является пара: скорость движения жидкости и управление (плотность внешних сил). В связи с тем, что таких пар может быть много, естественным образом возникает понятие оптимального решения — решения, дающего минимум заданному функционалу качества.

Для решения данной задачи (мы будем говорить о слабых решениях) на основе аппроксимационно-топологического метода исследования задач гидродинамики сначала переходят к операторной трактовке рассматриваемой задачи (операторному включению) в подходящих функциональных пространствах. Далее в связи с тем, что операторы в полученном операторном включении не обладают необходимыми свойствами, рассматривается задача, аппроксимирующая исходную (это тоже операторное включение, но с операторами, обладающими необходимыми свойствами, и в “хороших” функциональных пространствах). После чего на основе априорных оценок решений и теории степени многозначных векторных полей с компактными выпуклыми значениями доказывается существование решения аппроксимационной задачи. И, наконец, показывается, что из последовательности решений аппроксимационной задачи можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в слабом смысле к решению исходного операторного включения. После доказательства разрешимости задачи управления движением жидкости можно доказать, что в множестве решений найдётся хотя бы одно реше-

Воронежский государственный университет

** E-mail: mrmike@mail.ru*

ние, дающее минимум заданному функционалу качества (именно поэтому иногда данный вид задач называют задачами оптимального управления движением жидкости с обратной связью).

В данной работе доказывается существование оптимального управления задачи с обратной связью для модифицированной модели Кельвина–Фойгта слабо концентрированных водных растворов полимеров в двумерном и трёхмерном случаях.

2. В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n (n = 2, 3)$ с границей $\partial\Omega$ класса C^3 на промежутке времени $[0; T]$, $0 < T < \infty$, рассматривается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \kappa \frac{\partial \Delta v}{\partial t} - \kappa \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial \Delta v}{\partial x_k} + \nabla p = f; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (2)$$

Здесь ν и κ – положительные константы, ν – это вязкость жидкости, а κ – время запаздывания.

Система уравнений (1), (2) была получена экспериментальным путём в работах [6–8] при исследовании растворов полиэтиленоксида, полиакриламида и гуаровой смолы. В работах А.П. Осколкова [9, 10] различные упрощения данной модели получили название моделей Кельвина–Фойгта (а также модели слабо концентрированных водных растворов полимеров).

В нашей работе исследуется исходная система уравнений из статьи В.А. Павловского [6], поэтому, чтобы не вносить сумятицу в уже сложившуюся систему названий и показать связь с исследованными ранее упрощениями данной системы, мы назовём данную модель – моделью Кельвина–Фойгта слабо концентрированных водных растворов полимеров.

Отметим, что в работе [5] уже была исследована модель, связанная с рассматриваемой, но результаты этого сообщения не следуют из неё и являются «более сильными».

Для системы (1), (2) рассмотрим начально-краевую задачу с начальным и граничным условиями

$$v(x,0) = a(x), \quad x \in \Omega, \quad v|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0. \quad (3)$$

Как уже было сказано, мы предполагаем, что внешние силы (управление) принадлежит образу некоторого многозначного отображения, которое зависит от скорости движения жидкости:

$$f \in \Psi(v). \quad (4)$$

Чтобы дать понятие слабого решения, введём необходимые обозначения. Пусть $C_0^\infty(\Omega)^n$ – пространство C^∞ функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ и с компактным носителем, содержащимся в Ω. $\mathcal{V} = \{v \in C_0^\infty(\Omega)^n \colon \operatorname{div} v = 0\}$. Через V^0 и V^1 обозначим пополнение $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)^n$ или $H^1(\Omega)^n$ соответственно. $V^2 = H^2(\Omega)^n \cap V^1$.

Пусть $\pi\colon L_2(\Omega)^n \to V^0$ – проектор Лере. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{V}$ оператор $A = -\pi\Delta$, который продолжается в V^0 до замкнутого самосопряженного положительного оператора с вполне непрерывным обратным (см., например, [11, 12]). Область определения A совпадает с V^2. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении вполне непрерывных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Отметим, что если граница области Ω принадлежит классу C^∞, то $\{e_j\}$ – собственные функции оператора A будут бесконечно дифференцируемыми.

Обозначим через $E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j : v_j \in \mathbb{R} \right\}$, $N \in \mathbb{Z}$, множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство V^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме $\|v\|_{V^\alpha} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\alpha |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

В [13, 14] показано, что указанные нормы в пространствах V^1, V^2, V^3 эквивалентны следующим нормам:

$$\|v\|_{V^1} = \left\|A^{1/2} v\right\|_{V^0}; \quad \|v\|_{V^2} = \|Av\|_{V^0}; \quad \|v\|_{V^3} = \left\|A^{3/2} v\right\|_{V^0}.$$

Также введём ещё одно пространство:

$$W = \left\{ u\colon u \in L_\infty(0,T; V^2),\ u' \in L_2(0,T; V^1) \right\},$$

с нормой $\|u\|_W = \|u\|_{L_\infty}(0,T;V^2) + \|u'\|_{L_2}(0,T;V^1)$.

Рассмотрим в качестве функции управления многозначное отображение $\Psi\colon W \multimap L_2(0,T;V^0)$. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) Отображение Ψ определено на пространстве W и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;

(Ψ2) Отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно;

(Ψ3) Отображение Ψ глобально ограничено, т.е. существует константа $M > 0$ такая, что для всех $v \in W$:

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T;V^0)} := \sup\left\{\|u\|_{L_2(0,T;V^0)} : u \in \Psi(v)\right\} \le M;$$

(Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле:

если $\{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W$, $v_l \rightharpoonup v_0$,
$u_l \in \Psi(v_l)$ и $u_l \to u_0$ в $L_2(0,T;V^0)$, тогда $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Будем предполагать, что начальное условие a принадлежит пространству V^2. Дадим определение слабого решения рассматриваемой задачи.

Определение 1. Пара функций $(v,f) \in W \times \times L_2(0,T;\, V^0)$ называется **слабым решением задачи управления с обратной связью** (1)–(4), если она удовлетворяет начальному условию

$$v(0) = a, \qquad (5)$$

условию обратной связи

$$f \in \Psi(v)$$

и равенству

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi dx + \nu\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi dx - \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + $$
$$+ \kappa\int_\Omega \nabla\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) : \nabla\varphi dx + \kappa\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega v_i \Delta v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f\varphi dx \quad (6)$$

для любого $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0,T)$.

Здесь : обозначает покомпонентное произведение матриц, т.е. $C : D = \sum_{i,j=1}^{m} c_{ij}d_{ij}$ для $C = (c_{ij})_{i,j=1}^{m}$, $D = (d_{ij})_{i,j=1}^{m}$.

Правомочность начального условия следует из того, что $u' \in L_2(0,T;V^1)$ (следовательно, любая функция $u \in W$ принадлежит пространству $C([0,T],V^1)$).

Первым результатом данной работы является нижеследующая

Теорема 1. *Пусть отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4). *Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи* (1)–(4).

Обозначим через $\Sigma \subset W \times L_2(0,T;V^0)$ множество всех слабых решений задачи (1)–(4). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Φ1) Существует число γ такое, что $\Phi(v,f) \ge \gamma$ для всех $(v,f) \in \Sigma$.

(Φ2) Если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W и $f_m \to f_*$ в $L_2(0,T;V^0)$, то

$$\Phi(v_*, f_*) \le \varliminf_{m\to\infty} \Phi(v_m, f_m).$$

Вторым результатом данной работы является следующая

Теорема 2. *Если отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4), *а функционал* Φ *удовлетворяет условиям* (Φ1), (Φ2), *тогда задача* (1)–(4) *имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*, f_*) *такое, что*

$$\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v,f)\in\Sigma} \Phi(v,f). \qquad (7)$$

Источники финансирования. Работа первых двух авторов (теорема 1 о существовании слабого решения задачи оптимального управления с обратной связью) выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект 14.Z50.31.0037). Работа третьего автора (теорема 2 о существовании решения, дающего минимум заданному функционалу качества) выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 19–11–00146).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aubin J.-P., Cellina A.* Differential Inclusions. B.: Springer-Verlag, 1984. doi: 10.1007/978-3-642-69512-4
2. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach Spaces. B.; N.Y.: de Gruyter, 2001.
3. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д. и др.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. 2-е изд., испр. и доп. М.: ЛИБРОКОМ, 2011.
4. *Звягин В.Г., Звягин А.В., Турбин М.В.* Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2018. Т. 477. С. 54–86.
5. *Zvyagin V.G., Turbin M.V.* Optimal Feedback Control in the Mathematical Model of Low Concentrated Aqueous Polymer Solutions // J. Optimization Theory and Applications. 2011. V. 148. № 1. P. 146-163. doi: 10.1007/s10957-010-9749-3
6. *Павловский В.А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров // ДАН СССР. 1971. Т. 200. № 4. С. 809–812.
7. *Амфилохиев В.Б., Войткунский Я.И., Мазаева Н.П. и др.* Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Тр. Ленинград. кораблестроительного института. 1975. Т. 96. С. 3–9.

8. *Амфилохиев В.Б., Павловский В.А.* Экспериментальные данные о ламинарно-турбулентном переходе при течении полимерных растворов в трубах// Тр. Ленинград. кораблестроительного института. 1976. Т. 104. С. 3–5.
9. *Осколков А.П.* К теории нестационарных течений жидкостей Кельвина–Фойгта // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 115. С. 191–202.
10. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. МИАН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
11. *Солонников В.А.* Об оценках тензоров Грина для некоторых краевых задач // ДАН СССР. 1960. Т. 130. № 5. С. 988–991.
12. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости // Математический сборник. 1961. Т. 43. № 4. С. 393–428.
13. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
14. *Звягин В.Г., Турбин М.В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. М.: КРАСАНД (URSS), 2012.

THE EXISTENCE THEOREM FOR WEAK SOLUTION OF OPTIMAL FEEDBACK CONTROL PROBLEM FOR THE MODIFIED KELVIN–VOIGT MODEL OF WEAKLY CONCENTRATED AQUEOUS POLYMER SOLUTIONS

Corresponding Member of the RAS P. I. Plotnikov, M. V. Turbin, A. S. Ustiuzhaninova

Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

Received May 22, 2019

In this paper the existence theorem on weak solution of the optimal feedback control problem for the modified Kelvin–Voigt model of weakly concentrated aqueous polymer solutions. The proof is carried out on the basis of an approximation-topological approach to the study of fluid dynamic problems. At the first step, the considered feedback control problem is interpreted as an operator inclusion with a multi-valued right-hand side. In the second step, the resulting inclusion is approximated by an operator inclusion with better properties. Then, on the basis of a priori estimates of solutions and the degree theory of a class of multi-valued mappings, the existence of solutions for this inclusion is proved. In the third step, it is shown that from the sequence of solutions of the approximation inclusion one can extract a subsequence that converges weakly to the solution of the original inclusion. Then it is proved that among the solutions of the considered problem there is a solution that gives a minimum to a given quality functional.

Keywords: optimal feedback control problem, modified Kelvin–Voigt model, weak solution, existence theorem, multivalued map, approximation-topological approach.