ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 2, с. 137–141

ФИЗИКА

УДК 534.113

ВЛИЯНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ЭФФЕКТОВ НА ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ НАНОПРОВОЛОК

Член-корреспондент РАН М. А. Ильгамов

Поступило 04.06.2019 г.

Рассмотрен статический изгиб и продольная устойчивость нанопроволок, находящихся под давлением жидкости или газа. Учитываются два поверхностных эффекта. Первый обусловлен различием упругих свойств в тонком приповерхностном слое и в основном объёме материала. Эффективные жёсткости на растяжение и изгиб могут быть больше или меньше, чем обычные жёсткости, в зависимости от материала. Второй эффект обусловлен взаимодействием избыточного давления на круговую боковую поверхность проволоки и разности площадей выпуклой и вогнутой сторон поверхности, появляющейся при изгибе. Этот эффект проявляется тем сильнее, чем больше отношение давления к модулю упругости материала и длины проволоки к её диаметру. Эти эффекты определяются безразмерными параметрами. Установлено, что может происходить потеря устойчивости проволоки под действием второго эффекта. Предложен возможный способ определения безразмерного параметра, определяющего различия упругих свойств в тонком слое около поверхности и основного материала.

Ключевые слова: нанопроволока, изгиб, устойчивость, поверхностные эффекты.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524882137-141

1. Нанопроволоки находят применение в электронных, оптоэлектронных и электромеханических устройствах в качестве различных сенсоров и т.д. [1, 2]. Изучение их эксплуатационных свойств, в частности изгиба под действием приложенных сил, спектра частот, устойчивости формы, представляет большой интерес.

Как показано экспериментально и теоретически в работах [3, 4], а также в последующих исследованиях, при диаметрах проволоки порядка 10 мкм и меньше проявляется поверхностный эффект, связанный с различием упругих характеристик в приповерхностном слое и в основном объёме тела. Статический изгиб проволоки, устойчивость её формы, свободные колебания с учётом указанного эффекта рассмотрены в [5–7]. Согласно этим работам, продольная сила N, изгибающий момент M проволоки круглого поперечного сечения диаметром d выражаются через деформацию ε осевой линии и её кривизну κ формулами

$$N = K_*\varepsilon,\quad M = D_*\kappa,\quad K_* = K(1+\beta),\quad D_* = D(1+2\beta),$$

$$K = EF,\quad D = \frac{EFd^2}{16},\quad F = \frac{\pi d^2}{4},\quad \beta = \frac{4E_s}{Ed}, \qquad (1)$$

где E – модуль упругости основного объёма проволоки, определяемый в классической теории упругости, параметр E_s относится к поверхностному слою, K_*, D_* – эффективные жёсткости при растяжении и изгибе. Размерность модуля E в МПа, а E_s – в МПа·м. Толщина приповерхностного слоя в этой модели не вводится в рассмотрение. Она неявно входит в E_s, поэтому размерность E_s отличается от размерности E.

Второй поверхностный эффект связан с образующейся разностью площадей выпуклой и вогнутой частей боковой поверхности проволоки в результате её изгиба. Эта разность площадей приводит к появлению распределённой поперечной силы [8, 9]

$$q = pF\kappa, \qquad (2)$$

где p – равномерное давление на боковую поверхность проволоки.

В настоящей работе одновременно учитываются указанные поверхностные эффекты при статическом изгибе и продольной устойчивости нанопроволок, находящихся под давлением жидкости или газа.

2. Условия закрепления проволоки длиной L относительно продольного перемещения $u(x,t)$ и прогиба $w(x,t)$ принимаем в виде

$$u = 0,\quad w = 0,\quad w_{xx} = 0 \quad (x = 0, L). \qquad (3)$$

Индексы x, t обозначают производные по координате и времени.

На круговую поверхность проволоки действует равномерное давление $p_0 + p$. Для определённости

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской Академии наук, Москва

Башкирский государственный университет, Уфа

Институт механики Уфимского федерального исследовательского центра Российской Академии наук, Уфа

E-mail: ilgamov@anrb.ru

под p_0 будем подразумевать атмосферное давление, которое действует также на поверхности концевых сечений $x = 0, L$ проволоки. Это её состояние с компонентами перемещения u_0, w_0 под всесторонним равномерным давлением p_0 считаем ненапряжённым. Избыточное давление p на концевые сечения не действует. Таким случаем может быть, например, защемление проволоки на опорах. Могут быть устройства опор, где действие p на концевые сечения не передаётся в область $0 \le x \le L$. Такая схема реализуется при условиях (3). При этих допущениях распределённая поперечная сила на проволоку определяется выражением (2), где необходимо положить $\kappa = (w_0 + w)_{xx}$ при наличии начального прогиба w_0. Положительное направление поперечной силы q и перемещения w принято вниз.

В уравнении изгиба проволоки

$$M_{xx} - N(w_0 + w)_{xx} = q\,, \tag{4}$$

под M и N будем подразумевать эффективные изгибающий момент и продольную силу по (1). Таким образом, коэффициентами D_*, K_* учитывается первый поверхностный эффект, а распределённой поперечной силой q определяется второй поверхностный эффект.

Продольная сила N образуется в результате изгиба и радиального сжатия проволоки под действием избыточного давления p. Выражение для силы N в (1) получено в предположении малости радиального и окружного напряжений по сравнению с осевым напряжением ($\sigma_r \ll \sigma$, $\sigma_\theta \ll \sigma$), принимаемом в теории тонких стержней. Ввиду того, что в данной работе допускаются немалые значения давления p, необходимо оценить влияние этих напряжений на силу N. В приближённом анализе закон Гука представим с применением эффективной жёсткости K_* в виде

$$N = K_*(\varepsilon + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta))\,. \tag{5}$$

Здесь деформации ε_ρ и ε_θ необходимо выразить через осевую деформацию ε. Учитывая, что влияние ε_ρ и ε_θ на продольную силу N носит лишь поправочный характер, приближённые выражения $\varepsilon_\rho(\varepsilon, p)$, $\varepsilon_\theta(\varepsilon, p)$ определяем без учёта первого поверхностного эффекта. В соотношениях

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_\theta + \varepsilon)\right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_\theta + \nu(\varepsilon + \varepsilon_r)\right)$$

учитываем, что $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$. Тогда

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = -\frac{\nu}{1+\nu}\varepsilon - \frac{p(1-\nu)}{E}\,.$$

При этом выражение (5) приобретает вид

$$N \approx K_*\left(\nu_1\varepsilon - \frac{\nu_0 p}{E}\right), \quad \nu_1 = \frac{1+\nu-2\nu^2}{1+\nu}, \quad \nu_0 = 2\nu(1-\nu)\,. \tag{6}$$

Подстановка в (6) связи ε с компонентами перемещения $2\varepsilon = 2u_x + w_x^2$ и интегрирование по x от нуля до L, а также учёт первых граничных условий (3) дают

$$N \approx K_*\left(\frac{\nu_1}{2L}\int_0^L w_x^2 dx - \frac{\nu_0 p}{E}\right). \tag{7}$$

Из (7) видно, что отклонение оси от прямой линии приводит к растягивающей силе, а внешнее давление $p > 0$ – к сжимающей силе, причём последняя зависит от отношения pE^{-1} и коэффициента Пуассона материала.

Подстановка в (4) выражений для M, N, q в соответствии с (1), (2), (7) приводит к уравнению

$$w_{\xi\xi\xi\xi} - \left(\alpha + \gamma\int_0^\pi w_\xi^2 d\xi\right)(w_0 + w)_{\xi\xi} = 0, \quad \xi = \frac{\pi x}{L},$$

$$\alpha = \frac{p}{E}\left(\frac{4L}{\pi d}\right)^2 \frac{(1 - \nu_0(1+\beta))}{(1+2\beta)}, \quad \gamma = \frac{8\nu_1(1+\beta)}{\pi d^2(1+2\beta)}. \tag{8}$$

Здесь безразмерными параметрами α и γ определяется влияние на изгиб обоих рассматриваемых поверхностных эффектов. Если они не учитываются, то $\alpha = 0$, $\pi\gamma = 8d^{-2}$.

Если одна из опор допускает свободное скольжение вдоль оси, то вместо условия $u(0, L) = 0$ в (3) нужно положить равной нулю продольную силу N. Тогда в рамках рассматриваемой модели уравнение (4) не будет содержать второй член, так как будет $N = 0$ по всей длине L. В уравнении (8) нужно положить равными нулю $\nu_0(1 + \beta)$ в составе α и член, содержащий интеграл. Величина $\nu_0(1 + \beta)$ входит в (8) ввиду учёта в (5) деформаций ε_r, ε_θ. В случае действия давления p на площадь одной из концевых сечений со скользящей опорой возникает дополнительная продольная сила сжатия $N = -pF$. При этом в (8) нужно исключить нелинейный член и $\nu_0(1 + \beta)$.

3. Влияние указанных поверхностных эффектов наиболее наглядно может быть показано для статического изгиба, при котором функции w_0 и w, удовлетворяющие условиям (3), могут быть приняты $w_0 = W_0 \sin\xi$, $w = W \sin\xi$.

Подставив эти функции в уравнение (8), умножив его на $\sin\xi$ и проинтегрировав в пределах от 0 до π, получаем

$$2W + (2\alpha + \pi\gamma W^2)(W + W_0) = 0. \qquad (9)$$

Сначала рассмотрим малые значения амплитуды дополнительного прогиба W. Опустив в (9) нелинейный член в скобках, имеем

$$W = -\frac{\alpha W_0}{1+\alpha}, \quad W_0 + W = \frac{W_0}{1+\alpha}. \qquad (10)$$

Из (8) и (10) следует, что при $\alpha \ll 1$ нет дополнительного изгиба проволоки. С увеличением бокового избыточного давления p амплитуда суммарного прогиба уменьшается. При $\alpha \gg 1$ суммарный прогиб стремится к нулю ($W \to -W_0$). Имеет место выпрямление первоначально изогнутой проволоки как влияние второго поверхностного эффекта. При заданных значениях E, ν, Ld^{-1}, $p > 0$ увеличение параметра $\beta > 0$ уменьшает изгиб проволоки. Если при размерах проволоки $Ld^{-1} > 10$ амплитуда начального прогиба меньше диаметра проволоки ($W_0 < d$), то (10) представляет приближённое решение и без нелинейных членов в уравнении (9). При $|W| < W_0$ уточнение линейного решения (10) получаем из приближённого уравнения

$$W^2 + \frac{2(1+\alpha)}{\pi\gamma W_0}W + \frac{2\alpha}{\pi\gamma} = 0.$$

Сохраняя два члена разложения подкоренного выражения в его решении, имеем вместо (10)

$$W = -\frac{\alpha W_0}{1+\alpha}\left(1 + \frac{\pi\alpha\gamma W_0^2}{4(1+\alpha)^2}\right). \qquad (11)$$

В случае медной проволоки (Cu) $E = 0{,}62 \cdot 10^5$ МПа, $E_s = 0{,}84 \cdot 10^{-5}$ МПа · м [5–7]. Примем $\nu = 0{,}3$, $d = 10^2$ нм $= 10^{-7}$ м, $Ld^{-1} = 10$, $p = 5$ МПа. Тогда согласно определениям (1) и (8) $b = 0{,}0054$, $\alpha = 0{,}013$. Из (10) следует, что не происходит изгиба ($W \approx -0{,}013W_0$). Оба поверхностных эффекта пренебрежимо малы. Но если $d = 10$ нм, $Ld^{-1} = 50$, то $\beta = 0{,}054$, $\alpha = 0{,}325$. Проявляются оба поверхностных эффекта, но сильнее – второй из них, связанный с избыточным давлением p на проволоку. Амплитуда дополнительного прогиба $W = -0{,}245W_0$. Происходит некоторое выпрямление изогнутой проволоки.

В случае проволоки из алюминия (Al) в отличие от Cu параметр E_s является отрицательным [5–7]: $E = 0{,}72 \cdot 10^5$ МПа, $E_s = -1{,}24 \cdot 10^{-5}$ МПа · м. При всех других данных, что выше, значения β и α мало отличаются от приведённых. При $d = 10$ нм, $Ld^{-1} = 50$ имеется большее влияние эффектов ($\beta = -0{,}066$, $\alpha = 0{,}373$). Резкое увеличение абсолютного значения параметра β происходит при $d < 10$ нм, что объясняется увеличением ($\beta > 0$) или уменьшением ($\beta < 0$) эффективной жёсткости проволоки.

4. Как видно из (10), (11), при вакуумировании поверхности нанопроволоки ($p < 0$, $\alpha < 0$) происходит смена знака W, поэтому полный прогиб возрастает. В отличие от рассмотренного выше случая $p > 0$, $\alpha > 0$ изгиб происходит в сторону начального прогиба. Чем сильнее вакуумирование, тем больше изгиб. При $\alpha = -1$ имеется неограниченное возрастание решения. Это значение параметра α_{cr} можно считать критическим. В соответствии с (8) критическое избыточное давление на поверхность проволоки равно

$$p_{cr} = -E\left(\frac{\pi d}{4L}\right)^2 \frac{(1+2\beta)}{(1-\nu_0(1+\beta))}. \qquad (12)$$

С учётом площади поперечного сечения F выражение (12) может быть представлено в виде

$$p_{cr} = -\frac{P_E^*}{F}, \quad P_E^* = \frac{P_E(1+2\beta)}{1-\nu_0(1+\beta)}, \quad P_E = D\left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \qquad (13)$$

где P_E – эйлерово значение продольной сжимающей силы для стержня с условиями $w = w_{\xi\xi} = 0$ ($\xi = 0, \pi$) без учёта первого поверхностного эффекта, P_E^* – то же самое, определённое с учётом этого эффекта. Как было принято в постановке задачи, всестороннему атмосферному давлению p_0 соответствует ненапряжённое состояние проволоки. Ввиду этого при $p > 0$ возникает сжимающая продольная сила (за счёт $\nu_0(1+\beta)$), а при вакуумировании ($p < 0$) – растягивающая продольная сила. Если одна из опор допускает свободное осевое перемещение проволоки, то член $\nu_0(1+\beta)$ в (12), (13) исключается. В этом случае и при данных для Al, а также $d = 4$ нм, $Ld^{-1} = 500$, из (12) следует $p_{cr} = -0{,}073$ МПа.

В случае $W_0 = 0$ изгиб после потери устойчивости происходит, если уровень вакуумирования превышает критическое давление ($p < p_{cr}$, $\alpha < -1$). Решение уравнения (9) имеет вид $W = \pm\sqrt{-2(1+\alpha)(\pi\gamma)^{-1}}$, где знаки перед корнем указывают на равную возможность отклоняться в разные стороны. С учётом обозначений α, γ, p_{cr} по (8), (12) можно записать решение в виде

$$\frac{\pi W}{2L} = \pm\sqrt{-\frac{(p - p_{cr})(1-\nu_0(1+\beta))}{E(1+\beta)}} \quad (p < p_{cr}). \qquad (14)$$

Здесь избыточное давление должно быть $p > -0{,}1$ МПа (в общем случае $p > -p_0$). Послекритическое выпучивание тем сильнее, чем больше отношения $-pE^{-1}$, Ld^{-1}, а также в случае материала с отрицательным значением β (например, Al).

Определение численных значений параметра β или E_s для проволок из разных материалов представляет очевидные сложности. Одним из способов их определения могут быть экспериментальные значения стрелы начального и полного прогибов (W_0) и ($W_0 + W$) в условиях свободного продольного скольжения одного из концов проволоки при разных уровнях вакуумирования ($-p$). Тогда в составе α нужно исключить член $\nu_0(1 + \beta)$. Предполагается, что известны другие входные параметры. Из (10) и (8) следует

$$\beta = \frac{4E_s}{Ed} = \frac{(-p)}{2E}\left(\frac{4L}{\pi d}\right)^2\left(1 - \frac{(W_0)}{(W_0 + W)}\right)^{-1} - \frac{1}{2}. \quad (15)$$

В случае вакуумирования отношение $(W_0)[(W_0 + W)]^{-1} < 1$. Первый член в (15) может быть больше 0,5, тогда значения β и E_s являются положительными (как в случае Cu). Если первый член меньше 0,5, то $\beta < 0$, $E_s < 0$ (как в случае Al). Как во всякой обратной задаче, здесь к точности экспериментальных данных предъявляются повышенные требования (есть разности близких чисел).

5. Поверхностный эффект, связанный с различием упругих свойств в приповерхностном слое и в основном объёме материала, приводит к изменению жёсткостей при растяжении и изгибе нанопроволоки. Этот эффект возрастает обратно пропорционально диаметру проволоки. Он может как повышать жёсткости, так и понижать. В уравнении изгиба (8) эффект учитывается безразмерным параметром β, приведённым в (1). Он не зависит от граничных условий. Необходимо отметить отсутствие в литературе числовых данных для многих материалов, а также сложность их определения. Один из возможных способов их определения предложен здесь.

Второй эффект обусловлен взаимодействием избыточного давления и разности площадей выпуклой и вогнутой частей поверхности проволоки при её изгибе. Избыточное давление может быть положительным (боковое сжатие) и отрицательным (вакуумирование поверхности). В уравнении (8) эффект учитывается безразмерным параметром α, приведённым в (10). Его значение тем больше, чем больше отношение давления к модулю упругости материала и квадрат отношения длины к диаметру проволоки.

На эффективную жёсткость при растяжении K_* проволоки влияет только первый эффект, а на эффективную изгибную жидкость D_* – оба фактора: $K_* = K(1+\beta)$, $D_* = D(1+\alpha+3\beta)$, где K и D – жёсткости, вводимые в классической теории упругости. Влияние на изгиб второго эффекта может быть значительным не только для микро- и нанопроволок. Кроме того, он существенно зависит от граничных условий.

При положительных значениях параметров α и β происходит выпрямление проволоки. Наоборот, при $\alpha < 0$, $\beta < 0$ полный прогиб возрастает. При вакуумировании боковой поверхности проволоки может быть достигнуто критическое значение параметра α и соответствующее значение избыточного давления, когда происходит её выпучивание, как при осевом сжатии. Такие результаты не могут быть получены на основе классических моделей, без учёта второго поверхностного эффекта.

Приведённые результаты показывают, что при анализе деформации нанопроволок и их взаимодействия с окружающей газовой или жидкой средой должны учитываться рассмотренные в сообщении поверхностные эффекты. Эти результаты нуждаются в экспериментальной проверке.

Источники финансирования. Работа выполнена в рамках государственного задания (проекты 0246–2019–0088, 0049–2015–0040) и РФФИ (грант 18–01–00150).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eom K., Park H.S., Yoon D.S., Kwon K.* // Phys. Rep. 2011. V. 503. № 4–5. P. 115–163.
2. *Elnathan R., Kwiat M., Patolsky F., Voelcker N.H.* // Nano Today. 2014. V. 9. № 2. P. 172–196.
3. *Sheehan P.E., Lieber C.M.* // Science. 1996. V. 272. P. 1156–1161.
4. *Wong E., Sheehan P.E., Lieber C.M.* // Science. 1997. V. 277. P. 1971–1975.
5. *Gurtin M.E., Murdoch A.I.* // Int. J. Solids Struct. 1978. V. 14. P. 431–440.
6. *Giunta G., Koutsawa Y.,Belouettar S., Hu H.* // Int. J. Solids Struct. 2013. V. 50. P. 1460–1472.
7. *Wu J.X., Li X.F. Li, Tang A.Y., Lee K.Y.* // J. Vib. Control. 2017. V. 23. P. 2064–2077.
8. *Link H.* // Ingenieur – Archiv. 1960. B. 31. S. 149–167.
9. *Ilgamov M.A.* Static Problems of Hydroelasticity. M.: Nauka, 1998. 208 p.

INFLUENCE OF SURFACE EFFECTS ON THE BENDING AND BUCKLING OF NANOWIRES

Corresponding Member of the RAS M. A. Ilgamov

Blagonravov Institute of Engineering Science, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation
Bashkir State University, Ufa, Bashkortostan, Russian Federation
Institute of Mechanics, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russian Federation

Received June 4, 2019

The static bending and longitudinal stability of nanowires under liquid or gas pressure are considered. Two surface effects are taken into account. The first is due to the difference in elastic properties in the thin surface layer and in the bulk of the material. Effective tensile and flexural stiffness can be more or less than conventional stiffness, depending on the material. The second effect is due to the interaction of excess pressure on the circular side surface of the wire and the difference of the areas of the convex and concave sides of the surface that appears during bending. This effect is manifested the stronger, the greater the ratio of pressure to the modulus of elasticity of the material and the length of the wire to its diameter. These effects are determined by dimensionless parameters. It has been established that a loss of wire stability may occur under the influence of the second effect. A possible method for determining the dimensionless parameter, which determines the differences of elastic properties in a thin layer near the surface and the base material, is proposed.

Keywords: nanowire, bending, buckling, surface effects.