ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 1, с. 5–10

МАТЕМАТИКА

УДК 517.984

КВАНТОВЫЕ ГРАФЫ С СУММИРУЕМЫМИ МАТРИЧНЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Я. И. Грановский[1,*], М. М. Маламуд[2,], Х. Найдхардт**

Представлено академиком РАН В.П. Масловым 02.05.2019 г.

Поступило 13.05.2019 г.

Пусть $\mathcal{G}$ – метрический конечный некомпактный и связный граф, состоящий из конечного множества рёбер и вершин. Будем предполагать, что хотя бы одно ребро имеет бесконечную длину. Основной объект работы – гамильтониан $\mathbf{H}_\alpha$, ассоциированный в $L^2(\mathcal{G};\,\mathbb{C}^m)$ с матричным выражением Штурма–Лиувилля и граничными условиями дельта-взаимодействия во всех вершинах. Предполагая, что потенциальная матрица является суммируемой, и применяя технику граничных троек и соответствующих функций Вейля, мы показываем, что сингулярный непрерывный спектр как гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$, так и всех других самосопряжённых реализаций выражения Штурма–Лиувилля пуст. Также мы находим условия на граф, при которых положительная часть гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$ – чисто абсолютно непрерывна. При дополнительном условии на потенциальную матрицу для числа отрицательных квадратов оператора $\mathbf{H}_\alpha$ получен аналог оценки Баргмана. Также найдена формула для матрицы рассеяния для пары $\{\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_D\}$, где $\mathbf{H}_D$ – оператор задачи Дирихле на графе.

Ключевые слова: квантовый граф, абсолютно непрерывный спектр, сингулярный непрерывный спектр, точечный спектр, матрица рассеяния, оценка Баргмана.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-565248815-10

В в е д е н и е. Спектральная теория квантовых графов с конечным или бесконечным числом рёбер активно развивается в последние два-три десятилетия (см. монографии [2, 13], работы [3, 4, 7] и цитируемую в них литературу). Всюду в сообщении $\mathcal{G}=(V,E)$ – метрический конечный некомпактный и связный граф, состоящий из конечного множества вершин V и рёбер E, длина хотя бы одного из которых бесконечна. Основной объект работы – гамильтониан $\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha,Q}$, ассоциированный в $L^2(\mathcal{G};\mathbb{C}^m)$ с матричным выражением Штурма–Лиувилля $\mathcal{A}=-\dfrac{d^2}{dx^2}+Q$, $Q\in L^1(\mathcal{G};\mathbb{C}^{m\times m})$ и граничными условиями дельта-взаимодействия во всех вершинах $v\in V$

$$\begin{gathered} f \quad \text{непрерывна в} \quad v,\\ \sum_e f_e'(v)=\alpha f(v) \end{gathered}\tag{1}$$

(см. [2, 13] и формулу (8)), где $\alpha: V\to\mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha(\cdot)=\alpha(\cdot)^*$ – матричная функция.

При $\alpha=0$ условие (1) – известное условие Кирхгофа.

В работе показано, что сингулярный непрерывный спектр как гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$, так и всех других самосопряжённых реализаций выражения Штурма–Лиувилля $\mathcal{A}$ с суммируемым на графе потенциалом Q пуст. Найдены условия на граф, при которых положительная часть гамильтониана $\mathbf{H}_\alpha$ чисто абсолютно непрерывна. При этом отрицательный спектр оператора $\mathbf{H}_\alpha$ либо конечен, либо счётен с единственной предельной точкой ноль. При дополнительном условии на Q для числа отрицательных квадратов оператора $\mathbf{H}_\alpha$ получен аналог оценки Баргмана. Также найдена формула для матрицы рассеяния $\{S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_D;\,\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ для пары $\{\mathbf{H}_\alpha,\,\mathbf{H}_D\}$, где $\mathbf{H}_D$ – оператор задачи Дирихле на графе.

О б о з н а ч е н и я. $\mathfrak{H}$, $\mathcal{H}$ обозначают сепарабельные гильбертовы пространства. $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$, $\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ – пространства ограниченных и замкнутых операторов в $\mathfrak{H}$ соответственно. Пусть $\mathbb{I}_m=\mathbb{I}_{\mathbb{C}^m}$ и $\mathbb{O}_m=\mathbb{O}_{\mathbb{C}^m}$ обозначают единичный и нулевой операторы в $\mathbb{C}^m$. Далее, $\mathrm{dom}(T)$ и $\ker(T)$ обозначают область определения и ядро оператора $T\in\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ в $\mathfrak{H}$; $\sigma_{ac}(T)$, $\sigma_{sc}(T)$ и $\sigma_p(T)$ обозначают абсолютно непрерывный, сингулярно непрерывный и точечный спектры оператора $T=T^*\in\mathcal{C}(\mathfrak{H})$, $E_T(\cdot)$ – его спектральная мера. $L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R}_+;\,\mathbb{C}^m)$ – это функции из $L^2(\mathbb{R}_+;\,\mathbb{C}^m)$, исчезающие в бесконечности.

[1] *Институт прикладной математики и механики, Донецк*
[2] *Российский университет дружбы народов, Москва*
[*] *E-mail: yarvodoley@mail.ru*
[**] *E-mail: malamud3m@gmail.com*

1. Квантовые графы. Пусть множество E рёбер графа $\mathcal{G}=(V,E)$ состоит из $p_1(>0)$ бесконечных и $p_2(\geq 0)$ – конечных рёбер. Степень $\deg(\nu)$ вершины ν — это число рёбер, инцидентных ν. Обозначим также:

V_{int} — множество вершин, которым инцидентны только конечные рёбра,

V_{ext} — множество вершин, которым инцидентно хотя бы одно бесконечное ребро,

E_{fin} — множество конечных рёбер и E_∞ — множество бесконечных рёбер.

В данных обозначениях $E=E_{\text{fin}}\cup E_\infty$ и $V=V_{\text{int}}\cup V_{\text{ext}}$. Для конечного ребра e начальную и конечную вершины обозначают ν_{o} и ν_{in} соответственно.

С графом $\mathcal{G}$ мы связываем гильбертово пространство $L^2(\mathcal{G};\mathbb{C}^m)$ функций $f:\mathcal{G}\to\mathbb{C}^m$:

$$\begin{gathered}L^2(\mathcal{G};\mathbb{C}^m)=\bigoplus_{e\in E}L^2(e;\mathbb{C}^m)=\\=\left\{f=\{f_e\}_{e\in E}:\ f_e\in L^2(e;\mathbb{C}^m)\right\},\\ f_e=(f_{e,1},\ldots,f_{e,m})^\top\in L^2(e;\ \mathbb{C}^m).\end{gathered}\tag{2}$$

Введём оператор Штурма—Лиувилля на графе $\mathcal{G}$. Пусть на каждом ребре $e\in E$ потенциальная матрица $Q_e(\cdot)$ обладает свойствами

$$Q_e\in L^1(e;\mathbb{C}^{m\times m})\ \text{ и }\ Q_e(x)=Q_e(x)^*\ \text{ для п.в. } x\in e.\tag{3}$$

Определим на ребре $e\in E$ минимальный симметрический оператор $A_e:=A_{e,\min}$, ассоциированный в $L^2(e;\mathbb{C}^m)$ с дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}_e:=-\frac{d^2}{dx^2}+Q_e,\quad e\in E.\tag{4}$$

В случае бесконечного ребра $e\in E_\infty$ область минимального оператора A_e имеет вид

$$\begin{gathered}\operatorname{dom}(A_e)=\left\{f_e\in L^2(e;\mathbb{C}^m):f_e,f_e'\in AC_{\text{loc}}(e;\mathbb{C}^m),\right.\\ \mathcal{A}_e(f_e)\in L^2(e;\mathbb{C}^m),\ f_e(\nu)=f_e'(\nu)=0,\\ \left.\nu\in V_{\text{ext}}\right\},\quad e\in E_\infty.\end{gathered}\tag{5}$$

В случае конечного ребра $e\in E_{\text{fin}}$ оператор A_e задаётся соотношениями (5), в которых последние равенства заменяются следующими:

$$f_e(\nu_{\text{o}})=f_e(\nu_{\text{in}})=f_e'(\nu_{\text{o}})=f_e'(\nu_{\text{in}})=0,\quad e\in E_{\text{fin}}.\tag{6}$$

В силу (3) операторы A_e, $e\in E$, являются симметрическими и их индексы дефекта равны $n_\pm(A_e)=m$ для $e\in E_\infty$, и $n_\pm(A_e)=2m$ для $e\in E_{\text{fin}}$. Резюмируя, вводим минимальный симметрический оператор $A:=\bigoplus_{e\in E}A_e=A_{\min}$ на графе $\mathcal{G}$, ассоциированный с дифференциальным выражением $\mathcal{A}:=\bigoplus_{e\in E}\mathcal{A}_e$. Ясно, что индексы дефекта $n_\pm(A)=m(p_1+2p_2)$.

2. Отсутствие сингулярного непрерывного спектра.

Теорема 1. *Пусть для каждого ребра $e\in E$ выполнено условие* (3). *Пусть также $\widetilde{A}$ — произвольное самосопряжённое расширение минимального оператора $A:=\bigoplus_{e\in E}A_e$, заданного на графе $\mathcal{G}$. Тогда:*

(i) *сингулярный непрерывный спектр $\sigma_{sc}(\widetilde{A})$ является пустым, т.е. $\sigma_{sc}(\widetilde{A})\cap\mathbb{R}=\phi$;*

(ii) *абсолютно непрерывный спектр $\sigma_{ac}(\widetilde{A})$ заполняет полуось $\mathbb{R}_+$, $\sigma_{ac}(\widetilde{A})=\mathbb{R}_+$, и имеет кратность $N_{\widetilde{A}}(t)=mp_1$, $t\in\mathbb{R}_+$;*

(iii) *оператор $\widetilde{A}$ полуограничен снизу и его отрицательный спектр или конечен, или образует счётную последовательность, стремящуюся к нулю.*

Самосопряжённые расширения $\widetilde{A}$ называют также реализациями выражения $\mathcal{A}$.

Замечание 1. Подчеркнём, что в отличие от абсолютно непрерывного спектра сингулярный спектр неустойчив относительно одномерных возмущений. Так, существуют такие операторы $-\frac{d^2}{dx^2}+Q$ в $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$, для которых задача Дирихле имеет абсолютно непрерывный спектр, а задача Неймана содержит sc-компоненту. В условиях теоремы 1 этот эффект невозможен.

Доказательство теоремы 1(i) опирается на теорию граничных троек и функций Вейля (см. [5, 6, 10]) и развивает метод [9]. Утверждения (ii), (iii) вытекают из аналогичных результатов для оператора $\mathbf{H}_D$ (см. [9]) и теорем Като—Розенблюма и Вейля [14].

Пусть $X:=\{x_n\}_{n=1}^N$ — конечное подмножество точек полуоси $\mathbb{R}_+$. Пусть также $\{\alpha_n\}_{n=1}^N$ — последовательность самосопряжённых матриц порядка m. Рассмотрим следующее формальное дифференциальное выражение:

$$\begin{gathered}\mathcal{A}_{X,\alpha,Q}:=-\frac{d^2}{dx^2}+Q+\sum_{n=1}^N\alpha_n\delta(x-x_n),\\ Q(\cdot)=Q(\cdot)^*\in L^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m).\end{gathered}\tag{7}$$

Тогда полуось $\mathbb{R}_+$ вместе с вершинами $V=X$ образует граф, состоящий из N конечных рёбер и одного бесконечного ребра (x_N,∞). Поэтому из теоремы 1 вытекает один из основных результатов работы [9] об отсутствии сингулярного непрерывного спектра у всех самосопряжённых расширений минимального оператора, ассоциированного с выражением (7) (см. [9, теорема 4.6]).

Замечание 2. Для скалярного квантового графа $(m=1)$ с нулевым потенциалом $Q=0$ теорема 1 получена ранее Онгом [12] с помощью принципа предельного поглощения.

3. Положительный точечный спектр. Пусть $Q=Q^*\in L^1(\mathcal{G};\mathbb{C}^{m\times m})$ и $\alpha: V\to\mathbb{C}^{m\times m}$, $\alpha=\alpha^*$. Обозначим через $\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha,Q}$ гамильтониан вида

$$\mathbf{H}_\alpha := \mathbf{H}_{\alpha,Q} := A_{\max}\upharpoonright \mathrm{dom}(\mathbf{H}_\alpha),\quad A_{\max}=A^*,$$
$$\mathrm{dom}(\boldsymbol{H}_\alpha^0)=\{f\in\mathrm{dom}(A^*): \tag{8}$$
$$f \text{ удовлетворяет (1)},\ \nu\in V\}.$$

Легко видеть (и хорошо известно), что $\mathbf{H}_\alpha=\mathbf{H}_\alpha^*$.

В дальнейшем $q(\nu)$ обозначает число бесконечных рёбер, инцидентных вершине $\nu\in V_{\text{ext}}$, а $\deg(\nu)-q(\nu)$ — число конечных рёбер, инцидентных вершине $\nu\in V$.

Предложение 1. *Пусть* $\mathbf{H}_\alpha$ *— гамильтониан вида* (8). *Пусть также выполнены следующие условия*:

(i) *для каждой вершины* $\nu\in V_{\text{int}}$ *число инцидентных конечных рёбер не превосходит двух*, *т.е.*

$$\deg(\nu)\le 2 \quad \text{для всех} \quad \nu\in V_{\text{int}}; \tag{9}$$

(ii) *для каждой вершины* $\nu\in V_{\text{ext}}$ *число инцидентных конечных рёбер не превосходит единицы*, *т.е.*

$$\deg(\nu)-q(\nu)\le 1 \quad \text{для всех} \quad \nu\in V_{\text{ext}}. \tag{10}$$

Тогда $\mathbf{H}_\alpha$ *не имеет положительных собственных значений*, *т.е.* $\sigma_p(\mathbf{H}_\alpha)\cap\mathbb{R}_+=\phi$.

Из теоремы 1 и предложения 1 вытекает следующая

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и условия* (9), (10). *Тогда*:

(i) *положительный спектр оператора* $\mathbf{H}_\alpha$ *имеет кратность* mp_1 *и является чисто абсолютно непрерывным*, *т.е.*

$$\sigma_p(\mathbf{H}_\alpha)\cap\mathbb{R}_+=\sigma_{sc}(\mathbf{H}_\alpha)\cap\mathbb{R}_+=\sigma_{sc}(\mathbf{H}_\alpha)\cap\mathbb{R}=\phi;$$

(ii) *отрицательный спектр оператора* $\mathbf{H}_\alpha$ *либо конечен, либо счётен с единственной предельной точкой ноль.*

Замечание 3. В условиях теоремы 2 $0\in\sigma_{ac}(\mathbf{H}_\alpha)$, что не исключает включения $0\in\sigma_p(\mathbf{H}_\alpha)$, т.е. ноль может быть и собственным значением кратности $k\le mp_1$. Например, это так для оператора, ассоциированного с выражением

$$\mathcal{A}:=-\frac{d^2}{dx^2}+Q,\ \ Q(x):=-\mathrm{diag}\{(x+a_1)^{-2},\ldots,(x+a_m)^{-2}\},$$
$$a_j>0,\quad j\in\{1,2,\ldots,m\},$$

и граничным условием

$$y'(0)=Ty(0),\quad T=-\mathrm{diag}\{a_1,\ldots,a_m\}.$$

Замечание 4. Снова рассмотрим простейший граф, порожденный полуосью $\mathbb{R}_+$ и конечным подмножеством вершин $V=X:=\{x_k\}_{k=1}^N$. В этом случае условие (1) — это условие δ-взаимодействия в каждой вершине x_k, и оператор вида (8) совпадает с реализацией Дирихле выражения (7), задающего δ-взаимодействия. Поэтому из теоремы 2 вытекает теорема 4.8 из [9], – основной результат этой работы об операторе $H_{X,\alpha,Q}$ с δ-взаимодействиями в $L^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}^m)$.

При отсутствии δ-взаимодействий $(\alpha_1=\ldots=\alpha_N=0)$ это даёт абсолютную непрерывность спектра как оператора задачи Дирихле, так и любого самосопряжённого расширения минимального оператора Штурма—Лиувилля с потенциальной матрицей $Q\in L^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^{m\times m})$. В свою очередь, этот результат обобщает классический результат Титчмарша для скалярного оператора, ассоциированного в $L^2(\mathbb{R}_+)$ с выражением $\mathcal{A}:=-\dfrac{d^2}{dx^2}+q$ при $q=\overline{q}\in L^1(\mathbb{R}_+)$ (см. [15, глава 5]).

В следующем предложении показывается, что условия (9), (10) являются точными.

Предложение 2. *Пусть существует вершина* ν, *в которой выполняется одно из следующих условий*:

$$\begin{cases} q(\nu)=0, \\ \deg(\nu)>2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} q(\nu)>0, \\ \deg(\nu)-q(\nu)\ge 2. \end{cases} \tag{11}$$

Тогда найдутся такие графы $\mathcal{G}$ *со специальными соотношениями длин конечных рёбер и такие* $Q=Q^*\in L^1(\mathcal{G};\mathbb{C}^{m\times m})$, *при которых положительный точечный спектр расширения Кирхгофа* $\mathbf{H}_0$ *минимального оператора* A *не пуст*.

4. Оценка типа Баргмана. Здесь привёден аналог оценки Баргмана для числа отрицательных квадратов оператора $\mathbf{H}_\alpha=\mathbf{H}_\alpha^*$ (в частности, для $\mathbf{H}_0:=\mathbf{H}_{\text{kir}}$) при условии $xQ\in L^1(\mathcal{G};\mathbb{C}^{m\times m})$.

Каждая матрица $T=T^*\in\mathbb{C}^{m\times m}$ допускает (единственное) разложение: $T=T_+-T_-$, в котором $T_\pm=\pm TE_\pm\ge 0$ и $E_+=E_T[0,\infty)$, $E_-=E_T(-\infty,0)$. Для каждого самосопряжённого оператора $T=T^*\in\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ полагаем $\kappa_-(T):=\dim E_T(-\infty,0)$.

Теорема 3. *Пусть* $Q=\bigoplus_{e\in E}Q_e=Q^*\in L^1(\mathcal{G};\mathbb{C}^{m\times m})$,

$Q_{e,-}:=-Q_eE_{Q_e}(-\infty,0)\ge 0,$ *и* $x_eQ_e\in L^1(e;\mathbb{C}^{m\times m})$ *для* *всех $e \in E$. Тогда для оператора $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ справедлива оценка*

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \le \sum_{e\in E}\left[\int_e x\cdot \operatorname{tr}(Q_{e,-}(x))dx\right] + m|V|, \quad (12)$$

в которой $[a]$ обозначает целую часть числа $a \in \mathbb{R}$.

Следствие 1. *Пусть $\mathbf{H}_{\text{kir}} := \mathbf{H}_{\{0,Q\}}$. Тогда в условиях теоремы* 3 *верна оценка*

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) \le \kappa_-(\mathbf{H}_{\text{kir}}) + \sum_{\nu\in V}\kappa_-(\alpha(\nu)). \quad (13)$$

Если $A = A_{\min}$ неотрицателен, то найдутся такие матрицы $C, D \in \mathbb{C}^{m\times m}$, что справедливо равенство

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_-(CD^* - DM(0)D^*), \quad (14)$$

в котором $M(0) = M(-0)$ — предельное значение функции Вейля. Так, для звёздного графа при отсутствии конечных рёбер $(p_2 = 0)$ равенство (14) *принимает вид*

$$\kappa_-(\mathbf{H}_{\alpha,Q}) = \kappa_-\left(\alpha(0) - \sum_{e\in E} M_e(0)\right). \quad (15)$$

Замечание 5. (i) В доказательстве теоремы 3 использованы некоторые теоремы вложения из [11, глава 2]. В связи с оценками отрицательного спектра отметим работу [8].

(ii) Оценки (12) и (13) являются точными на указанном классе потенциальных матриц Q и последовательностей $\alpha = \{\alpha(\nu)\} \subset \mathbb{C}^{m\times m}$, однако не являются таковыми при индивидуальных Q и α. Например, в силу (15), при некоторых Q и α гамильтониан $\mathbf{H}_{\alpha,Q}$ может быть неотрицательным, хотя $\kappa_-(\alpha(\nu)) = m$ при всех $\nu \in V$.

5. Звёздный граф и матрица рассеяния. Здесь $\mathcal{G}$ — звёздный граф, состоящий из конечного числа $p_1 (> 0)$ бесконечных и $p_2 (\ge 0)$ конечных рёбер, $p_1 + p_2 := p$. Пусть точка 0 соответствует внутренней вершине графа. Как и прежде, $\mathbf{H}_\alpha = \mathbf{H}_{\alpha,Q}$ — гамильтониан вида (8) с потенциальной матрицей вида (3). Мы находим здесь матрицу рассеяния $\{S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_D; \lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}_+}$ для пары $\{\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_D\}$, где $\mathbf{H}_D$ — оператор задачи Дирихле на $\mathcal{G}$.

С каждым бесконечным ребром $l_j \in E_\infty$, $j \in \{1, \ldots, p_1\}$, ассоциируем симметрический оператор A_{l_j} на области вида (5) при $\nu = 0$. Индексы дефекта оператора A_{l_j} равны $n_\pm(A_{l_j}) = m$. Известно, что совокупность $\Pi_{l_j} := \{\mathcal{H}_{l_j}, \Gamma_0^{l_j}, \Gamma_1^{l_j}\}$, где

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_j := \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0^{l_j} f = f(0),\\ \Gamma_1^{l_j} f = f'(0), \quad f \in \operatorname{dom}(A_{l_j}^*),\ j \in \{1, 2, \ldots, p_1\},\end{gathered} \quad (16)$$

является граничной тройкой для $A_{l_j}^*$. Соответствующую функцию Вейля обозначим $M_{l_j} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{l_j})$ (см. определения 1, 2 в Приложении А).

С каждым конечным ребром $e_k \in E_{\text{fin}}$ ассоциируем симметрический оператор T_{e_k} на области вида (5), в котором третье условие вида (6) заменяется следующим:

$$f(0) = f'(0) = f'(\nu_k) = 0, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, p_2\}. \quad (17)$$

В данном случае $\nu_o := 0$ и $\nu_{\text{in}} := \nu_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, p_2\}$. Подчеркнём, что оператор T_{e_k} — расширение минимального оператора A_{e_j} вида (6), а его индексы — $n_\pm(T_{e_k}) = m$. Граничную тройку $\Pi_{e_k} := \{\mathcal{H}_{e_k}, \Gamma_0^{e_k}, \Gamma_1^{e_k}\}$ для $T_{e_k}^*$ выберем в виде

$$\begin{gathered}\mathcal{H}_{e_k} := \mathbb{C}^m, \quad \Gamma_0^{e_k} f = f_{e_k}(0),\\ \Gamma_1^{e_k} f = f'(0), \quad f \in \operatorname{dom}(T_{e_k}^*).\end{gathered} \quad (18)$$

Соответствующую функцию Вейля обозначим $M_{e_k} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_k)$.

Далее, вводим симметрический оператор на графе $\mathcal{G}$ как прямую сумму:

$$A := \left(\bigoplus_{j=1}^{p_1} A_{l_j}\right) \bigoplus \left(\bigoplus_{k=1}^{p_2} T_{e_k}\right),$$

с индексами дефекта $n_\pm(A) = mp$. Нетрудно видеть, что совокупность $\Pi := \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой

$$\mathcal{H} := \bigoplus_{j=1}^{p} \mathcal{H}_j, \ \ \mathcal{H}_j := \begin{cases}\mathcal{H}_{l_j} = \mathbb{C}^m, & j \in \{1, 2, \ldots, p_1\},\\ \mathcal{H}_{e_{j-p_1}} := \mathbb{C}^m, & j \in \{p_1 + 1, \ldots, p\},\end{cases}$$

$$\Gamma_0 := \bigoplus_{j=1}^{p} \Gamma_0^{(j)}, \ \ \Gamma_0^{(j)} := \begin{cases}\Gamma_0^{l_j}, & j \in \{1, 2, \ldots, p_1\},\\ \Gamma_0^{e_{j-p_1}} & j \in \{p_1 + 1, \ldots, p\},\end{cases} \quad (19)$$

$$\Gamma_1 := \bigoplus_{j=1}^{p} \Gamma_1^{(j)}, \ \ \Gamma_1^{(j)} := \begin{cases}\Gamma_1^{l_j}, & j \in \{1, 2, \ldots, p_1\},\\ \Gamma_1^{e_{j-p_1}} & j \in \{p_1 + 1, \ldots, p\},\end{cases}$$

является граничной для A^*. Оператор

$$\mathbf{H}_D := A^* \upharpoonright \ker(\Gamma_0)$$

задаётся формулами

$$\mathbf{H}_D = \bigoplus_{j=1}^{p} \mathbf{H}_{D,j}, \ \ \mathbf{H}_{D,j} := \begin{cases}A_{l_j}^D & j \in \{1, 2, \ldots, p_1\},\\ T_{e_{j-p_1}}^{DN} & j \in \{p_1 + 1, \ldots, p\},\end{cases} \quad (20)$$

где $T_{e_k}^{DN}$ — оператор Штурма—Лиувилля с граничными условиями Дирихле в вершине 0 и Неймана — в висячей вершине ν_k.

Соответствующая функция Вейля $M(\cdot)$ имеет вид

$$M(z) = \operatorname{diag}\{M_1(z), \ldots, M_p(z)\}, \quad z \in \rho(\mathbf{H}_D),$$

$$M_j(z) := M_{l_j}(z), \quad j \in \{1, 2, \ldots, p_1\}; \tag{21}$$

$$M_j(z) := M_{e_j}(z), \quad j \in \{p_1 + 1, \ldots, p\}.$$

Гамильтониан $\mathbf{H}_\alpha$ вида (8) задаётся в граничной тройке (19) равенством

$$\mathbf{H}_\alpha := A^* \upharpoonright \ker(D\Gamma_1 - C\Gamma_0), \quad CD^* = DC^*, \tag{22}$$

в котором $C, D \in \mathbb{C}^{mp \times mp}$ — блочные матрицы с элементами из $\mathbb{C}^{m \times m}$. Ненулевые элементы матрицы C расположены на главной диагонали

$$\operatorname{diag} C = \operatorname{diag}\{\alpha(0), -\mathbb{I}_m, \ldots, -\mathbb{I}_m\},$$

где $\alpha(0) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ — матрица из условия (1), а также в первом столбце следующего вида $(\alpha(0), \mathbb{I}_m, \ldots, \mathbb{I}_m)^{\mathrm{T}}$. В матрице D отлична от нуля лишь первая строка, имеющая вид $(\mathbb{I}_m, \ldots, \mathbb{I}_m)$.

Пусть $S_j(x, \lambda)$, $j \in \{1, 2, \ldots, p_1\}$, — матричное решение уравнения

$$A_{l_j}\left(S_j(x, z)\right) = z S_j(x, z), \quad x \in l_j, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{23}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $S(0, z) = \mathbb{O}_m$, $S'(0, z) = \mathbb{I}_m$, и пусть $E_{p_1} (\in \mathbb{C}^{p_1 \times p_1})$ — матрица, все элементы которой являются единицами.

В этих обозначениях основной результат раздела даётся следующей теоремой.

Теорема 4. *Пусть G — звёздный граф, состоящий из $p_1 (> 0)$ бесконечных и $p_2 (\geq 0)$ конечных рёбер, $p_1 + p_2 := p$, и $Q \in L^1(\mathcal{G}; \mathbb{C}^{m \times m})$. Тогда:*

(i) *гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda; \mathcal{H}_{ac})$,*

$$\mathcal{H}_{ac} := \bigoplus_{j=1}^{p_1} \mathcal{H}_j = \underbrace{\mathbb{C}^m \oplus \ldots \oplus \mathbb{C}^m}_{p_1} = \mathbb{C}^{m \cdot p_1} \subseteq \mathcal{H} \tag{24}$$

задаёт спектральное представление оператора $\mathbf{H}_D^{ac}$;

(ii) *относительно спектрального представления $L^2(\mathbb{R}_+, d\lambda; \mathcal{H}_{ac})$ матрица рассеяния $\{S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_D; \lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}_+}$*

для пары $\{\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_D\}$ допускает для п.в. $\lambda \in \mathbb{R}_+$ представление

$$S(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_D; \lambda) =$$

$$= \mathbb{I}_{\mathcal{H}_{\mathrm{ac}}} + \frac{i}{2\sqrt{\lambda}} (N_1(\lambda)^*)^{-1} \left((\alpha - K(\lambda))^{-1} \otimes E_{p_1}\right) \cdot N_1(\lambda)^{-1}, \tag{25}$$

в котором

$$K(\lambda) := \sum_{j=1}^{p_1} M_j(\lambda + i0) : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

$$N_{1,j}(\lambda) := \frac{\mathbb{I}_m}{2i\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{2i\sqrt{\lambda}} \int_{l_j} e^{i\sqrt{\lambda}t} Q_j(t) S_j(t, \lambda)\, dt, \tag{26}$$

$$N_1(\lambda) := \bigoplus_{j=1}^{p_1} N_{1,j}(\lambda) : \mathcal{H}_{ac} \to \mathcal{H}_{ac}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Стационарная постановка задачи рассеяния на квантовом графе впервые рассмотрена Н.И. Герасименко и Б.С. Павловым [3] (см. также [2]). Доказательство теоремы 4 существенно опирается на результаты недавней работы [1].

Приложение А: Граничные тройки.

Пусть A — плотно заданный замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}$,

$$\mathfrak{N}_z = \mathfrak{N}_z(A) := \mathfrak{H} \ominus \operatorname{ran}(A - z^*) = \ker(A^* - z),$$

$z \in \mathbb{C}_\pm$ — его дефектные подпространства, а $n_\pm(A) := \dim \mathfrak{N}_{\pm i}(A)$ — его индексы дефекта. Пусть также $n_+(A) = n_-(A) \leq \infty$.

Определение 1. Совокупность $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, в которой $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, а Γ_0 и Γ_1 — линейные отображения из $\operatorname{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H}$, называется граничной тройкой оператора A^*, если:

(i) справедливо тождество Грина

$$(A^* f, g) - (f, A^* g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_0 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_0 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}},$$

$$f, g \in \operatorname{dom}(A^*); \tag{27}$$

(ii) отображение $\Gamma : f \mapsto \{\Gamma_0 f, \Gamma_1 f\}$ из $\operatorname{dom}(A^*)$ в $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ сюръективно.

Граничная тройка для оператора A^* существует, только когда $n_+(A) = n_-(A)$. В этом случае $n_\pm(A) = \dim \mathcal{H}$ и $\ker(\Gamma) = \ker(\Gamma_0) \cap \ker(\Gamma_1) = \operatorname{dom}(A)$.

Определение 2 [6]. Пусть $\Pi = \{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$ — граничная тройка для A^*. Функцией Вейля, соответствующей граничной тройке Π, называют оператор-функцию $M(\cdot)$, определяемую равенством

$$\Gamma_1 f_z = M(z) \Gamma_0 f_z, \quad f_z \in \mathfrak{N}_z, \quad z \in \rho(A_0). \tag{28}$$

Функция Вейля определена корректно и является $R[\mathcal{H}]$-функцией: $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} M(z) > 0$ и $M(\bar{z}) = M^*(z)$. Кроме того, $0 \in \rho(\operatorname{Im}(M(i)))$ (см. [6]).

Пусть A — простой симметрический оператор в $\mathfrak{H}$. Тогда функция Вейля $M(\cdot)$ определяет пару $\{A, A_0\}$ однозначно с точностью до унитарной эквивалентности (см. [6]).

Источники финансирования. Работа подготовлена при поддержке Программы РУДН “5-100”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Behrndt J., Malamud M.M., Neidhardt H.* // J. Funct. Anal. 2017. V. 273. P. 1970–2025.
2. *Berkolaiko G., Kuchment P.* // Introduction to Quantum Graphs. Mathematical surveys and monographs. 2013. V. 186. 270 p.
3. *Герасименко Н.И., Павлов Б.С.* // ТМФ. 1988. Т. 74. № 3. С. 345–359.
4. *Davies E., Pushnitski A.* // J. Analysis and PDE. 2011. V. 4. № 5. P. 729–756.
5. *Деркач В.А., Маламуд М.М.* Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи. К.: Ин-т математики НАН Украины, 2017. 573 с.
6. *Derkach V.A., Malamud M.M.* // J. Funct. Anal. 1991. V. 95. P. 1–95.
7. *Exner P., Kostenko A., Malamud M., Neidhard H.* // Annales Henri Poincare. 2017. V. 19. № 11. P. 3457–3510.
8. *Exner P., Laptev A., Usman M.* // Commun. Math. Phys. 2014. V. 326. P. 531–541.
9. *Granovskyi Ya., Malamud M., Neidhardt H., Posilicano A.* // J. Funct. Anal. and Op. Th. for Quantum Physics. The Pavel Exner Anniversary Volume. 2017. P. 271–313.
10. *Malamud M.M., Neidhard H.* // J. Funct. Anal. 2011. V. 260. № 3. P. 613–638.
11. *Маслов В.П.* // Операторные методы. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит. изд-ва “Наука”, 1973. 544 с.
12. *Ong B.-S.* // Quantum graphs and their applications. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence (RI). 2006. V. 415. P. 241–249.
13. *Post O.* // Lecture Notes in Mathematics. 2039, Springer, 2012.
14. *Reed M., Simon B.* // Methods of Modern Mathematical Physics. III. Functional Analysis, 2nd ed. N.Y.: Acad. Press, 1980.
15. *Титчмарш Э.Ч.* // Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. М.: ИЛ, 1960. Т. 1.

QUANTUM GRAPHS WITH SUMMABLE MATRIX POTENTIALS

Ya. I. Granovskyi[1], M. M. Malamud[2], $\boxed{\text{H. Neidhardt}}$

[1] *Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Donetsk*
[2] *Peoples’ Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.P. Maslov May 2, 2019

Received May 13, 2019

Let $\mathcal{G}$ be a metric, finite, noncompact, and connected graph with finitely many edges and vertices. Assume also that the length at least of one of the edges is infinite. The main object of the paper is Hamiltonian $\mathbf{H}_\alpha$ associated in $L^2(\mathcal{G};\mathbb{C}^m)$ with matrix Sturm-Liouville’s expression and boundary delta-type conditions at each vertex. Assuming that the potential matrix is summable and applying technique of boundary triplets and the corresponding Weyl functions we show that the singular continuous spectrum of the Hamiltonian $\mathbf{H}_\alpha$ as well as any other self-adjoint realization of the Sturm-Liouville expression is empty. We also indicate conditions on the graph ensuring the positive part of the Hamiltonian $\mathbf{H}_\alpha$ to be purely absolutely continuous. Under an additional condition on the potential matrix the Bargmann type estimate for the number of the negative eigenvalues of the operator $\mathbf{H}_\alpha$ is obtained. Also we find a formula for the scattering matrix of the pair $\{\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{H}_D\}$ where $\mathbf{H}_D$ is the operator of the Dirichlet problem on the graph.

Keywords: Quantum graph, absolutely continuous spectrum, singular continuous spectrum, point spectrum, scattering matrix, Bargmann type estimate.