

УДК 550.836.2 (004.942)

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПОЛЕЙ

И. В. Ладовский, член-корреспондент РАН П. С. Мартышко*, Д. Д. Бызов, А. Г. Цидаев

Поступило 06.05.2019 г.

Получено аналитическое решение стационарной задачи теплового сопряжения для трёхмерной модели слоисто-неоднородных сред. Выделены коровая и мантийная составляющие теплового потока. Построен алгоритм пересчёта мантийной составляющей потока на кровлю верхней мантии, его результат сопоставлен с рельефом глубинных структур.

Ключевые слова: слоисто-неоднородная среда, скачок теплофизических параметров, задача теплового сопряжения, мантийный тепловой поток.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-5652488181-85>

ВВЕДЕНИЕ

Методы математического моделирования потенциальных геофизических полей широко применяются в практике региональных геологических работ для изучения структурно-литологических комплексов земной коры. Устойчивые схемы решения обратных задач гравитационного потенциала с построением трёхмерных сеточных моделей распределения плотности предопределяют возможность верификации искомых параметров в полях температур и тепловых потоков. Количественная интерпретация тепловых полей снижает степень неоднозначности плотностных моделей и повышает достоверность представлений о глубинном строении и вещественном составе неоднородной геологической среды на разных иерархических уровнях её организации.

Цель настоящих исследований состоит в создании оригинальных методов решения геотермических задач стационарной теплопроводности для моделей кусочно-однородных сред и разработке универсальных алгоритмов количественной интерпретации тепловых и гравитационных аномалий, построение практических примеров интерпретации теплового потока.

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЁННЫХ ФУНКЦИЙ

Неоднородность теплофизического разреза проявляется в распределении двух параметров: мощности тепловых источников Q и коэффициента тепло-

проводности λ . Их связывает условие неразрывности для стационарного теплового потока \mathbf{q} [1]:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = Q; \quad \mathbf{q} = -\lambda(x) \nabla T. \quad (1)$$

Температура T имеет смысл потенциала “растекания” векторного поля тепловых потоков. При постоянной теплопроводности λ решение для температуры соответствует представлению для гравитационного потенциала с массовой плотностью Q/λ [2]. В моделях кусочно-однородных сред теплопроводность меняется скачком. Поток \mathbf{q} непрерывен на граничной поверхности контакта, но каждая из функций в произведении $(\lambda \nabla T)$ испытывает разрыв непрерывности 1-го рода. В окрестности таких разрывов граничные производные заменяются интегральными условиями теплового сопряжения.

В пространстве обобщённых функций уравнение (1) будем рассматривать как обобщённо-непрерывный оператор задачи сопряжения с разрывными коэффициентами:

$$\nabla^2 T + \nabla \left(\frac{1}{\lambda} \right) \cdot \mathbf{q} + \left(\frac{1}{\lambda} \cdot Q \right) = 0. \quad (2)$$

Произведение одной разрывной функции (обратной теплопроводности и её градиента) на непрерывные функции потока \mathbf{q} и плотности источников Q существует как допустимая функциональная комбинация [3]. Уравнение (2) справедливо не только в точках непрерывности, но и в точках разрыва обратного коэффициента теплопроводности и соответствует континуальной постановке задачи сопряжения “без граничных условий”.

Конкретизируем теплофизические параметры модели слоистой среды (рис. 1). Среда заполняет нижнее полупространство (область D), верхняя

Институт геофизики имени Ю.П. Булашевича Уральского отделения Российской Академии наук, Екатеринбург
* E-mail: pmart3@mail.ru

граница которого S_0 принята за уровень земной поверхности. Внутренние поверхности S_k ($k = 1 \dots M$) разделяют область D на $(M + 1)$ криволинейных слоёв D_k . Выше границы S_k теплопроводность слоя постоянна и равна λ_k ; плотность источников Q_k непрерывна или, по крайней мере, интегрируема.

Введём систему декартовых координат $(X) = (x, y, z)$ с вертикальной осью $(0z)$, направленной вниз по глубине пласта и плоскостью $(x0y)$ на границе S_0 . Уравнение внутренних границ S_k зададим неявной функцией координат $\Phi_k(S_k) = z - z_k(x, y) = 0$. Вектор нормали к поверхности S_k равен градиенту функции Φ_k и сориентирован по оси глубин $N_k(S_k) = \nabla \Phi_k$. Линейная комбинация ступенчатых функций $H(\Phi_k)$ определяет вид эвристической зависимости разрывного коэффициента обратной теплопроводности:

$$\frac{1}{\lambda(X)} = 1/\lambda_1 + \sum_{k=1}^M \left(\left(\frac{1}{\lambda_{k+1}} - \frac{1}{\lambda_k} \right) \cdot H(\Phi_k) \right). \quad (3)$$

Обобщённая производная функции $H(\Phi_k)$ равна дельта-функции $\delta(\Phi_k)$ с носителем на множестве точек поверхности $\Phi_k(S_k) = 0$, так что

$$\nabla \left(\frac{1}{\lambda(X)} \right) = \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{\lambda_{k+1}} - \frac{1}{\lambda_k} \right) \cdot N_k(S_k) \otimes \delta(z - z_k(x, y)). \quad (4)$$

Градиентный член в уравнении (2) преобразуется к виду источников простого слоя:

$$\nabla^2 T = \sum_{k=1}^M v_k(S_k) \otimes \delta(z - z_k(x, y)) - \frac{Q(X)}{\lambda(X)}. \quad (5)$$

Поверхностная плотность источников $v_k(S_k)$ равна скачку нормальных производных температуры в двусторонней окрестности S_k :

$$v_k(S_k) = -N_k \cdot \left(\frac{q}{\lambda_{k+1}} - \frac{q}{\lambda_k} \right) = N_k \cdot (\nabla T_{k+1} - \nabla T_k).$$

В силу непрерывности теплового потока

$$v_k(S_k) = 2\varepsilon_k (N_k \cdot \nabla T) \Big|_{S_k}, \quad (6)$$

где $(N_k \cdot \nabla T) \Big|_{S_k}$ — прямое значение нормальной производной температуры; $\varepsilon_k = (\lambda_k - \lambda_{k+1}) / (\lambda_k + \lambda_{k+1})$ — параметр теплопроводной контрастности k -го и $(k + 1)$ -го сопредельных слоёв.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ФОРМУЛА ГРИНА

Стационарный краевой режим на внешних границах слоистого пласта S_0 и S_H обеспечен постановкой неоднородных условий задачи Дирихле–Неймана [2]

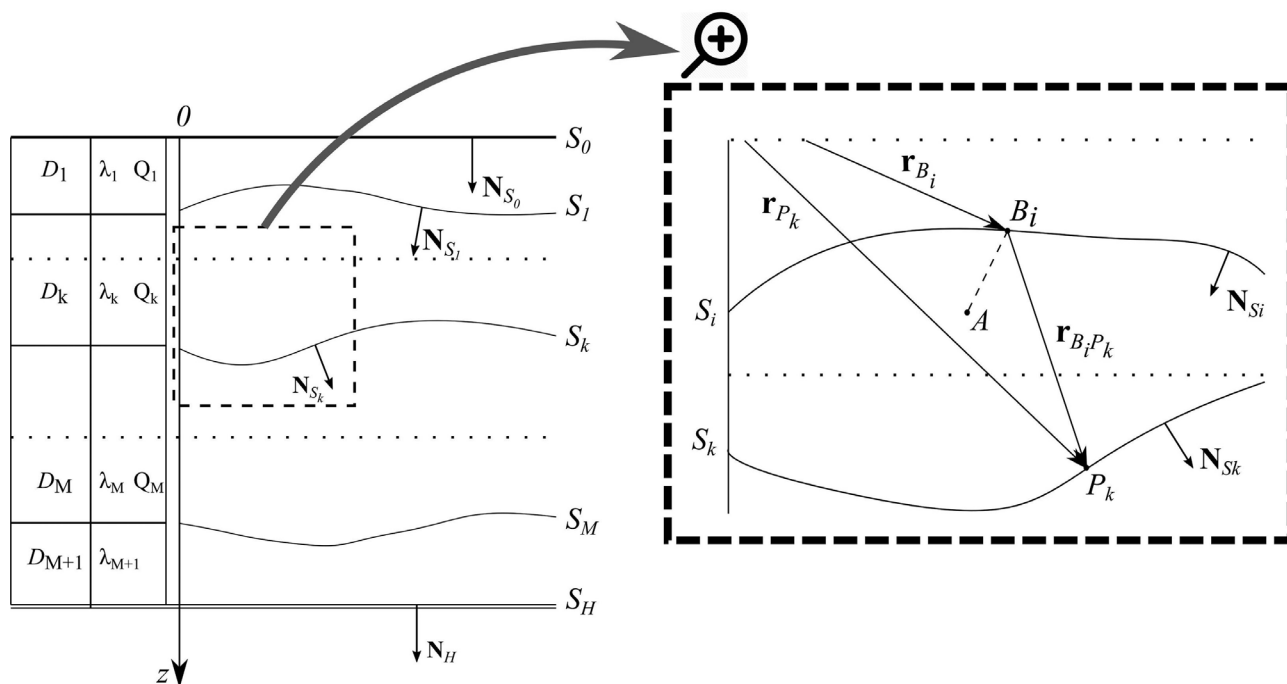


Рис. 1. Модель слоистого пласта и распределение теплофизических параметров неоднородного разреза. На выделенном фрагменте справа обозначены расстояния до точек на границах раздела сред.

$$\begin{aligned} T(X) \Big|_{X \in S_0} &= \theta(S_0); \\ (N_{S_H} \cdot \nabla T) \Big|_{X \in S_H} &= \mu(S_H), \end{aligned} \quad (7)$$

$\theta(S_0) = \theta_0$ — постоянная температура на верхней границе пласта; $\mu(S_H)$ — напряжённость теплового поля на его нижней границе.

Пространство интегральных образов краевой задачи (5)–(7) формируется свёрткой лапласиана температуры $\nabla^2 T(C)$ и функции Грина $G(A, C)$ — сингулярной функции двух переменных однородной краевой задачи [1, 3]. Преобразование свёртки и вторая формулы Грина эквивалентны. В итоге получаем

$$T(A) = W(A) - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^M v_k(S_k) G(A, P_k) dS_k, \quad (8)$$

где $W(A)$ — потенциал источников первичного поля (объёмных Q и поверхностных μ), не искажённый влиянием контраста теплопроводности,

$$\begin{aligned} W(A) &= \theta_0 + \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{Q(C)}{\lambda(C)} G(A, C) dV_C + \\ &+ \iint_{S_H} \mu(P_H) G(A, P_H) dS_H. \end{aligned} \quad (9)$$

ПРИБЛИЖЕНИЕ МАЛОЙ КОНТРАСТНОСТИ

Плотность простого слоя v_k находится из системы уравнений (6) для граничных производных температуры. Для моделей слабоконтрастных сред следует применить итеративное разложение Неймана по малому параметру теплопроводной контрастности ε_i . В линейном приближении граничные производные точного решения (8) заменяются производной первичного потенциала (9) при $A \rightarrow B_i(S_i)$:

$$v_i(S_i) = 2\varepsilon_i (N_i \cdot \nabla_{B_i}) W(B_i). \quad (10)$$

С учётом найденной плотности (10) решение для температуры принимает тот же вид интегральной свёртки, что и первичный потенциал (9):

$$\begin{aligned} T(A) &= \frac{1}{4\pi} \left(\iiint_D \frac{Q(\tau_C)}{\lambda(\tau_C)} K(A, C) dV_C + \right. \\ &\left. + \iint_{S_H} \mu(P_H) K(A, P_H) dS_H \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Но в отличие от функции Грина, ядро $K(A, C)$ преобразующего оператора (11) учитывает рефракцию теплового поля на всех внутренних границах слоистого пласта:

$$K(A, C) = G(A, C) - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^M \varepsilon_k \iint_{S_k} G(A, P_k) \cdot (N_k \cdot \nabla_{P_k}) G(P_k, C) dS_{P_k}. \quad (12)$$

МАНТИЙНЫЙ ТЕПЛОВОЙ ПОТОК

Восходящий тепловой поток с земной поверхности ($B_0 \in S_0$) разделяется на составляющие от источников радиогенной теплогенерации Q в земной коре и от поверхностных источников с подошвы мантийного слоя, $q(B_0) = q_Q(B_0) + q_\mu(B_0)$:

$$\begin{aligned} q(B_0) &= \frac{\lambda_1}{4\pi} (N_0 \cdot \nabla_{B_0}) \left(\iiint_D \frac{Q(C)}{\lambda(C)} K(B_0, C) dV_C + \right. \\ &\left. + \iint_{S_H} \mu(P_H) K(B_0, P_H) dS_H \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Полагая $q(B_0) = q_{obs}$, получаем интегральное уравнение относительно мантийных источников $\mu(P_H)$ на нижней граничной плоскости S_H :

$$\begin{aligned} q_\mu(B_0) &= q_{obs} - q_Q(B_0) = \\ &= \frac{\lambda_1}{4\pi} \iint_{S_H} \mu(P_H) (N_0 \cdot \nabla_{B_0}) K(B_0, P_H) dS_H. \end{aligned} \quad (14)$$

Уравнение (14) позволяет решить обратную задачу продолжения мантийной составляющей теплового потока через неоднородно-слоистую среду с уровня земной поверхности $z = 0$ на глубину $z = H$. Обратный пересчёт поля вверх на криволинейную поверхность $z = z_M(x, y)$ находится из решения прямой задачи:

$$\begin{aligned} q_\mu(B_M) &= (N_M \cdot q_\mu(B_M)) = \\ &= \frac{\lambda_M}{4\pi} \iint_{S_H} \mu(P_H) (N_M \cdot \nabla_{B_M}) K(B_M, P_H) dS_H. \end{aligned} \quad (15)$$

Последовательное применение формул пересчёта (14–15) позволяет исключить неизвестную напряжённость глубинного поля $\mu(P_H)$ и связать тепловой поток $q_\mu(B_M)$ на кровле верхней мантии с его значением $q_\mu(B_0)$ на поверхности Земли.

ПРИМЕР ПРАКТИЧЕСКОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ

По авторской методике сеточного моделирования построена трёхмерная сейсмо-плотностная модель верхней части литосферы Уральского региона до глубины 80 км [4–5]. Карта-схема наблюдаемых значений теплового потока q_{obs} на сетке (10×10) км² получена по результатам геотермических измерений в скважинах [6–7].

Распределение теплофизических параметров в земной коре и верхней мантии пересчитывались на сеточную базу плотностной модели по выборке экспериментальных данных [6]. Переходные зоны значимых изменений теплопроводности принимались за границы тепловых контактов. Аддитивные алгоритмы вычисления теплового потока (13) и блок-схемы глубинных пересчётов (14–15) реализованы на сетке поля $q_{obs}(x, y, 0)$.

На рис. 2 приведён результат пересчёта мантийной составляющей теплового потока на глубины, соответствующие отметкам криволинейной границы М. Отметим, что распределение пересчитанных тепловых полей хорошо согласуется с рельефом мантийной границы [5].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пространстве обобщённых функций получено замкнутое решение задачи теплового сопряжения для модели слоистого пласта с условиями Дирихле–Неймана на его внешних границах. При малом контрасте теплопроводности сопредельных слоёв тепловой поток разделяется на аддитивные составляющие от коровых и мантийных источников поля.

В основе комплексной интерпретации тепловых и гравитационных аномалий лежит принцип суперпозиции полей.

Разработан алгоритм пересчёта мантийной составляющей теплового потока с уровня земной поверхности на кровлю верхней мантии через слоисто-неоднородную среду. Выполнено районирование мантийных структур по глубинному тепловому потоку и сопоставлены аномалии рельефа границы Мохо с аномалиями теплового поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1999.
2. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
3. Владимиров В.С., Жаринов В.В. Уравнения математической физики. М.: Физматлит, 2000.
4. Мартышко П.С., Ладовский И.В., Федорова Н.В. и др. Теория и методы комплексной интерпретации геофизических данных. Екатеринбург: УрО РАН, 2016.
5. Martysenko P., Ladovskii I., Byzov D., et al. Density Earth's Crust Models Creation Using Gravity and Seismic Data. In: SGEM2018 Conf. Proc. 18th Int. Multidisciplinary Sc. GeoConference SGEM 2018, Albena, Bulgaria. V. 18. Iss. 1.1. P. 749–754. DOI: 10.5593/SGEM2018/1.1.
6. Голованова И.В. Тепловое поле Южного Урала. М.: Наука, 2005.
7. Дучков А.Д., Железняк М.Н., Аюнов Д.Е. и др. Геотермический атлас Сибири и Дальнего Востока (2009–2015). <http://maps.nrcgit.ru/geoterm/>.

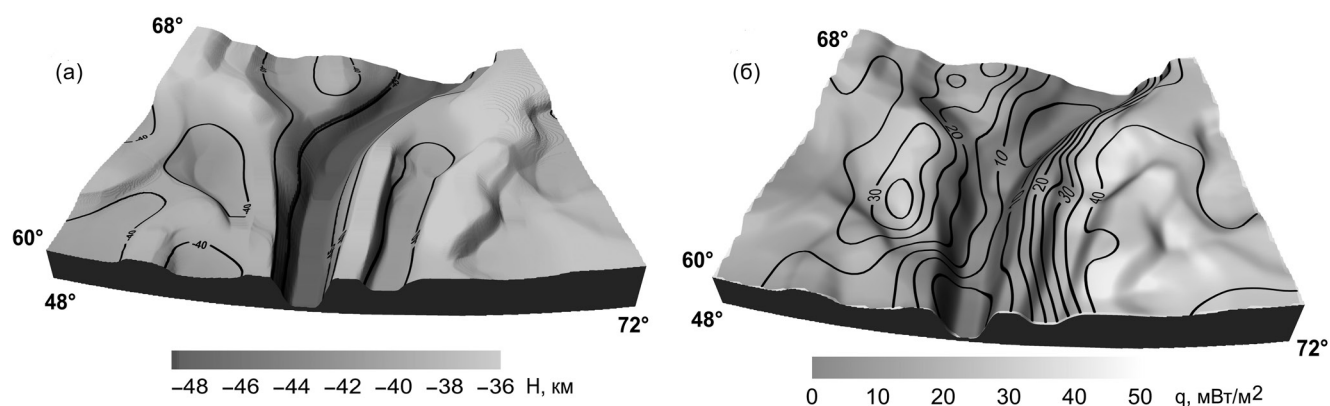


Рис. 2. Мантийный тепловой поток: а) рельеф сейсмогеологической границы М; б) глубинная составляющая потока, пересчитанного на кровлю верхней мантии.

CONJUGACY PROBLEM FOR STATIONARY HEAT FIELDS**I. V. Ladovsky, Corresponding Member of the RAS P. S. Martyshko, D. D. Byzov, A. G. Tsidaev***Institute of Geophysics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian Federation*

Received May 6, 2019

Analytic solution for thermal conjugation stationary problem is obtained for the model of layered inhomogeneous media. Heat flux components for crust and mantle are selected. Recalculation of mantle component of flux down to the mantle top was performed, the results compared with relief of deep structures.

Keywords: layered inhomogeneous media, thermal parameters jump, problem of thermal conjugation, mantle heat flux.