ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 3, с. 233–236

МАТЕМАТИКА

УДК 519.64, 517.2

О ПРИБЛИЖЁННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА С ИМПЕДАНСНЫМ УСЛОВИЕМ

А. Р. Алиев[1,2,*], **Р. Дж. Гейдаров**[1,3,**]

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим 14.05.2019 г.

Поступило 15.05.2019 г.

Дано обоснование метода коллокации для интегрального уравнения краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием. Кроме того, построена последовательность, сходящаяся к точному решению данной краевой задачи, и дана оценка погрешности.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, краевая задача с импедансным условием, метод коллокации, кубатурная формула, поверхностный интеграл.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524883233-236

1. Постановка задачи. Известно, что процесс распространения акустических волн в однородной изотропной среде описывается уравнением Гельмгольца. Одним из методов решения граничной задачи для уравнения Гельмгольца является их приведение к интегральному уравнению. Поскольку интегральные уравнения в замкнутом виде решаются лишь в очень редких случаях, первостепенное значение приобретает разработка приближённых методов решения интегральных уравнений с соответствующим теоретическим обоснованием.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с границей $S \in \Lambda_\alpha$, где Λ_α – класс поверхностей Ляпунова с показателем $0 < \alpha \le 1$. Напомним, что краевая задача для уравнения Гельмгольца с импедансным условием заключается в следующем: найти дважды непрерывно-дифференцируемую на $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ и непрерывную на S функцию u, обладающую нормальной производной в смысле равномерной сходимости, удовлетворяющую уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$ в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, условию излучения Зоммерфельда на бесконечности и граничному условию

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \mathbf{n}(x)} + f(x)u(x) = g(x) \text{ на } S,$$

где k – волновое число, $\operatorname{Im} k \ge 0$, $\mathbf{n}(x)$ – единичная внешняя нормаль в точке $x \in S$, а f и g – заданные непрерывные функции на S, $\operatorname{Im}(\overline{k}\, f(x)) \ge 0$, $x \in S$.

Отметим, что, разыскивая решение внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием в виде комбинации потенциалов простого и двойного слоёв, исходная задача приводится к гиперсингулярному интегральному уравнению, зависящему от нормальной производной акустического потенциала двойного слоя (см. [1, с. 111]). Следует указать, что в работах [2, 3] приведено обоснование метода коллокации для гиперсингулярных интегральных уравнений. Однако в этих работах процесс нахождения обратных матриц существенно усложняет вычисление коэффициентов системы алгебраических уравнений. Исходя из этих соображений исследование приближённого решения внешней краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием методом слабо сингулярных интегральных уравнений является более предпочтительным.

Пусть $v(x, \varphi)$ – акустический потенциал простого слоя, $w(x, \varphi)$ – акустический потенциал двойного слоя, а $v_0(x, \varphi)$ – потенциал простого слоя для уравнения Лапласа, т.е.

$$v(x, \varphi) = \int_S \Phi_k(x, y)\varphi(y)\, dS_y,$$

$$w(x, \varphi) = \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} \varphi(y)\, dS_y,$$

$$v_0(x, \varphi) = v(x, \varphi)\big|_{k=0} = \int_S \Phi_0(x, y)\varphi(y)\, dS_y,$$

где $\Phi_k(x, y) = \dfrac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$ есть фундаментальное решение уравнения Гельмгольца. В работе [4] показано, что функция

$$u(x) = v(x, \varphi) + i\eta\, w(x, v_0), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D},$$

[1] *Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности, Баку, Азербайджан*

[2] *Институт математики и механики Национальной академии наук Азербайджана, Баку, Азербайджан*

[3] *Гянджинский государственный университет, Азербайджан*

* *E-mail: alievaraz@yahoo.com*

** *E-mail: heyderov.rahib@gmail.com*

(где η – действительное число, причём если $\operatorname{Im} k > 0$, то $\eta = 0$, а если $\operatorname{Im} k = 0$, то $\eta \neq 0$) является решением краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием, если плотность $\varphi \in C(S)$ (через $C(S)$ обозначено пространство непрерывных функций на S с нормой

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in S} |f(x)|)$$

является решением однозначно разрешимого интегрального уравнения

$$\varphi + A\varphi = \psi, \tag{1}$$

где

$$A = -2(2 + i\eta)^{-1}\left(2K + 2i\eta\,(T + G) + \right.$$
$$\left. + f(2L + 2i\eta\, F + i\eta\, L^{(0)})\right),$$

$$\psi = -4(2 + i\eta)^{-1} g,$$

$$(L\varphi)(x) = \int_S \Phi_k(x, y)\varphi(y)\,dS_y,$$

$$(L^{(0)}\varphi)(x) = (L\varphi)(x)\,|_{k=0},$$

$$(K\varphi)(x) = \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \mathbf{n}(x)} \varphi(y)\,dS_y,$$

$$(F\varphi)(x) = \int_S \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \mathbf{n}(y)} \left(\int_S \Phi_0(y, t)\varphi(t)\,dS_t \right) dS_y,$$

$$(G\varphi)(x) = \int_S \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \mathbf{n}(x)} \left(\int_S \frac{\partial \Phi_0(y, t)}{\partial \mathbf{n}(y)} \varphi(t)\,dS_t \right) dS_y,$$

$$(T\varphi)(x) = \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x)} \left(\frac{\partial\left(\Phi_k(x, y) - \Phi_0(x, y)\right)}{\partial \mathbf{n}(y)} \right) \times$$
$$\times \left(\int_S \Phi_0(y, t)\,\varphi(t)\,dS_t \right) dS_y, \quad x \in S.$$

Известно, что (см. [1, с. 52]) операторы L, K, F, G и T ограниченно действуют из $C(S)$ в $H_\beta(S)$, где $H_\beta(S)$ – пространство функций, определённых на поверхности S и удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем

$$\beta = \begin{cases} \alpha, \text{ если } \alpha \in (0, 1), \\ 0 < \beta < 1, \text{ если } \alpha = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Отметим, что есть целый ряд работ (см. [5–8]), в которых исследованы приближённые решения интегральных уравнений различных краевых задач для уравнения Гельмгольца. В настоящей работе изучено приближённое решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием методом интегральных уравнений (1).

2. Основные результаты. Разобьём S на элементарные области $S = \bigcup_{l=1}^{N} S_l$:

1) для $\forall\, l \in \{1, 2, \dots, N\}$ область S_l замкнута и множество $\overset{0}{S_l}$ её внутренних относительно S точек не пусто, причём $\operatorname{mes} \overset{0}{S_l} = \operatorname{mes} S_l$ и $\overset{0}{S_l} \cap \overset{0}{S_j} = \phi$ при $j \in \{1, 2, \dots N\}$, $j \neq l$;

2) для $\forall\, l \in \{1, 2, \dots, N\}$ область S_l представляет собой связный кусок поверхности S с непрерывной границей;

3) для $\forall\, l \in \{1, 2, \dots, N\}$ существует так называемая опорная точка $x_l \in S_l$ такая, что:

а) $r_l(N) \sim R_l(N)$

($r_l(N) \sim R_l(N) \Leftrightarrow C_1 \leq r_l(N)/R_l(N) \leq C_2$,

C_1 и C_2 – положительные постоянные, не зависящие от N), где $r_l(N) = \min_{x \in \partial S_l} |x - x_l|$ и $R_l(N) = \max_{x \in \partial S_l} |x - x_l|$;

б) $R_l(N) \leq d/2$, где d – радиус стандартной сферы (см. [9, с. 400]);

в) для $\forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$ $r_j(N) \sim r_l(N)$.

Очевидно, что $r(N) \sim R(N)$ и $\lim_{N \to \infty} R(N) = 0$, где

$$R(N) = \max_{l=1,\dots,N} R_l(N), \quad r(N) = \min_{l=1,\dots,N} r_l(N).$$

Такое разбиение, как и разбиение единичной сферы на элементарные части, ранее было приведено в [10].

Пусть

$$c_{lj} = \left|\operatorname{sgn}(l - j)\right| \frac{\partial \Phi_k(x_l, x_j)}{\partial \mathbf{n}(x_j)} \operatorname{mes} S_j, \quad c_{lj}^{(0)} = c_{lj}\big|_{k=0},$$

$$d_{lj} = \left|\operatorname{sgn}(l - j)\right| \Phi_k(x_l, x_j) \operatorname{mes} S_j, \quad d_{lj}^{(0)} = d_{lj}\big|_{k=0},$$

$$g_{lj} = \left|\operatorname{sgn}(l - j)\right| \frac{\partial \Phi_k(x_l, x_j)}{\partial \mathbf{n}(x_l)} \operatorname{mes} S_j, \quad g_{lj}^{(0)} = g_{lj}\big|_{k=0},$$

$$t_{lj} = \left|\operatorname{sgn}(l - j)\right| \times$$
$$\times \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}(x_l)} \left(\frac{\partial\left(\Phi_k(x_l, x_j) - \Phi_0(x_l, x_j)\right)}{\partial \mathbf{n}(x_j)} \right) \operatorname{mes} S_j,$$

$$a_{lj} = -2(2 + i\eta)^{-1}\left(2g_{lj} + 2i\mu \left(\sum_{m=1}^{N} t_{lm} d_{mj}^{(0)} + \sum_{m=1}^{N} g_{lm}^{(0)} g_{mj}^{(0)} \right) + \right.$$
$$\left. + f(x_l)\left(2d_{lj} + i\eta\, d_{lj}^{(0)} + 2i\eta \sum_{m=1}^{N} c_{lm} d_{mj}^{(0)} \right) \right).$$

Для непрерывной на S функции $\varphi(x)$ введём модуль непрерывности вида

$$\omega(\varphi,\delta) = \max_{\substack{|x-y|\le\delta\\ x,y\in S}} |\varphi(x)-\varphi(y)|, \quad \delta>0 .$$

В работе [11] построена кубатурная формула для интегралов $(L\varphi)(x)$ и $(K\varphi)(x)$, а в работе [12] построена кубатурная формула для интегралов $(F\varphi)(x)$, $(G\varphi)(x)$ и $(T\varphi)(x)$. Учитывая эти результаты, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Выражение*

$$(A^N\varphi)(x_l) = \sum_{j=1}^{N} a_{lj}\,\varphi(x_j) \qquad (3)$$

в точках x_l, $l = 1,2,\dots N$, *является кубатурной формулой для* $(A\varphi)(x)$, *причём справедлива следующая оценка*:

$$\max_{l=1,\dots,N} \left|(A\varphi)(x_l) - (A\varphi)^N(x_l)\right| \le$$
$$\le M\left(\|\varphi\|_\infty (R(N))^\alpha\,|\ln R(N)| + \omega(\varphi, R(N))\right).$$

Здесь и далее через M обозначены положительные постоянные, разные в различных неравенствах.

Для $z^N\in\mathbb{C}^N$ (здесь через $\mathbb{C}^N$ обозначено пространство N-мерных векторов $z^N=(z_1^N, z_2^N, \dots, z_N^N)$, $z_l^N\in\mathbb{C}$, $l=1,2,\dots,N$, с нормой $\|z^N\| = \max_{l=1,\dots,N}|z_l^N|$) положим $A^N z^N = (A_1^N z^N, A_2^N z^N, \dots, A_N^N z^N)$, где

$$A_l^N z^N = \sum_{j=1}^{N} a_{lj} z_j^N, \quad l = 1,2,\dots,N.$$

Используя кубатурную формулу (3), граничное интегральное уравнение (1) заменяем системой алгебраических уравнений относительно z_l – приближённых значений $\varphi(x_l)$, $l=1,2,\dots,N$, которую запишем в виде

$$z^N + A^N z^N = \psi^N, \qquad (4)$$

где $\psi^N = p^N\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_N)$, $\psi_l = \psi(x_l)$, $l=1,2,..,N$, p^N – оператор простого сноса, ограниченно действующий из $C(S)$ в $\mathbb{C}^N$, и $A^N:\mathbb{C}^N\to\mathbb{C}^N$ – линейный ограниченный оператор.

Теорема 2. *Уравнения* (1) *и* (4) *имеют единственные решения* $\varphi_*\in C(S)$ *и* $z_*^N\in\mathbb{C}^N$, *соответственно, и* $\|z_*^N - p^N\varphi_*\|\to 0$ *при* $N\to\infty$ *с оценкой скорости сходимости*

$$\|z_*^N - p^N\varphi_*\| \le M[\omega(f,R(N)) + \omega(g,R(N)) + (R(N))^\beta],$$

где число β *определяется из* (2).

Кратко наметим доказательство теоремы 2. В работе [4] доказано, что $\operatorname{Ker}(I+A)=\{0\}$, где I – единичный оператор на $C(S)$. Тогда, применяя теорему Г.М. Вайникко о сходимости для линейных операторных уравнений (см. [13, с. 14]), получаем, что уравнения (1) и (4) имеют единственные решения $\varphi_*\in C(S)$ и $z_*^N\in\mathbb{C}^N$, соответственно, причём

$$c_1\delta_N \le \|z_*^N - p^N\varphi_*\| \le c_2\delta_N ,$$

где

$$c_1 = \frac{1}{\sup_N \|I^N + A^N\|} > 0, \quad c_2 = \sup_N \|(I^N + A^N)^{-1}\| < +\infty,$$

$$\delta_N = \max_{l=1,\dots,N} \left|A_l^N(p^N\varphi_*) - (A\varphi_*)(x_l)\right|.$$

В силу оценки погрешности кубатурной формулы (3) получаем, что

$$\delta_N \le M\left(\|\varphi_*\|_\infty (R(N))^\alpha\,|\ln R(N)| + \omega(\varphi_*, R(N))\right).$$

Так как $\varphi_* = (I+A)^{-1}\psi$, то

$$\|\varphi_*\|_\infty \le \left\|(I+A)^{-1}\right\|\|\psi\|_\infty \le M\|g\|_\infty .$$

Кроме того, учитывая, что

$$\omega(A\varphi_*, R(N)) \le M\|\varphi_*\|_\infty\left(\omega(f,R(N)) + (R(N))^\beta\right),$$

имеем

$$\omega(\varphi_*, R(N)) = \omega(\psi - A\varphi_*, R(N)) \le \omega(\psi, R(N)) +$$
$$+\omega(A\varphi_*, R(N)) \le M[\omega(g,R(N)) + \omega(f,R(N)) +$$
$$+ (R(N))^\beta].$$

В результате из выше полученных оценок находим, что

$$\delta_N \le M[\omega(f,R(N)) + \omega(g,R(N)) + (R(N))^\beta].$$

Из теоремы 2 непосредственно вытекает

Теорема 3. *Пусть* $z_*^N = (z_1^*, z_2^*, \dots, z_N^*)^T$ *является решением системы алгебраических уравнений* (4) *и* $x_0\in\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$. *Тогда последовательность*

$$u_N(x_0) = \sum_{j=1}^{N}\Phi_k(x_0,x_j)\,z_j^*\,\mathrm{mes}\,S_j + i\eta\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\Phi_k(x_0,x_j)}{\partial\mathbf{n}(x_j)}\times$$
$$\times\left(\sum_{\substack{m=1\\ m\ne j}}^{N}\Phi_0(x_j,x_m)\,z_m^*\,\mathrm{mes}S_m\right)\mathrm{mes}\,S_j$$

сходится к решению $u(x)$ *краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием в точке* x_0, *причём*

$$|u_N(x_0) - u(x_0)| \le M[\omega(f,R(N)) +$$
$$+ \omega(g,R(N)) + (R(N))^\beta],$$

где число β *определяется из* (2).

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке "Университетского гранта" Азербайджанского государственного университета нефти и промышленности (грант № ADNSU–2018–1–01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колтон Д., Кресс Р.* Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. 311 с.
2. *Халилов Э.Г.* Конструктивный метод решения краевой задачи для уравнения Гельмгольца с импедансным условием // Дифф. уравнения. 2018. Т. 54. № 4. С. 544–555.
3. *Khalilov E.H., Aliev A.R.* Justification of a quadrature method for an integral equation to the external Neumann problem for the Helmholtz equation // Math. Methods in the Appl. Sci. 2018. V. 41. № 16. P. 6921–6933.
4. *Heydarov R.J.* On Solvability of an External Problem with Impedance Boundary Condition for Helmholtz Equation by Integral Equations Method // Proc. IMM of NAS of Azerbaijan. 2016. V. 42. № 1. P. 3–9.
5. *Каширин А.А., Смагин С.И.* О численном решении задач Дирихле для уравнения Гельмгольца методом потенциалов // ЖВМиМФ. 2012. Т. 52. № 8. С. 1492–1505.
6. *Халилов Э.Г.* Обоснование метода коллокации для интегрального уравнения смешанной краевой задачи для уравнения Гельмгольца // ЖВМиМФ. 2016. Т. 56. № 7. С. 1340–1348.
7. *Harris P.J., Chen K.* On Efficient Preconditioners for Iterative Solution of a Galerkin Boundary Element Equation for the Three-dimensional Exterior Helmholtz Problem // J. Comp. App. Mat. 2003. V. 156. P. 303–318.
8. *Kress R.* Boundary Integral Equations in Time-harmonic Acoustic Scattering // Math. and Comp. Modelling. 1991. V. 15. № 3–5. P. 229–243.
9. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
10. *Кустов Ю.А., Мусаев Б.И.* Кубатурная формула для двумерного сингулярного интеграла и ее приложения. М., 1981. Деп. в ВИНИТИ. № 4281-81. 60 с.
11. *Khalilov E.H.* Cubic Formula for Class of Weakly Singular Surface Integrals // Proc. IMM of NAS of Azerbaijan. 2013. V. 39 (47). P. 69–76.
12. *Heydarov R.J.* Cubature formula for a class of surface integrals generated by weakly-singular integrals // Proc. Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. 2017. V. 43. № 1. P. 98–104.
13. *Вайникко Г.М.* Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1979. Т. 16. С. 5–53.

ON THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE HELMHOLTZ EQUATION WITH IMPEDANCE CONDITION

A. R. Aliev[1,2], R. J. Heydarov[1,3]

[1]*Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan*

[2]*Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences, Baku, Azerbaijan*

[3]*Ganja State University, Ganja, Azerbaijan*

Presented by Academicain of the RAS V. A. Sadovnichiy May 14, 2019

Received May 15, 2019

In this work, we present a justification of collocation method for integral equation of the impedance boundary value problem for the Helmholtz equation. We also build a sequence which converges to the exact solution of our problem and we obtain an error estimate.

Keywords: Helmholtz equation, impedance boundary value problem, collocation method, cubature formula, surface integral.