ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 3, с. 243–247

МАТЕМАТИКА

УДК 517

ГАМИЛЬТОНОВЫ МЕРЫ ФЕЙНМАНА, ИНТЕГРАЛ КОЛМОГОРОВА И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

О. Г. Смолянов[1,2,*], Н. Н. Шамаров[1,2,]**

Представлено кадемиком РАН В.В. Козловым 15.11.2018 г.

Поступило 16.05.2019 г.

Обсуждаются свойства бесконечномерных псевдодифференциальных операторов (ПДО), в частности, рассматривается связь между определением, использующим гамильтонову меру Фейнмана, и введённым в настоящей работе определением, использующим интеграл Колмогорова.

Ключевые слова: дифференцируемые меры, бесконечномерные псевдодифференциальные операторы (ПДО), ПДО в пространствах мер, бесконечномерные символы Вейля, гамильтоновы меры Фейнмана, интеграл Колмогорова.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524883243-247

Интеграл Колмогорова можно определить как след в подходящем тензорном произведении пространства функций и пространства мер; при этом как функции, так и меры могут быть обобщёнными. Если $(X, \mathcal{B})$ – измеримое пространство (X – множество, $\mathcal{B}$ – σ-алгебра его подмножеств), $\mathcal{F}$ и $\mathcal{M}$ – пространства измеримых (вещественных или комплекснозначных) функций и σ-аддитивных числовых мер на нём и $\mathcal{F}\otimes\mathcal{M}$ – пополненное относительно некоторой топологии их тензорное произведение, то след $\operatorname{tr} p$ элемента $p\in\mathcal{F}\otimes\mathcal{M}$ обозначается символом $\int\limits_X p(x,dx)$ или символом $\int\limits_X p(x_1,dx_2)\,|_{x_2=x_1}$. Если $p=f\otimes\mu$, то след $\operatorname{tr} p$ совпадает со значением меры μ на функции f, т.е. $\operatorname{tr} p=(\mu,f)=\int\limits_X f(x)\mu(dx)$. Если f или μ – обобщённые элементы, то справедливо равенство $\operatorname{tr} p=(\mu,f)$, в котором символ (μ,f) – это значение линейного функционала, которым может быть как μ, так и f, на элементе из его области определения.

Сам А.Н. Колмогоров определял свой интеграл совсем по-другому и не упоминал понятие следа ни в определении, ни при формулировке свойств этого интеграла. Короткое и ясное введение в первоначальную теорию интегралов Колмогорова приводится в книге [1], где есть также ссылка на оригинальную статью Колмогорова, однако по-прежнему не упоминается связь этих интегралов с понятием следа.

Если Q и P – соответственно конфигурационное и импульсное пространства классической гамильтоновой системы, где Q и P – двойственные друг другу вещественные локально выпуклые пространства (с билинейной формой двойственности $b\colon Q\times P\to\mathbb{R}$), то гамильтонова мера Фейнмана на фазовом пространстве $E=Q\times P$ – это обобщённая мера Φ на нём, преобразование Фурье $\tilde{\Phi}\colon P\times Q\to\mathbb{C}$ которой определяется равенством $\tilde{\Phi}(p,q)=e^{ib(q,p)}$. Гамильтонова мера Фейнмана является интегральным ядром преобразования Фурье, переводящего функции в меры (возможно, обобщённые), и поэтому может быть использована при определении бесконечномерных ПДО (см. [2]).

С другой стороны, бесконечномерные ПДО можно определять, используя интеграл Колмогорова. Это означает, что существует связь между интегралом Колмогорова и гамильтоновыми мерами Фейнмана. Целью этого сообщения является обсуждение связей между объектами из его названия. Изложение носит в основном алгебраический характер, и аналитические предположения обычно опускаются.

1. Предварительные сведения. Фактически интеграл Колмогорова появляется, хотя и неявно, в вычислениях, связанных с определениями бесконечномерных ПДО, не использующими конечномерных аппроксимаций (см. [2, 3]). При этом возникают объекты, аналогичные переходным вероятностям, которые можно считать элементами тензорных произведений подходящих пространств функций и мер (возможно, обобщённых); такие объекты мы называем переходными амплитудами. Переходной амплитуде $a(\cdot,\cdot)$ сопоставляется её (воз-

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

[2] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.*

* *E-mail: smolyanov@yandex.ru*

** *E-mail: nshamarov@yandex.ru*

можно, обобщённый) след, который определяет обобщённую меру, которую можно считать также задаваемой (“неопределённым”) интегралом Колмогорова.

Всюду далее $E = Q\times P$, где Q – сепарабельное вещественное гильбертово пространство, $P = Q'$ – его гильбертово сопряжённое, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \ldots\}$ – ортонормированный базис в Q и $\mathcal{E}' = \{e_1', e_2', \ldots\}$ – его образ в P. Пространство E обладает естественной симплектической структурой (задаваемой оператором $I\colon E' \to E$, где $E' \cong P\times Q$ и $I(p,q) = (q,-p)$, $q \in Q$, $p \in P$), которая определяет скобку Пуассона $\{\cdot,\cdot\}$ в множестве гладких функций на E: именно, если f и g – две функции, то $\{f,g\}(z) = f'(z)(I\,g'(z))$, $z \in E$. Алгеброй Пуассона на E мы будем называть (вообще говоря, бесконечномерную) алгебру Ли, векторное пространство которой образовано гладкими функциями на E; при этом предполагается, что умножение в этой алгебре задаётся скобкой Пуассона (ср. [11]). Элементы алгебры Пуассона называются классическими наблюдаемыми на E. Квантованием [4–6] называется линейное отображение множества классических наблюдаемых в множество псевдодифференциальных операторов, при котором каждая классическая наблюдаемая $A\colon Q\times P \to \mathbb{R}$ переходит в ПДО $\hat{A}$, символом Вейля которого она является. Конечно, помимо символов Вейля можно использовать также и другие символы (см. ниже).

При этом соответствующие экспонентам от построенных ПДО формулы Фейнмана задают аппроксимации интегралов по гамильтоновым мерам Фейнмана на пространствах отображений отрезков в пространства $Q\times P$. Стоит подчеркнуть, что в некоторых определениях бесконечномерных ПДО, в том числе и в одном из приведённых ниже, используются гамильтоновы меры Фейнмана на $Q\times P$.

Полиномами на E (это определение зависит от базиса $\mathcal{E}$) называются полиномы с комплексными коэффициентами от конечного числа координат в базисе $\mathcal{E}\cup\mathcal{E}'$. $\mathcal{E}$ – операторным квантованием на гильбертовом фазовом пространстве $E = Q\times P$ называется линейное отображение, сопоставляющее каждому полиному $k\colon E \to \mathbb{R}$ плотно определённый и замыкаемый в подходящем локально выпуклом пространстве комплексных бесконечно дифференцируемых по Гато вдоль линейной оболочки базиса $\mathcal{E}$ функций на Q линейный оператор $\hat{k}$ (называемый квантовой наблюдаемой), так что если полином k зависит только от координат пространства Q, т.е. $k(q,p) = f(q)$, то $\hat{k}$ – оператор умножения на f, а если k зависит только от координат пространства P, т.е. $k(q,p) = g(p_1,\ldots,p_n)$, то $\hat{k}$ – дифференциальный оператор $g(-i\dfrac{\partial}{\partial q_1},\ldots,-i\dfrac{\partial}{\partial q_n})$. Если такое квантование осуществляется отображением $k \mapsto \hat{k}$, то операторы $\hat{k}$ называются ПДО с символом k.

Известно, что при $\mathrm{d} = \dim Q < \infty$ для всякого $\tau \in \mathbb{R}$ таким квантованием является отображение $k \mapsto \hat{k}_\tau$, определяемое на гладких функциях $k\colon E \to \mathbb{R}$ умеренного роста так: для каждой функции ψ из пространства $\mathcal{S}$ Шварца на Q и для каждого $x \in Q$

$$(\hat{k}_\tau\psi)(x) = (2\pi)^{-\mathrm{d}}\int\limits_P\left(\int\limits_Q e^{ip(x-q)}k(\tau q + (1-\tau)x, p)\psi(q)dq\right)dp; \qquad (1)$$

при этом отображения $k \mapsto \hat{k}_0$, $k \mapsto \hat{k}_1$ и $k \mapsto \hat{k}_{1/2}$ называются, соответственно, qp-квантованием, pq-квантованием и вейлевским квантованием.

Далее приведены две конструкции квантований, которые распространяются на случай бесконечномерной области определения функций, преобразуемых квантовыми наблюдаемыми. Одна из конструкций (ср. [3, 7]) использует гамильтонову меру Фейнмана. В обсуждаемой ниже конструкции используется интеграл Колмогорова, причём конструкция из [3, 7] является её естественным продолжением. Отметим, что её можно использовать для альтернативного определения тех гамильтоновых мер Фейнмана, которые использовались перед этим для определения бесконечномерных ПДО.

2. Обобщённая мера Фейнмана и бесконечномерные ПДО. Чтобы перейти к бесконечномерной версии формулы, содержащей конечнократные интегралы, полезно записать эту формулу в виде, не зависящем от размерности пространства. Именно, вводя в (1) новую переменную интегрирования $q' = q - x$ (при фиксированном x), находим

$$\hat{k}_\tau\psi(x) = (2\pi)^{-\mathrm{d}}\int\limits_P\left(\int\limits_Q e^{-ip\cdot q'}k(x+\tau q', p)\psi(x+q')dq'\right)dp; \qquad (2)$$

возвращаясь к прежнему обозначению переменной интегрирования и меняя знак при q, получаем равенство

$$\hat{k}_\tau\psi(x) = (2\pi)^{-\mathrm{d}}\int\limits_P\left(\int\limits_Q e^{ip\cdot q}k(x-\tau q, p)\psi(x-q)dq\right)dp; \qquad (3)$$

в силу плотности S в S' мы можем и будем считать, что функция k принадлежит $\mathcal{S}(Q\times P)$. Тогда правую часть равенства (3) можно интерпретировать как применение к функции $Q\times P\ni(q,p)\mapsto k(x-\tau q,p)\times$ $\times\psi(x-q)$, являющейся элементом $S(Q\times P)$ (при фиксированных τ и x) той регулярной обобщённой функции из $S'(Q\times P)$, которая обладает плотностью $(2\pi)^{-d}e^{ip\cdot q}$ и S'-преобразованием Фурье (на сопряжённом пространстве E', снова отождествляемым с $P\times Q$) вида $E'\ni(p',q')\mapsto e^{ip'\cdot q'}$, и которая далее обозначается Φ_s. Отметим, что именно независимость вида этой формулы для преобразования Фурье от размерности пространства E и позволяет совершить обобщение формулы (1) на случай бесконечномерного E. Применение такой обобщённой функции (функционала) Φ_s естественно [8] назвать интегрированием по обобщённой симплектической мере Фейнмана (обладающей неограниченной вариацией даже в конечномерном случае); поэтому правую часть формулы (3) можно обозначать символом

$$\int_E k(x-\tau q,p)\psi(x-q)\Phi_s(dq,dp). \tag{4}$$

Если меру $\Phi_s(dq,dp)$ заменить обобщённой мерой $e^{-(p^2+q^2)t}\Phi_s(dq,dp)$, $t>0$, то можно снова вернуться к случаю полиномиальной k.

Для обсуждаемого обобщения назовём гильбертовым преобразованием Фурье комплексной счётно-аддитивной меры m, заданной на борелевской сигма-алгебре пространства $E'\cong P\times Q$ (сопряжённого к фазовому пространства $E=Q\times P$) функцию $\widetilde{m}\colon E\to\mathbb{C}$, задаваемую формулой

$$\widetilde{m}(q,p)=\int_{E'}e^{i(p\cdot q'+p'\cdot q)}m(dp',dq'),$$

а интегралом по обобщённой симплектической мере Фейнмана (с преобразованием Фурье последней вида $e^{ip\cdot q}$) – линейный функционал Φ_s на пространстве $\widetilde{M}(E')$ всех гильбертовых преобразований Фурье вида $\widetilde{m}$, задаваемый формулой (где функционал отождествляется с определяемой им обобщённой мерой)

$$\widetilde{M}(E')\ni\widetilde{m}\mapsto\int_{E'}e^{ip'\cdot q'}m(dp',dq')\equiv\Phi_s(\widetilde{m})\equiv$$
$$\equiv\int_E\widetilde{m}(q,p)\Phi_s(dq,dp).$$

В этих терминах можем определить результат применения ПДО с τ-символом k к функции ψ, являющейся преобразованием Фурье борелевской счётно-аддитивной меры на бесконечномерном пространстве P, как функцию переменной $x\in Q$ по формуле (4).

Такие формулы для ПДО позволяют выписывать аппроксимирующие формулы для разрешающих полугрупп линейных эволюционных уравнений, правые части которых содержат эти ПДО, являющиеся генераторами полугрупп, по следующей схеме.

Можно показать, что замыкания операторов $\hat{k}_\tau$ с полиномиальным отрицательным вещественным либо чисто мнимым символом k при подходящем расширении пространства $\widetilde{M}(Q)$ пробных функций на бесконечномерном гильбертовом пространстве являются генераторами сильно непрерывных однопараметрических операторных полугрупп $\{e^{t\hat{k}_\tau}\}_{t\geq 0}$, причём для плотного пространства функций φ справедливы гамильтоновы формулы Фейнмана

$$e^{t\hat{k}_\tau}\varphi=\lim_{n\to\infty}\left(\widehat{e^{(t/n)k}}_{\tau}\right)^n\varphi \qquad \text{(ср. с [9]).}$$

3. Интеграл Колмогорова и бесконечномерные ПДО. Описываемое определение бесконечномерного ПДО не содержит явно обобщённых мер, причём для полиномиальных символов опирается лишь на такой частный случай интеграла Колмогорова, вычисление которого сводится к нескольким обычным интегралам по счётно-аддитивным мерам.

Комплексным полиномом на Q называется функция $Q\to\mathbb{C}$, полиномиально (с комплексными коэффициентами) зависящая от конечного числа координат переменной $q\in Q$ в базисе $\mathcal{E}$, аналогично тому, как выше полиномом на $E=Q\times P$ назвали комплексную функцию на этом произведении, полиномиально зависящую от конечного числа координат переменных $q\in Q$ и $p\in P$ в базисе $\mathcal{E}\cup\mathcal{E}'$.

Пусть $k\colon E\to\mathbb{C}$ – полином на $E=Q\times P$ и $\tau\in\mathbb{R}$.

Определим два оператора: $(\hat{k})_\tau$ в некотором пространстве функций на Q и $(\hat{k}_M)_\tau$ в некотором пространстве счётно-аддитивных борелевских мер на P, в случае $\dim Q<\infty$ совпадающие с ПДО с τ-символом k.

Доказательство совпадения интеграла Колмогорова от (тензорного) произведения $f\otimes\mu$ комплексной функции $f\in L_1(\mu)$ на меру μ (при этом $(f\otimes\mu)(x,A)=f(x)\cdot\mu(A)$ для точки x и множества A) с интегралом Лебега $\int f(x)\mu(dx)$ можно найти в [1]. Далее на суммы таких произведений интеграл продолжается по аддитивности. Комплексные значения сумм вида $a(x,A)=\sum_k f_k(x)\cdot\mu_k(A)$, как функций точки и множества, можно считать описывающими "интенсивности" перехода частицы из точки x в множество A.

Определение 1. Будем считать, что борелевская функция $\psi\colon Q \to \mathbb{C}$ является элементом области определения оператора $(\hat{k})_\tau$, если при всех $q \in Q$ существует интеграл Колмогорова

$$\int\limits_P e^{ip\cdot q}\mu_{p,q,\psi,k}(dp')\,|_{p'=p},$$

обозначаемый при этом $((\hat{k})_\tau\psi)(q)$, где для каждого $p \in P$ $\mu_{p,q,\psi,k}$ – та единственная комплекснозначная цилиндрическая (возможно, счётно-аддитивная) мера на P, для которой при каждом $q' \in Q$ выполняется равенство

$$k(\tau q' + (1-\tau)q, p)\psi(q') = \int\limits_P e^{-ip'\cdot q'}\mu_{p,q,\psi,k}(dp').$$

Теорема 1. *В область определения оператора $(\hat{k})_\tau$ входят все произведения $f\tilde{\mu}$, где f – комплексный полином на Q и $\tilde{\mu}(q) = \int\limits_P e^{ip\cdot q}\mu(dp)$ – преобразование Фурье некоторой гауссовской меры μ с нулевым средним и инъективным диагональным в базисе $\mathcal{E}$ ядерным корреляционным оператором.*

Пространство функций, описанный в теореме 1, далее обозначим символом $\mathcal{S}_\mathcal{E}$.

Теорема 2. *Если для всех $(q,p) \in Q \times P$ $k(q,p) = g(q)$ для некоторого комплексного полиномома g на Q, то $(\hat{k})_\tau\psi = g\psi$.*

Теорема 3. *Если для всех $(q,p) \in Q \times P$ $k(q,p) = p \cdot e_j$ для некоторого $e_j \in \mathcal{E}$, то $(\hat{k})_\tau\psi = -i\psi' e_j$.*

Теорема 4. *При $\dim Q < +\infty$ и $\tau \in [0;1]$ для каждого полинома k на $Q \times P$ операторы $(\hat{k})_\tau$ и $\hat{k}_\tau$ совпадают на пространстве $\mathcal{S}_\mathcal{E}$.*

Доказательство этих и приводимых далее теорем фактически сводится к непосредственной (хотя и громоздкой) проверке.

Как известно, при $\dim Q < +\infty$ и $\tau = 1/2$ продолжения (совпадающие между собой) операторов $(\hat{k})_\tau$ и $\hat{k}_\tau H$ на класс Шварца $\mathcal{S}(Q)$ в случае вещественнозначных символов k являются симметричным оператором в $L_2(Q)$.

При этом в случае бесконечномерного Q сопряжённым к оператору $(\widehat{H})_\tau$, действующему в пространстве функций $\mathcal{S}_\mathcal{E}$, является оператор, действующий в пространстве мер.

Поэтому для того чтобы хотя бы сформулировать свойство симметричности для ПДО с полиномиальным ½-символом $k\colon Q \times P \to \mathbb{R}$, заданном на бесконечномерном фазовом пространстве E, нужно использовать оператор, аналогичный оператору $(\hat{k})_\tau$, но действующий в пространстве мер на Q.

Далее будет показано, что сопряжённый к оператору $(\hat{k})_\tau$ оператор $(\hat{k})^*_\tau$ в пространстве мер также может быть определён в терминах интеграла Колмогорова, для чего зададим дуальное к $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ (относительно двойственности $b(\psi,\mu) = \int\limits_Q \psi(q)\mu(dq)$) пространство мер; предварительно же опишем пространство $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ в более удобной форме.

Лемма 1. *Пространство $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ $(\equiv \mathcal{S}_\mathcal{E}(Q))$ состоит из преобразований Фурье тех мер, которые имеют полиномиальные плотности относительно всевозможных гауссовских мер на $P \cong Q'$ с нулевым средним и инъективным ядерным корреляционным оператором, диагональным в базисе $\mathcal{E}'$.*

Пространство мер, описанное в лемме 1, будет обозначаться символом $\mathcal{M}_{\mathcal{E}'}(P)(\equiv \mathcal{M}_{\mathcal{E}'}(P))$. Копию этого пространства, полученную с помощью отождествления P и Q и состоящую соответственно из борелевских мер на Q, обозначим аналогично: $\mathcal{M}_\mathcal{E}$ $(\equiv \mathcal{M}_\mathcal{E}(Q))$; это пространство и используем как двойственное к $\mathcal{S}_\mathcal{E}$.

Определение 2. Пусть, как и выше, $k\colon Q \times P \to \mathbb{C}$ является полиномом на $Q \times P$ и $\tau \in \mathbb{R}$. Для каждой меры $\mu \in \mathcal{M}_\mathcal{E}$ определим меру $(\hat{k}_M)_\tau\mu$, являющуюся значением на μ оператора $(\hat{k}_M)_\tau$, с помощью её преобразования Фурье. Именно, пусть для каждого $\eta \in P$ функция $\varphi_\eta\colon Q \to \mathbb{C}$ задаётся формулой $\varphi_\eta(q) = e^{i\eta(q)}$ и пусть функция $K_{k,\tau,\mu}$ удовлетворяет соотношению

$$\forall (q_0,p) \in Q \times P \int\limits_Q e^{ip(q_1)}K_{k,\tau,\mu}(q_0,dq_1) = \\ = \int\limits_Q e^{ip(q_1)}k(\tau q_1 + (1-\tau)q_0, p)\mu(dq_1).$$

Тогда

$$\int\limits_Q \varphi_\eta(q)((\hat{k}_M)_\tau\mu)(dq) = \int\limits_Q \varphi_\eta(q)K_{k,\tau,\mu}(q_0,dq)\,|_{q_0=q}.$$

Теорема 5. *Пусть $\dim Q < \infty$ и $\rho \in S_\mathcal{E}$, причём мера $\mu_\rho \in \mathcal{M}_\mathcal{E}$ имеет плотность ρ относительно борелевской меры Лебега в Q. Тогда*

$$((\hat{k}_M)_\tau\mu_\rho)(dq) = ((\hat{k})_\tau\rho)(q)dq.$$

Теорема 6. *Если для всех $(q,p) \in Q \times P$ $k(q,p) = g(q)$ для некоторого комплексного полиномома g на Q, то для всех $\mu \in \mathcal{M}_\mathcal{E}(Q)$ $(\hat{k}_M)_\tau\mu = g\mu$.*

4. Дифференциальные операторы в пространстве мер. Пусть $\mu \in \mathcal{M}_\mathcal{E}(Q)$ и $v \in H$. Для каждого подмножества $A \subset H$ полагаем $A + v = \{a + v\colon a \in A\}$; при этом равенство $\mu_v(A) =$

$=\mu(A+v)$, где A — множество из области определения меры μ, определяет меру $\mu_v \in \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Q)$.

Пусть ещё h — конечная линейная комбинация элементов базиса $\mathcal{E}$; тогда (см. [10]) существует производная

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mu_{th},$$

обозначаемая далее $\mu'h$ и называемая производной С.В. Фомина, где предел берётся в пространстве $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}(Q)$ в топологии сходимости на каждом множестве.

Теорема 7. *Если для всех* $(q,p) \in Q \times P$ $k(q,p) = p \cdot e_j$ *для некоторого* $e_j \in \mathcal{E}$, *то* $(\hat{k}_M)_\tau \mu = -i\mu' e_j$.

Оператор $(\hat{k}_M)_\tau$ из теоремы 7 (и его замыкания) можно назвать оператором компоненты импульса.

Теорема 8. *Для сопряжённого оператора* $(\hat{k})_\tau^*$ *к* ПДО $(\hat{k})_\tau$ *относительно билинейной двойственности между* $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ *и* $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ *справедливы равенства*

$$(\hat{k})_\tau^* \mu = \overline{(\hat{\bar{k}}_M)_{1-\tau}\bar{\mu}} \quad \text{и} \quad (\hat{k})_\tau^* = (\hat{k}_{-M})_{1-\tau},$$

где черта над функцией или мерой означает комплексное сопряжение и $k_-(q,p) = k(q,-p)$.

Определение 3. Если O — линейное непрерывное отображение O: $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{S}_{\mathcal{E}}$, то комплексно-сопряжённым к O называется отображение $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ в $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$, определённое равенством $\int f \overline{O^\dagger \mu} = \int (Of) \bar{\mu}$.

Следствие 1 (ср. [3]). *Во введённых обозначениях первое равенство предыдущей теоремы упрощается*: $(\hat{k})_\tau^\dagger = (\hat{\bar{k}}_M)_{1-\tau}$.

Следствие 2. *Если* $\tau = 1/2$ (*такое квантование естественно по-прежнему называть вейлевским*) *и функция* k *вещественна, то* (*опуская индекс* τ) $(\hat{k})^\dagger = \hat{k}_M$.

Последнее равенство позволяет называть вейлевское квантование ($\tau = 1/2$) вещественных гамильтонианов симметричным; при этом имеется в виду, что те же дифференциальные операторы (т.е. с теми же коэффициентами перед соответствующими частными производными) действуют в сопряжённом пространстве мер.

Источники финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке в рамках государственной программы повышения конкурентоспособности ведущих университетов Российской Федерации среди ведущих мировых научно-образовательных центров. Она пользовалась поддержкой Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова в рамках гранта "Фундаментальные проблемы математики и механики".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
2. *Смолянов О.Г.* // ДАН. 1982. Т. 263. № 3. С. 558–562.
3. *Козлов В.В., Смолянов О.Г.* // ДАН. 2012. Т. 444. № 6. С. 607–611.
4. *Dirac P.A.M.* // Proc. Roy. Soc. A. 1926. V. 144. P. 243.
5. *Fock V.* // Zs. f. Physik. 1928. V. 49. S. 339–357.
6. *Фейнман Р., Хибс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. 384 с.
7. *Ратью Т.С., Смолянов О.Г.* // ДАН. 2015. Т. 460. № 4. С. 385–388.
8. *Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т.* Континуальные интегралы. М.: URSS, 2015.
9. *Smolyanov O.G., Tokarev A.G., Truman A.* // J. Math. Physics. 2002. V. 43. № 10. P. 5161–5171.
10. *Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В.* // Тр. ММО. М.: Изд-во МГУ, 1971. Т. 24. С. 133–174.
11. *Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г.* // ДАН. 2019. Т. 486. № 6. С. 608–612.

HAMILTONIAN FEYNMAN MEASURES, KOLMOGOROV INTEGRAL AND INFINITE DIMENSIONAL PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS

O. G. Smolyanov[1,2], N. N. Shamarov[1,2]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[2] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov November 15, 2018

Received May 16, 2019

Properties of infinite dimensional pseudo-differential operators (PDO) are discussed; in particular, the connection between two definitions of the PDO is considered: one given in terms of the Hamiltonian Feynman measure, and another introduced in this work in terms of the Kolmogorov integral.

Keywords: differentiable measures on infinite dimensional spaces, pseudo-differentiable operators (PDO), PDO in spaces of measures, infinite-dimensional Weyl symbols, Hamiltonian Feynman measures, Kolmogorov integral.