

УДК 517.9

## УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И ИХ ОБОСНОВАНИЕ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Академик РАН В. Б. Бетелин<sup>1,\*</sup>, В. А. Галкин<sup>2,\*\*</sup>

Поступило 04.07.2019 г.

Работа посвящена проблеме, определяющей типовые характеристики вычислительной техники, связанные с объёмом необходимой работы для получения результата в заданной точке области вычислений. Применение сеточных методов связано с необходимостью постоянной обработки и хранения массивов данных, определяемых количеством элементов сетки, что прямо пропорционально производительности используемых систем. Рассматриваются альтернативные подходы для построения и обоснования вычислительных методов, не ориентированных на сеточную структуру аппроксимаций. Получено обоснование сходимости кинетических аппроксимаций к решению задачи Коши.

*Ключевые слова:* несеточные вычислительные методы, функциональные решения, высокопроизводительные вычисления, универсальная алгоритмическая среда.

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0869-56524884351-357>

Необходимость создания вычислительно-однородных быстродействующих систем на простой алгоритмической и элементной базе включает в себя выполнение следующих базовых требований:

- 1) разработка вычислительных алгоритмов, логически и структурно одинаковых для широкого класса задач;
- 2) обеспечение неограниченного наращивания однородной вычислительной среды при сохранении быстродействия в системах, защищённых от программных атак.

Центральной проблемой, определяющей типовые характеристики применяемой вычислительной техники, связанной с объёмом вычислительной работы, является способ получения результата в заданной точке области вычислений. Применение сеточных методов связано с необходимостью постоянной обработки и хранения массивов данных, определяемых количеством элементов сетки, что прямо пропорционально производительности вычислительной системы, необходимой для достижения цели за заданное время. Собственно говоря, размерность систем линейных алгебраических уравнений, порождённых сеткой, и временные рамки их решения

определяют растущие требования в гонке роста производительности ЭВМ. В частности, источниками задач такого уровня сложности служат модели порового пространства в нефтегазовой промышленности, газовая и гидродинамика, физическая кинетика [1].

Аналогичные по масштабу сложности проблемы связаны с моделированием динамики крови в кровеносных сосудах человека. Математически классы упомянутых задач характеризуются существенно нелинейной динамикой на крайне сложно устроенном многообразии. В связи с этим представляется важным выработать подходы, альтернативные сеточным аппроксимациям, основываясь на идее построения алгоритмов, в которых нелинейная динамика реализуется в виде проекции (информационного сжатия) посредством усреднения данных простой динамики в окрестности заданной точки расчётной области. Следует подчеркнуть, что данная точка выбирается произвольно в зависимости от потребностей вычислителя. Общий класс таких методов назовём несеточными методами, чтобы подчеркнуть отличие от сеточных методов, связанных с построением приближений на основе замены производных конечными разностями, либо проекциями на некоторое функциональное пространство, например, на основе построения сплайнов, конечных элементов, контрольных объёмов, или средних значений истории блужданий по заданной сетке на основе случайных розыгрышей по схеме Монте-Карло и т.п. Следует подчеркнуть, что в некотором смысле наиболее разработанной и универсальной является теория вычислительных методов для ли-

<sup>1</sup> Федеральный научный центр  
“Научно-исследовательский институт  
системных исследований  
Российской Академии наук”, Москва

<sup>2</sup> Филиал Федерального научного центра  
“Научно-исследовательский институт  
системных исследований  
Российской Академии наук” в г. Сургуте

\* E-mail: [betelin@niisi.msk.ru](mailto:betelin@niisi.msk.ru)

\*\* E-mail: [val-gal@yandex.ru](mailto:val-gal@yandex.ru)

нейных задач. Поэтому в данной работе уделяется значительное внимание процедурам “погружения” нелинейных задач в общие классы линейных за счёт изменения исходной размерности описания и расширения функциональных пространств.

Общий подход для построения несеточных приближений проиллюстрируем на примере простейшей модели одномерного бесстолкновительного газа. Предположим, что молекулы газа имеют одинаковые массы  $m > 0$  и движутся вдоль оси  $\mathcal{O}x = \mathbb{R}$  без столкновений с постоянными значениями скорости  $v_1 = v_0 \geq 0$  либо  $v_2 = -v_0 \leq 0$ . Тогда динамика такого газа описывается концентрациями  $f_i(x, t)$ ,  $i = 1, 2$ , и представляет собой систему двух точно решаемых уравнений Лиувилля:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f_1 + v_1 \frac{\partial}{\partial x} f_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} f_2 + v_2 \frac{\partial}{\partial x} f_2 &= 0, \quad x, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для этой простой динамики модельного газа (1) определим в каждой пространственно-временной точке  $x, t \in \mathbb{R}$  значения так называемых гидродинамических средних величин:

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= [f_1(x, t) + f_2(x, t)]; \\ \rho(x, t)\bar{v}(x, t) &= [v_1 f_1(x, t) + v_2 f_2(x, t)]; \\ \rho(x, t)e(x, t) &= \frac{1}{2}(v_1 - \bar{v}(x, t))^2 f_1(x, t) + \\ &+ (v_2 - \bar{v}(x, t))^2 f_2(x, t); \\ e(x, t) &= \frac{1}{2}RT(x, t); \\ P(x, t) &= [(v_1 - \bar{v}(x, t))^2 f_1(x, t) + \\ &+ (v_2 - \bar{v}(x, t))^2 f_2(x, t)]; \\ q(x, t) &= \frac{1}{2}[(v_1 - \bar{v}(x, t))^3 f_1(x, t) + \\ &+ (v_2 - \bar{v}(x, t))^3 f_2(x, t)]. \end{aligned} \quad (2)$$

Очевидно, в силу этих соотношений на решении системы (1) справедливо тождество  $P = 2\rho e$  и, соответственно, для рассматриваемой модели имеет место связь между величинами (2)

$$P = R\rho T, \quad (3)$$

уравнение состояния идеального газа Клапейрона–Менделеева. Для введённых средних величин выполняются следующие тождества, образующие формальную систему уравнений газовой динамики:

закон сохранения массы

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} (\rho\bar{v}) = 0, \quad (4)$$

закон сохранения проекции импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho\bar{v}^2 + P) = 0, \quad (5)$$

закон сохранения энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho \left( \frac{\bar{v}^2}{2} + e \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho\bar{v} \left( \frac{\bar{v}^2}{2} + e \right) + P\bar{v} + q \right] = 0. \quad (6)$$

Данные средние величины соответствуют макроскопическим параметрам сжимаемого газа:  $\rho$  – плотность массы,  $\bar{v}$  – гидродинамическая скорость,  $T$  – абсолютная температура,  $P$  – давление,  $e$  – внутренняя энергия единицы массы газа,  $q$  – тепловой поток. В общем случае вышеуказанная нелинейная система газовой динамики (3)–(6) не является замкнутой. Но существуют специальные случаи начальных данных, когда эта система замыкается.

В соответствии с примером (1) для сталкивающихся встречных пучков газа предположим, что в начальный момент времени  $t = 0$  выполняются соотношения

$$f_1(x, 0) = \rho_0(1 - \theta(x)), \quad f_2(x, 0) = \rho_0\theta(x), \quad (7)$$

где  $\rho_0 = \text{const} > 0$  – начальная макроскопическая плотность газа;  $\theta$  – функция Хевисайда.

В этом случае имеем

$$f_1(x, t) = \rho_0(1 - \theta(x - v_1 t)), \quad f_2(x, 0) = \rho_0\theta(x - v_2 t).$$

С учётом предположений о значениях скоростей  $v_1 = v_0 \geq 0$  и  $v_2 = -v_0 \leq 0$  для макроскопических параметров (2) рассматриваемого газа получаем обобщённое по С.Л. Соболеву решение системы (3)–(6)

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \begin{cases} 2\rho_0, & |x| \leq v_0 t, \\ \rho_0, & |x| > v_0 t, \end{cases} \\ \bar{v}(x, t) &= \begin{cases} 0, & |x| \leq v_0 t, \\ -v_0, & x > v_0 t, \\ v_0, & x < -v_0 t, \end{cases} \\ T(x, t) &= \begin{cases} \frac{v_0^2}{R}, & |x| \leq v_0 t, \\ 0, & |x| > v_0 t, \end{cases} \\ q(x, t) &= 0. \end{aligned}$$

Это решение удовлетворяет модели Эйлера для идеального газа (3), когда коэффициенты вязкости и теплопроводности равны нулю.

Последнее позволяет утверждать, что в этом случае нелинейность уравнений газовой динамики (3)–(6), порождающая существенные вычислительные трудности при её приближенном решении сеточ-

ными методами, преодолевается при переходе к не-сеточному методу построения решения линейных задач на основе формул (1), (2).

Отмеченное выше погружение нелинейной системы Эйлера в линейную динамику (1), (7) может быть универсальным образом реализовано в рамках концепции функциональных решений для квазилинейных систем на основе вложения Янга соболевских обобщённых решений в пространство линейных функционалов, снабжённое тихоновской топологией, на основе следующей конструкции [2]. Обозначим символами  $d_x$  и  $d_t$  лебеговы меры на  $\mathbb{R}_n = \{x = (x_1, \dots, x_n)\}$  и  $\mathbb{R}_1 = \{t\}$  соответственно;  $Q = \mathbb{R}_n \times \mathbb{R}_1^+$ ,  $Q_0 = \mathbb{R}_n$ ,  $\mathring{B}$  – множество всех конечных линейных комбинаций индикатор-функций  $I_{K_n}$ , сосредоточенных на счётном множестве полуоткрытых кубов  $K_n \subset Q$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Семейство  $\{K_n\}$  выбирается так, чтобы конечные линейные комбинации с рациональными коэффициентами индикатор-функций  $I_{K_n}$  разделяли различные классы эквивалентности относительно меры  $\mu = d_x \otimes d_t$  в пространстве локально-суммируемых функций  $L_1^{\text{loc}}(Q, \mu)$ . Для каждой индикатор-функции рассматривается поточечно сходящаяся к ней равномерно ограниченная счётная последовательность финитных бесконечно-дифференцируемых сглаживаний  $\tilde{I}_{K_n}$ . Обозначим  $B^\infty$  пространство конечных линейных комбинаций функций  $\tilde{I}_{K_n}$ . Тем же символом будем обозначать вектор-функции со значениями в  $\mathbb{R}_m$ , не вводя дополнительные обозначения. Пусть определены измеримые отображения

$$f_j: \mathbb{R}_m \times Q \rightarrow \mathbb{R}_m, 1 \leq j \leq n+1,$$

такие, что для каждой функции  $u \in L_1^{\text{loc}}(Q, \mu)$  суперпозиции  $(f_j \circ u) \in L_1^{\text{loc}}(Q, \mu)$ . Для  $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}_m$  положим  $(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m w_i v_i$ .

На множестве локально-суммируемых по мере  $\mu$  функций со значениями в  $\mathbb{R}_m$

$$M = \left\{ u \in L_1^{\text{loc}}(Q, \mu) : (f_j \circ u) \in L_1^{\text{loc}}(Q, \mu), 1 \leq j \leq n+1 \right\}$$

рассматривается система интегральных уравнений относительно неизвестной переменной  $u \in M$

$$\int_Q [(u, \partial_t g) + \sum_{j=1}^n ((f_j \circ u), \partial_{x_j} g) + ((f_{n+1} \circ u), g)] \mu(dQ) + \int_{Q_0} (g|_{t=0}, u_0) d_x = 0, \quad (8)$$

$$\forall g \in \mathring{B}^\infty,$$

где  $u_0$  – заданная функция из множества  $L_1^{\text{loc}}(Q_0, d_x)$ . Задача (8) определяет обобщённое решение С.Л. Соболева задачи Коши для квазилинейной системы законов сохранения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j(u, x, t)}{\partial x_j} = f_{n+1}(u, x, t), \quad (9)$$

$$x \in \mathbb{R}_n, \quad t > 0,$$

с начальными данными  $u_0$ . Расширение понятия решения (функциональные решения в метрическом пространстве линейных функционалов) позволяет обосновать разрешимость задачи и сходимость приближенных методов в рамках сходимости счётных последовательностей аппроксимаций.

Обозначим  $\mathcal{E}$  векторное пространство, состоящее из линейных комбинаций

$$F_{g, g_1} = \sum_{j=0}^n (f_j, \partial_{x_j} g) + (f_{n+1}, g) + (u, g_1), \quad u \in \mathbb{R}_m, \quad (10)$$

где  $f_0(u, x, t) = u$ ,  $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} t$ , с произвольными  $g \in \mathring{B}^\infty$ ,  $g_1 \in \mathring{B}$ . Для каждого вектора  $F \in \mathcal{E}$  определим операторы  $\pi, \pi_0, \pi_1$  следующими соотношениями:

$$\pi(F) \stackrel{\text{def}}{=} F_{g, 0}, \quad \pi_1(F) \stackrel{\text{def}}{=} g|_{t=0} f_0|_{t=0} + g_1|_{t=0} u, \quad (11)$$

$$\pi_0(F) = \pi_1(F_{g, 0}).$$

Пусть  $\mathcal{E}^+ = \{l\}$  – алгебраически сопряжённое пространство к  $\mathcal{E}$  ( $\mathcal{E}^+$  по определению состоит из конечных линейных функционалов на линейном пространстве  $\mathcal{E}$ ). На  $\mathcal{E}^+$  зададим топологию  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  посредством счётной системы полуноrm  $\{p_F\}_{F \in \mathcal{E}}$ , где  $p_F(l) = |l(F)|$ ,  $\forall l \in \mathcal{E}^+$ ,  $F = F_{g, g_1}$ , где функции  $g$  являются конечными линейными комбинациями с рациональными коэффициентами индикатор-функций  $I_{K_n}$ ; аналогично определяются  $g_1$  через  $\tilde{I}_{K_n}$ . Топологическое пространство  $\mathcal{E}^+$ ,  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  метризуемо. В данном метрическом пространстве каждое отображение  $l \mapsto l(F)$ ,  $l \in \mathcal{E}^+$ , непрерывное (здесь переменными являются  $l$ , а произвольные значения  $F \in \mathcal{E}$  фиксированы).

Рассмотрим вложение Янга множества  $M$  в  $\mathcal{E}^+$ , которое определим формулой

$$\forall u \in M: u \mapsto l_u \in \mathcal{E}^+,$$

$$l_u(F) \stackrel{\text{def}}{=} \int_Q (F \circ u) v(dQ), \quad F \in \mathcal{E}. \quad (12)$$

Вложение (12) мономорфно на классах эквивалентности функций из  $M$ , совпадающих почти везде на множестве  $Q$  относительно меры  $\mu$ .

Положим  $[M]$  – замыкание образа вложения (12) множества  $M$  в пространство  $\{\mathcal{E}^+, \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$ . На множестве  $[M]$  рассмотрим индуцированную тихоновскую топологию  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  (в которой открытыми множествами служат пересечения элементов системы  $\sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})$  с множеством  $[M]$ ).

Аналогичным способом вложим множество начальных данных  $M_0$ , состоящее из функций  $u_0$ , которые принадлежат пространству  $L_1^{loc}(Q_0, \mu_0)$ , в пространство  $\mathcal{E}_0^+$ , являющееся алгебраически сопряжённым к векторному пространству  $\mathcal{E}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1(\mathcal{E})$ .

Если функция  $u \in M$  является решением задачи (8) (т.е. обобщённым решением задачи Коши для системы (9) с начальными данными  $u_0$ ), то равенства (8) эквивалентны соотношениям

$$l_u(\pi(F)) + l_{u_0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0, \quad \forall F \in \mathcal{E}. \quad (13)$$

Элемент  $l \in [M]$  называется функциональным решением уравнения (9) с начальным условием  $u_0 \in M_0$ , если для каждого элемента  $F \in \mathcal{E}$  справедливо равенство

$$l(\pi(F)) + l_{u_0}^{(0)}(\pi_0(F)) = 0. \quad (14)$$

Отметим, что задача (14) относительно неизвестного функционала  $l \in \mathcal{E}^+$  является линейной. Это позволяет выработать единый подход к обоснованию приближенных методов решения широкого класса задач на основе универсальных принципов, связанных со свойством слабой аппроксимации и слабой устойчивости.

Будем говорить, что задан приближенный метод решения задачи (8), обозначаемый  $\mathcal{AM}$ , если указан выбор параметрического семейства элементов во множестве  $M$ :

$$\alpha \mapsto u_\alpha \in M, \quad \alpha \in A.$$

Приближенный метод  $\mathcal{AM}$  слабо аппроксимирует задачу (8), если можно указать заданную этим методом последовательность приближений  $u_\alpha \in M$ , для которой значения невязки

$$\delta_\alpha(F) \stackrel{\text{def}}{=} |l_{u_\alpha}(\pi(F)) + l_{u_{\alpha|t=0}}^{(0)}(\pi_0(F))| + |l_{u_0}^{(0)} - l_{u_{\alpha|t=0}}^{(0)}(\pi_0(F))|,$$

стремятся к нулю при каждом  $F \in \mathcal{E}$  на заданной последовательности параметров из множества значений параметров  $A$ .

Метод  $\mathcal{AM}$  сходится, если он определяет сходящуюся в пространстве  $\{[M], \sigma(\mathcal{E}^+, \mathcal{E})\}$  подпоследовательность  $\{l_{u_{\alpha_n}}\}$ , пределом которой является функциональное решение  $l \in [M]$  задачи (8).

Назовём метод  $\mathcal{AM}$  слабо устойчивым, если имеет место равномерная оценка приближений  $u_\alpha$  в пространстве  $L_1^{loc}(Q, \mu)$ :

$$\sup_{\alpha \in A} \int_K |u_\alpha| \mu(dQ) < \infty, \quad (15)$$

выполняющаяся на каждом компакте  $K \subset Q$ .

**Теорема 1.** Пусть приближенный метод  $\mathcal{AM}$  слабо аппроксимирует задачу (8) и является слабо устойчивым. Тогда он сходится к функциональному решению  $l \in [M]$  задачи (8).

Отождествление функциональных решений с функциями позволяет вычислять интегральные средние неизвестной, но в то же время её нелинейные суперпозиции, вообще говоря, не являются слабыми пределами нелинейных суперпозиций приближений метода, т.е. существуют функциональные решения, которые не являются обобщёнными в смысле С.Л. Соболева.

Данное утверждение иллюстрируется методом, основанным на решении разностной схемы Эйлера для задачи Коши в случае обыкновенного дифференциального уравнения с разрывной правой частью

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad t > 0, \quad u(0) = u_0, \quad f(u) = \begin{cases} -1, & u \geq 0, \\ 1, & u < 0. \end{cases} \quad (16)$$

Приближенный метод Эйлера с параметром метода, равным шагу сетки  $\alpha = h > 0$ , определим посредством соотношений

$$\frac{u_h(t+h) - u_h(t)}{h} = f(u_h(t)), \quad t \geq 0, \\ u_h(t) = u_0, \quad 0 \leq t < h, \quad h > 0.$$

Решение задачи Коши (16) в классическом смысле существует лишь до момента попадания его на точку разрыва функции  $f$ . Далее это решение не может быть продолжено как классическое либо обобщённое. Приближение, задаваемое методом Эйлера после момента времени  $t_c$  попадания его на точку разрыва функции  $f$ , вычисляется по следующим формулам:

$$u_h(t) = \begin{cases} 0, & 2nh \leq t < (2n+1)h, \\ -h, & (2n+1)h \leq t, \end{cases} \quad t > t_c.$$

Очевидно, что метод Эйлера равномерно сходится, его невязка слабо стремится к нулю, и, таким образом, функция  $u(t) = 0, t \geq 0$ , может быть ото-

ждествлена с функциональным решением задачи Коши (16) при начальном условии  $u(0) = 0$ . Непосредственной проверкой убеждаемся, что это решение удовлетворяет определению А.Ф. Филиппова [3]. При этом последовательность суперпозиций  $(f \circ u_h)$ ,  $h > 0$ , слабо сходится к нулю, когда  $h \rightarrow 0$ , но в то же время  $(f \circ u) = 1$ .

Указанный пример служит отражением глубокой связи решений А.Ф. Филиппова для обыкновенных дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями и функциональных решений.

Идею описанного построения семейства несеточных методов предлагается реализовать в рамках универсальной алгоритмической среды моделирования кинетических процессов, позволяющих единообразно рассматривать решения дифференциальных уравнений как реализации простейшей кинетики.

На кубе  $\Omega_n = \prod_{k=1}^n [0, 1] \subset \mathbb{R}_n$  рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = f(u, t), \quad t > 0, \quad u \in \Omega_n, \quad (17)$$

где правая часть  $f = \{f_l\}_{l=1}^n$  такова, что во внутренних точках куба  $\Omega_n$  функции  $f_l$  являются многочленами по переменным  $u = \{u_k\}_{k=1}^n$

$$f_l(u, t) = \sum_{p \geq 0} \alpha_{p_1, p_2, \dots, p_n}^{(l)}(t) u_1^{p_1} u_2^{p_2} \dots u_n^{p_n}, \quad (18)$$

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n, \quad p_l \in \mathbb{Z}^+, \quad u_k^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1,$$

с локально ограниченными измеримыми коэффициентами  $\alpha_{p_1, p_2, \dots, p_n}^{(l)}$  при значениях времени  $t \geq 0$ . Вне куба  $\Omega_n$  поле  $f(u, t)$  доопределим следующим образом. Положим  $f_l(u, t) = 0$  при аргументах  $u_l \leq 0$  или  $u_l \geq 1$ . В формуле (2) при значениях  $0 < u_l < 1$  величины  $u_k$ ,  $k \neq l$ , полагаем равными 1, если  $u_k > 1$ ,  $k \neq l$ , и приравняем 0, когда  $u_k \leq 0$ . При этих предположениях во внутренних точках куба  $\Omega_n$  решения уравнения (1) являются классическими, а при выходе их на границу  $\partial\Omega_n$  они переходят в решения А.Ф. Филиппова [3]. Задача Коши для системы (17), (18) корректна в пространстве непрерывных функций  $C_T (\forall T > 0)$ .

Сопоставим системе (17) кинетический процесс, основанный на взаимодействиях  $n$  различных видов частиц, где количество видов совпадает с размерностью системы (17). В дальнейшем множество частиц вида  $l$ ,  $1 \leq l \leq n$ , будем считать подмножеством конечного множества  $D_l$  (так называемая ячейка), мощ-

ность которого положим равной натуральному числу  $N$ . Частицы размещаются среди элементов ячейки  $D_l$ . Каждой паре  $(i, l)$ , где  $i$  – номер элемента в  $D_l$ , сопоставим величину  $m_i^{(l)}(t)$ , которая равна 1, если частица вида  $l$  размещается в момент времени  $t$  в  $i$ -м элементе ячейки  $D_l$ , и  $m_i^{(l)}(t) = 0$  в противном случае. Таким образом, в каждый момент времени состояние рассматриваемой системы частиц задаётся распределением значений индикатор-функций  $M(t) = \{m^{(l)}(t)\}_{l=1}^n$ , где  $m^{(l)}(t) = (m_1^{(l)}(t), m_2^{(l)}(t), \dots, m_N^{(l)}(t))$ .

Пусть значения времени  $t \geq 0$  принимают дискретные значения  $t_j = j\tau$ ,  $j \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\tau > 0$ . В каждый момент времени  $t_j$  частицы могут участвовать во взаимодействиях, приводящих к рождению и гибели частиц. Акты выбора взаимодействующих частиц разыгрываются следующим образом. Взаимодействие, приводящее к рождению одной частицы вида  $l$  при участии кратного взаимодействия  $p = p_1 + p_2 + \dots + p_n$  частиц, где  $p_k \in \mathbb{Z}^+$  – количество взаимодействующих частиц вида  $k$ , опишем следующим образом. Если  $p_k = 0$ , то частицы вида  $k$  не принимают участия во взаимодействии. Пусть рассматриваются значения  $p_k \geq 1$ . Для каждого такого  $k$  в ячейке  $D_k$  выберем набор различных номеров  $(i_1, \dots, i_{p_k})$ ,  $1 \leq i_s \leq N$ . Выбор осуществляется на основе независимого равновероятного розыгрыша среди всех таких наборов, находящихся в  $p_k$ -мерном кубе со стороной  $N$  во множестве  $\mathbb{N}_{p_k}$  с вероятностью  $P_k^{(N)}$ . Если в каждом из разыгранных номеров в рассматриваемых ячейках находится частица, то разрешено взаимодействие выбранных частиц, влекущее рождение или гибель одной частицы в заданной ячейке  $D_l$  (при наличии вакансий). Аналогично поступаем при множественных актах рождения и гибели. Обозначим

$$\xi^{(l)}(t_j) \in \prod_{k=1}^n D_k$$

набор номеров взаимодействующих частиц. Если заданная величина  $\alpha_{p_1, p_2, \dots, p_n}^{(l)}(t_j) > 0$ , то для  $\xi^{(l)}(t_j)$  допускается рождение одной частицы в ячейке  $D_l$ . Аналогично отрицательным значениям этой величины сопоставляется гибель одной частицы в  $D_l$ . Акты рождения и гибели для  $\xi^{(l)}(t_j)$  разыгрываем заданием независимых случайных величин  $\eta^{(l)}(t_j)$ , принимающих значение 1 с условной вероятностью  $|\alpha_{p_1, p_2, \dots, p_n}^{(l)}(t_j)| N\tau \leq 1$ , и значение 0 с дополнительной вероятностью. Для нулевых значений  $\eta^{(l)}$  взаимодействие выбранных частиц исключается. По такой же схеме рассматривается случай множественного рождения и гибели частиц. В этом случае следует ввести мультипликаторы в коэффициенты уравне-

ния (17), равные количеству рождающихся и гибнущих частиц. Следует подчеркнуть, что в этом случае при розыгрышах актов рождения и гибели необходимо модифицировать описанный ниже алгоритм в соответствии с множественностью рассматриваемых ниже процессов с одной частицей. Отметим также, что рассмотрение уравнений (17) в стандартном единичном кубе может быть расширено на область с произвольными размерами за счёт изменения масштаба. Таким образом, каждая система (17), (18) является унифицированной стандартной моделью кинетического процесса с кратными взаимодействиями частиц, приводящими к множественным актам их рождения и гибели.

Если для выбранного  $\xi^{(l)}(t_j)$  розыгрыш приводит к рождению частицы вида  $l$ , равновероятным образом одна частица может помещаться на свободные от частиц номера в ячейке  $D_l$ . Если свободных номеров нет, то размещение не происходит. В случае гибели частицы вида  $l$  равновероятным образом может быть удалена одна из частиц в ячейке  $D_l$ . Если частицы в  $D_l$  отсутствуют, то удаление частиц не происходит.

Вектор состояния системы частиц  $M(t_j)$  изменяется на основе алгебраической суммы последовательного розыгрыша всех процессов рождения и гибели частиц в каждой ячейке  $D_l$ , определённых заданием коэффициентов  $\alpha_{p_1, p_2, \dots, p_n}^{(l)}(t_j)$  в правой части системы (17). Тем самым определяется значение  $M(t_{j+1})$ . Таким образом, полностью определена эволюция системы для всех  $t_j \geq 0$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\alpha_{p_1, p_2, \dots, p_n}^{(l)}(t)$  являются локально ограниченными измеримыми функциями при  $t \geq 0$ . Обозначим числа заполнения ячеек

$$N^{(l)}(t_j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N \delta_{1, m_i^{(l)}}(t_j). \text{ Тогда средние концентрации}$$

$$u_N^{(l)}(t_j) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\langle N^{(l)}(t_j) \rangle}{N}$$

подчиняются разностному уравнению

$$u_N^{(l)}(t_{j+1}) = u_N^{(l)}(t_j) + \tau f_l(u_N^{(s)}(t_j), t_j) + \tau \mathcal{O}(N^{-1}), \quad N \geq 1,$$

где оценка  $\mathcal{O}(N^{-1})$  является равномерной относительно  $t_j$ . Пусть существует  $\lim_{N \rightarrow \infty} u_N^{(l)}(0)$ . Тогда при каждом  $t_j \geq 0$  существует

$$\lim_{N \rightarrow \infty} u_N^{(l)}(t_j) = u_l^{(l)}(t_j),$$

подчиняющийся разностному уравнению

$$u^{(l)}(t_{j+1}) = u^{(l)}(t_j) + \tau f_l(u^{(s)}(t_j), t_j), \quad (19)$$

Если начальные значения в разностном уравнении (19) согласованы с начальными значениями решения системы (17), (18) так, что

$$u^{(l)}(0) = u_l(0), \quad (20)$$

то разностная схема Эйлера (19), (20) сходится к единственному неотрицательному функциональному решению задачи Коши для уравнения (17) на кубе  $\Omega_n$  и для последовательности средних концентраций  $u_N^{(l)}(t_j)$  при каждом  $T \geq 0$  справедливо соотношение

$$\max_{0 \leq j \leq \lfloor T/\tau(N) \rfloor} |u_l(t_j) - u_N^{(l)}(t_j)| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty, \quad \forall l.$$

В связи с рассмотренным выше классом задач представляет интерес линейная, бесконечномерная модель иерархической системы, в которой происходит передача “управляющих команд” последовательно с верхних на нижние уровни, которые занумеровуем натуральными числами  $i \in \mathbb{N}$ . Пусть на каждом уровне иерархии рождаются и уничтожаются “частицы-документы” по указаниям с вышележащего уровня. При заполнении каждого уровня появление новых частиц возможно лишь на освобождающиеся места. Это формальное описание переходов приводит к бесконечномерным линейным системам обыкновенных дифференциальных уравнений следующего общего вида:

$$\frac{du_i}{dt} = u_{i+1}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Очевидно, что набор всех производных  $u_i = \frac{d^i u}{dt^i}$  (струя) произвольной бесконечно дифференцируемой функции  $u$  аргумента  $t$  удовлетворяет системе (21). Более того, в стандартную систему (21) вкладываются все решения задачи Коши (в области их существования) для произвольной конечномерной системы

$$\frac{du}{dt} = f(u), \quad t > 0, \quad (22)$$

для бесконечно дифференцируемой правой части уравнения (21). Это открывает путь к построению общих принципов создания несеточных приближенных методов для решения дифференциальных уравнений на основе обоснованного в теореме 2 общего кинетического подхода, учитывающего многократные столкновения частиц, которые приводят к актам рождения и гибели частиц в системе.

**Источники финансирования.** Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 16–29–15105, 18–01–00343.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бетелин В.Б., Галкин В.А. // ДАН. 2019. Т. 484. № 5. С. 532–537.*
2. *Галкин В.А. // ДАН. 2013. Т. 452. № 1. С. 12–13.*
3. *Филиппов А.Ф. // Матем. сб. 1960. Т. 51. С. 101–128.*

## UNIVERSAL COMPUTATIONAL ALGORITHMS AND THEIR JUSTIFICATION FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Academician of the RAS **V. B. Betelin<sup>1</sup>, V. A. Galkin<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Moscow, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences”, Surgut, Russian Federation*

Received July 4, 2019

The paper is devoted to the problem that determines the typical characteristics of computing equipment associated with the amount of work needed to obtain a result at a given point in the computation domain. The use of grid methods is associated with the need for continuous processing and storage of data arrays determined by the number of grid elements, which is directly proportional to the performance of the systems used. We consider alternative approaches for the construction and justification of computational methods that are not focused on the grid structure of the approximations. The substantiation of the convergence of kinetic approximations to the solution of the Cauchy problem is obtained.

*Keywords:* non net computational methods, functional solutions, high performance computing, universal algorithmic environment.