ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 4, с. 367–371

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.968

ОБРАТНАЯ БЕСФАЗОВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Член-корреспондент РАН В. Г. Романов

Поступило 24.05.2019 г.

Для системы уравнений электродинамики, обладающей анизотропией диэлектрической проницаемости, изучается обратная задача об определении этой проницаемости. Предполагается, что диэлектрическая проницаемость описывается диагональной матрицей $\epsilon = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x))$, причём ε_1, ε_2 являются постоянными положительными числами всюду вне некоторой ограниченной области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$. Рассматриваются периодические по времени решения системы уравнений Максвелла, отвечающие двум модам плоских волн, падающих из бесконечности на неоднородность, локализованную в Ω_0. Для определения функций $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ задаётся некоторая информация о модуле вектора электрической напряжённости двух интерферирующих полей. Показано, что эта информация приводит исходную задачу к двум обратным кинематическим задачам с неполными данными о временах пробега электромагнитных волн. Выполнено исследование линеаризованной постановки этих задач. Установлено, что в линейном приближении задача об определении $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ сводится к двум задачам рентгеновской томографии.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, анизотропия, плоская волна, бесфазовая обратная задача.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524884367-371

Рассмотрим стационарную систему уравнений Максвелла, соответствующую периодическим по времени решениям $E(x,t) = \tilde{E}(x)e^{-i\omega t}$, $H(x,t) = \tilde{H}(x)e^{-i\omega t}$ нестационарной системы:

$$\operatorname{rot}\tilde{H} = -i\omega\tilde{E}\epsilon(x), \quad \operatorname{rot}\tilde{E} = i\mu_0\omega\tilde{H}. \tag{1}$$

В уравнениях (1) $\epsilon(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x))$ – положительно определённая диагональная матрица, μ_0 – некоторая положительная постоянная. Предположим, что $\varepsilon_1(x) \neq \varepsilon_2(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^3$, и вне некоторой компактной области $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ элементы $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$ матрицы $\epsilon(x)$ совпадают с постоянными положительными числами ε_1^0, ε_2^0.

В рассматриваемом случае для нестационарной системы уравнений Максвелла существуют две характеристические поверхности $t = \varphi^{(j)}(x)$, $j = 1, 2$, определяемые равенствами (см. [1])

$$|\nabla\varphi^{(1)}(x)|^2 = \mu_0\varepsilon_1(x), \tag{2}$$

$$\varepsilon_1(x)(\varphi^{(2)}_{x_1}(x))^2 + \varepsilon_1(x)(\varphi^{(2)}_{x_2}(x))^2 + \varepsilon_2(x)(\varphi^{(2)}_{x_3}(x))^2 = \mu_0\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x). \tag{3}$$

В однородной среде ($\varepsilon_1 = \varepsilon_1^0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^0$) существуют решения уравнений (2) и (3) вида

$$\varphi^{(0,1)}(x,\nu) = n_1^0 x\cdot\nu, \quad \varphi^{(0,2)}(x,\nu) = x\cdot\ell^0(\nu). \tag{4}$$

В формулах (4) $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\vartheta \in [0, \pi]$, $\ell^0(\nu) = (n_2^0\nu_1, n_2^0\nu_2, n_1^0\nu_3)$, $n_1^0 = \sqrt{\mu_0\varepsilon_1^0}$, $n_2^0 = \sqrt{\mu_0\varepsilon_2^0}$. В соответствии с этим в однородной среде существуют решения уравнений (1) типа плоских волн двух мод, которые являются образами Фурье бегущих плоских волн, найденных в [1]:

$$\begin{aligned} &\tilde{E}^{(0,1)}(x,\omega,\nu) = \hat{\alpha}^{(1)}(\nu)e^{i\omega\varphi^{(0,1)}(x,\nu)},\\ &\tilde{H}^{(0,1)}(x,\omega,\nu) = \hat{\beta}^{(1)}(\nu)e^{i\omega\varphi^{(0,1)}(x,\nu)},\\ &\hat{\alpha}^{(1)}(\nu) = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0),\\ &\hat{\beta}^{(1)}(\nu) = \frac{n_1^0}{\mu_0}(\nu\times\hat{\alpha}^{(1)}(\nu)), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{E}^{(0,2)}(x,\omega,\nu) = \hat{\alpha}^{(2)}(\nu)e^{i\omega\varphi^{(0,2)}(x,\nu)},\\ &\tilde{H}^{(0,2)}(x,\omega,\nu) = \hat{\beta}^{(2)}(\nu)e^{i\omega\varphi^{(0,2)}(x,\nu)},\\ &\hat{\alpha}^{(2)}(\nu) = (\hat{\beta}^{(2)}(\nu)\times\ell^0(\nu))(\epsilon^0)^{-1},\\ &\hat{\beta}^{(2)}(\nu) = (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь $(\epsilon^0)^{-1}$ – матрица, обратная к матрице $\epsilon^0 = \operatorname{diag}(\varepsilon_1^0, \varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0)$.

Рассмотрим задачу о падении волн (5) и (6), идущих из бесконечности, на неоднородность, сосредоточенную в области Ω_0.

Представим решение системы (1) в виде

$$\begin{aligned} &\tilde{E}^{(j)}(x,\omega,\nu) = \tilde{E}^{(0,j)}(x,\omega,\nu) + \tilde{E}^{(j)}_{sc}(x,\omega,\nu),\\ &\tilde{H}^{(j)}(x,\omega,\nu) = \tilde{H}^{(0,j)}(x,\omega,\nu) + \tilde{H}^{(j)}_{sc}(x,\omega,\nu), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \tag{7}$$

в котором $\tilde{E}^{(j)}_{sc}$, $\tilde{H}^{(j)}_{sc}$ отвечают рассеянному полю. Пусть $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| < R\}$ – шар, содержащий область Ω_0 внутри себя, и S – его граница. Обозначим через $S_+^{(j)}(\nu) = \{x \in S \,|\varphi^{(0,j)}(x,\nu) > 0\}$. Пусть далее

Институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск
E-mail: romanov@math.nsc.ru

$\mathbb{S}^2(\vartheta_0)$ – шаровой пояс единичной сферы $\mathbb{S}^2(\vartheta_0) = \{\nu \in \mathbb{S}^2 \,|\, \nu_1^2 + \nu_2^2 = \sin^2\vartheta \geq \sin^2\vartheta_0 > 0\}$.

Обратная задача. Найти $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$ в области Ω_0 по следующей информации о решении задач (1), (7): для $j = 1, 2$ на $S_+^{(j)}(\nu)$ заданы квадраты модулей суммы двух векторов $\tilde{E}^{(j)}(x, \omega, \nu)$ и $\tilde{E}^{(j)}(x, \omega, -\nu)$ для всех $\nu \in \mathbb{S}^2(\vartheta_0)$ и всех частот ω, больших некоторой фиксированной частоты ω_0, т.е. заданы функции $f_j(x, \omega, \nu)$ такие, что

$$\begin{gathered} f_j(x, \omega, \nu) = |\tilde{E}^{(j)}(x, \omega, \nu) + \tilde{E}^{(j)}(x, \omega, -\nu)|^2, \\ x \in S_+^{(j)}(\nu), \ \ \nu \in \mathbb{S}^2(\vartheta_0), \ \ \omega > \omega_0 > 0, \ \ j = 1, 2. \end{gathered} \tag{8}$$

Поставленная выше обратная задача относится к так называемым бесфазовым задачам, в которых требуется найти коэффициенты дифференциального уравнения по информации о модуле комплекснозначного решения. Исследование бесфазовых обратных задач было выполнено для уравнения Шрёдингера [3–6], обобщённого уравнения Гельмгольца [7–9], уравнений электродинамики [10–13]. Настоящая постановка задачи следует работе [12], в которой впервые была рассмотрена обратная бесфазовая задача для уравнений электродинамики на встречных пучках волн. Основной результат настоящей работы заключается в том, что поставленная задача при определённых условиях сводится к двум обратным кинематическим задачам с неполными данными. В литературе пока отсутствуют результаты, связанные с этими задачами. Показывается, что линеаризация возникающих задач приводит к двум обычным задачам рентгеновской томографии, теория и практические приложения которых хорошо известны.

Пусть

$$t_j^0(\nu) = \inf_{x \in \Omega} \varphi^{(0,j)}(x, \nu), \quad j = 1, 2,$$

и $y_j^0(\nu)$ — точка касания границы S области Ω и плоскости $\Sigma_j(\nu) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, \varphi^{(0,j)}(x, \nu) = t_j^0(\nu)\}$, $j = 1, 2$.

Рассмотрим задачу Коши для нестационарной системы уравнений Максвелла:

$$\begin{gathered} \operatorname{rot} H = E_t \epsilon(x), \quad \operatorname{rot} E = -\mu_0 H_t, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4, \\ E|_{t < t_j^0(\nu)} = \hat{\alpha}^{(j)}(\nu)\delta(t - \varphi^{(0,j)}(x, \nu)), \\ H|_{t < t_j^0(\nu)} = \hat{\beta}^{(j)}(\nu)\delta(t - \varphi^{(0,j)}(x, \nu)), \quad j = 1, 2. \end{gathered} \tag{9}$$

Решение уравнений (1), удовлетворяющее условиям (7), и решение задачи (9) связаны между собой преобразованием Фурье:

$$\tilde{E}^{(j)}(x, \omega, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} E^{(j)}(x, t, \nu) e^{i\omega t} dt,$$

$$\tilde{H}^{(j)}(x, \omega, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} H^{(j)}(x, t, \nu) e^{i\omega t} dt, \quad j = 1, 2. \tag{10}$$

Обоснование подобного рода формул для решений гиперболических уравнений и соответствующих им решений стационарных уравнений восходит к работе Б.Р. Вайнберга [2], в которой показано, что решения гиперболических уравнений, коэффициенты которых постоянны на бесконечности, экспоненциально убывают при $t \to \infty$ вместе с производными до второго порядка.

Исследование задачи (9) проведено в [1] при условии, что выполнены некоторые предположения об элементах матрицы $\epsilon(x)$ и римановых метриках $d\tau^{(j)}$, $j = 1, 2$, определённых формулами

$$\begin{gathered} d\tau^{(1)} = n_1(x)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right)^{1/2}, \\ n_1(x) = (\mu_0 \varepsilon_1(x))^{1/2}, \end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered} d\tau^{(2)} = \left(n_2^2(x)(dx_1^2 + dx_2^2) + n_1^2(x) dx_3^2\right)^{1/2}, \\ n_2(x) = (\mu_0 \varepsilon_2(x))^{1/2}. \end{gathered} \tag{12}$$

Эти предположения в основном заключаются в том, что $\varepsilon_j(x) \in C^m(\mathbb{R}^3)$, $j = 1, 2$, при достаточно большом целом положительном числе m, и, кроме того, среда является слабо градиентной, т.е. величины $|\nabla \varepsilon_j(x)|$, $j = 1, 2$, достаточно малы.

Пусть $\varphi^{(j)}(x, \nu)$, $j = 1, 2$, – непрерывно дифференцируемые решения задач Коши

$$|\nabla \varphi^{(1)}|^2 = n_1^2, \quad \varphi^{(1)}|_{\varphi^{(0,1)}(x,\nu) \leq t_1^0(\nu)} = \varphi^{(0,1)}(x, \nu), \tag{13}$$

$$n_2^{-2}\left[(\varphi_{x_1}^{(2)})^2 + (\varphi_{x_2}^{(2)})^2\right] + n_1^{-2}(\varphi_{x_3}^{(2)})^2 = 1,$$

$$\varphi^{(2)}|_{\varphi^{(0,2)}(x,\nu) \leq t_2^0(\nu)} = \varphi^{(0,2)}(x, \nu). \tag{14}$$

Пусть далее $T_j(\nu) = \sup_{x \in \Omega} \varphi^{(0,j)}(x, \nu)$ и $\Pi_j(\nu) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, t_j^0(\nu) \leq \varphi^{(j)}(x, \nu) \leq T_j(\nu)\}$. Заметим, что $\Pi_j(\nu)$ – область, расположенная между двумя фронтами $\varphi^{(j)}(x, \nu) = t_j^0(\nu)$ и $\varphi^{(j)}(x, \nu) = T_j(\nu)$, отстоящими друг от друга на время $s_j^*(\nu) = T_j(\nu) - t_j^0(\nu)$. В предположениях работы [1] метрики (11) и (12) таковы, что при каждом фиксированном $j = 1, 2$ любая точка $x \in \Pi_j(\nu)$ может быть соединена с плоскостью $\Sigma_j(\nu)$ единственной геодезической $\Gamma_j(x, \nu)$, ортогональной этой плоскости.

Для $j = 1, 2$ обозначим

$$\varphi'_j(x, \nu) = t_j^0(\nu) - \varphi^{(0,j)}(x - y_j^0(\nu), \nu)$$

и через

$$D_j(\nu)=\{(x,t)\,|t_j^0(\nu)\le$$
$$\le \varphi'_j(x,\nu)\le t\le T_j(\nu),\, t_j^0(\nu)\le \varphi^{(j)}(x,\nu)\le t\le T_j(\nu)\}$$

— клиновидную область, ограниченную характеристическими поверхностями $t=\varphi'_j(x,\nu)$ и $t=\varphi^{(j)}(x,\nu)$. Сечение области $D_j(\nu)$ плоскостью $t=T$, $t_j^0(\nu)\le T\le T_j(\nu)$ обозначим через $G_j(T,\nu)$.

Введём

$$\theta_0(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$$

$$\theta_n(t)=\frac{t^n}{n!}\theta_0(t),\;\; \theta_{-n}(t)=\delta^{(n-1)}(t),\;\; n=1,2,\ldots$$

Воспользуемся следующей теоремой, установленной в [1].

Теорема 1. *Пусть* $\varepsilon_j(x)\in C^m(\mathbb{R}^3)$, $j=1,2$, *при* $m=3s+5$, *где s — некоторое целое неотрицательное число, и C-нормы* $\nabla\varepsilon_j(x)$, $j=1,2$, *малы. Тогда решение задачи* (9) *представимо в области*

$$\mathbb{R}^3_T(\nu)=\{(x,\,t)|x\in\mathbb{R}^3,\; t\le T\},\; T\le T_j(\nu),$$

в виде

$$E^j(x,t,\nu)=\sum_{k=-1}^{s}\alpha^{(k,j)}\theta_k(t-\varphi^{(j)}(x,\nu))+E^{(j,s)}(x,t,\nu),$$
$$H^j(x,t,\nu)=\sum_{k=-1}^{s}\beta^{(k,j)}\theta_k(t-\varphi^{(j)}(x,\nu))+H^{(j,s)}(x,t,\nu),\tag{15}$$

в котором $(\alpha^{(k,j)},\,\beta^{(k,j)})\in C^{m-2(k+2)}(\Pi_j(\nu))$ *и, кроме того,* $\alpha^{(-1,j)}=\hat\alpha^{(j)}$, $\beta^{(-1,j)}=\hat\beta^{(j)}$ *и* $\alpha^{(k,j)}=0$, $\beta^{(k,j)}=0$ *при* $\varphi^{(j)}(x,\nu)\le t_j^0(\nu)$ *и* $0\le k\le s$. *Функции* $E^{(j,s)}(x,t,\nu)$, $H^{(j,s)}(x,t,\nu)$ *тождественно равны нулю вне области* $D_j(\nu)$ *и, как функции переменных x, t, принадлежат пространствам* $W_2^n(W_2^{s-n}(G_j(T,\nu));\, t_j^0(\nu),T_j(\nu))$ *для* $n=0,1,2,\ldots,s$.

Из этой теоремы следует, что при $s=1$, т.е. при условии, что $\varepsilon_j\in C^8(\mathbb{R}^3)$, $j=1,2$, для решения задачи (9) справедливы равенства

$$\begin{aligned}E^j(x,t,\nu)&=\alpha^{(-1,j)}(x,\nu)\delta(t-\varphi^{(j)}(x,\nu))+\\&+\hat E^{(j)}(x,t,\nu)\theta_0(t-\varphi^{(j)}(x,\nu)),\\H^j(x,t,\nu)&=\beta^{(-1,j)}(x,\nu)\delta(t-\varphi^{(j)}(x,\nu))+\\&+\hat H^{(j)}(x,t,\nu)\theta_0(t-\varphi^{(j)}(x,\nu)),\end{aligned}\tag{16}$$

в которых функции $\hat E^{(j)}(x,t,\nu)$, $\hat H^{(j)}(x,t,\nu)$, как функции переменных *x*, *t*, принадлежат пространству $L^2(W_2^1(G_j(T,\nu));\, t_j^0(\nu),T_j(\nu))$.

Равенства (10), (16), с учётом результатов [2] об экспоненциальном убывании решения при $t\to\infty$, приводят к следующим асимптотическим формулам для функций $\tilde E^{(j)}(x,\omega,\nu)$, $\tilde H^{(j)}(x,\omega,\nu)$ при $\omega\to\infty$:

$$\tilde E^{(j)}(x,\omega,\nu)=\exp(i\omega\varphi^{(j)}(x,\nu))\times$$
$$\times\left[\alpha^{(-1,j)}(x,\nu)+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right],\;\; j=1,2,\tag{17}$$

$$\tilde H^{(j)}(x,\omega,\nu)=\exp(i\omega\varphi^{(j)}(x,\nu))\times$$
$$\times\left[\beta^{(-1,j)}(x,\nu)+O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right],\;\; j=1,2.\tag{18}$$

Отсюда легко найти асимптотику данных обратной задачи при $\omega\to\infty$. Используя формулу (17) и замечая, что

$$\tilde E^{(j)}(x,\omega,-\nu)=-\hat\alpha^{(j)}(\nu)\exp(-i\omega\varphi^{(0,j)}(x,\nu))$$

для $x\in S_+^{(j)}(\nu)$, получаем асимптотическую формулу для данных в виде

$$\begin{aligned}f_j(x,\omega,\nu)&=|\alpha^{(-1,j)}(x,\nu)\exp(i\omega\varphi^{(j)}(x,\nu))-\\&-\hat\alpha^{(j)}(\nu)\exp(-i\omega\varphi^{(0,j)}(x,\nu))+\\&+O\left(\frac{1}{\omega}\right)|^2=|\alpha^{(-1,j)}(x,\nu)|^2+|\hat\alpha^{(j)}(\nu)|^2-\\&-2\alpha^{(-1,j)}(x,\nu)\cdot\hat\alpha^{(j)}(\nu)\times\\&\times\cos[\omega(\varphi^{(j)}(x,\nu)+\varphi^{(0,j)}(x,\nu))]+O\left(\frac{1}{\omega}\right),\;\; j=1,2.\end{aligned}\tag{19}$$

Имеет место равенство $\alpha^{(-1,j)}(x,\nu)=\hat\alpha^{(j)}(\nu)$ для $x\in\Sigma_j(\nu)$. Поэтому, как следует из дифференциальных уравнений, определяющих $\alpha^{(-1,j)}(x,\nu)$ (см. [1]), для слабо неоднородных сред, скалярное произведение $\alpha^{(-1,j)}(x,\nu)\cdot\hat\alpha^{(j)}(\nu)$ положительно для $x\in\Omega\cup S$. Примем, что $n_j(x)\ge n_j^0$, $j=1,2$. Тогда скорости распространения электромагнитных волн $v^{(1)}(x)=(n_1(x))^{-1}$ и $v^{(2)}(x,\nu)=[n_2^2(x)(\nu_1^2+\nu_2^2)+n_1^2(x)\nu_3^2]^{-1/2}$ не превосходят соответствующих скоростей $v^{(0,1)}$ и $v^{(0,2)}(\nu)$ в однородной среде, а времена пробега электромагнитных волн $\tau^{(1)}(x,\nu)$ и $\tau^{(2)}(x,\nu)$ удовлетворяют оценкам

$$\tau^{(1)}(x,\nu)=\int_{\Gamma_1(x,\nu)}n_1(x)d\sigma\ge\int_{\Gamma_1(x,\nu)}n_1^0d\sigma\ge$$
$$\ge\int_{L_1(x,\nu)}n_1^0d\sigma=\tau^{(0,1)}(x,\nu),$$

$$\tau^{(2)}(x,\nu)=\int_{\Gamma_2(x,\nu)}[n_2^2(x)(\nu_1^2+\nu_2^2)+n_1^2(x)\nu_3^2]^{1/2}d\sigma\ge$$

$$\ge\int_{\Gamma_2(x,\nu)}[(n_2^0)^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+(n_1^0)^2\nu_3^2]^{1/2}d\sigma\ge$$

$$\geq \int\limits_{L_2(x,\nu)} [(n_2^0)^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+(n_1^0)^2\nu_3^2]^{1/2}d\sigma = \tau^{(0,2)}(x,\nu).$$

В этих формулах $d\sigma$ — элемент евклидовой длины, $L_j(x,\nu)$ — отрезок прямой линии, проведённой через точку x в направлении вектора $-\nabla\varphi^{(0,j)}$, заключённый между x и плоскостью $\Sigma_j(\nu)$, а $\tau^{(0,j)}(x,\nu)$ — время пробега электромагнитной волны со скоростью $v^{(0,j)}(\nu)$ по отрезку $L_j(x,\nu)$ для значений $j=1,2$ соответственно. Так как

$$\varphi^{(j)}(x,\nu)=t_j^0(\nu)+\tau^{(j)}(x,\nu), \varphi^{(0,j)}(x,\nu)= \\ = t_j^0(\nu)+\tau^{(0,j)}(x,\nu),\ j=1,2,$$

и $\varphi^{(0,j)}(x,\nu)>0$ для $x\in S_+^{(j)}(\nu)$, то $\chi_j(x,\nu):= =\varphi^{(j)}(x,\nu)+\varphi^{(0,j)}(x,\nu)>0$ для $x\in S_+^{(j)}(\nu)$.

Зафиксируем $x\in S_+^{(j)}(\nu)$ и $\nu\in\mathbb{S}^2(\vartheta_0)$. Тогда функция $f_j(x,\omega,\nu)$ является функцией одной переменной ω, почти периодической по этой переменной. Так как интервал изменения ω бесконечен, то из равенства (19) можно найти $\chi_j(x,\nu)$ и, следовательно, вычислить сначала $\varphi^{(j)}(x,\nu)=\chi_j(x,\nu)-\varphi^{(0,j)}(x,\nu)$, а затем $\tau^{(j)}(x,\nu)=\varphi^{(j)}(x,\nu)-t_j^0(\nu)$ для $j=1,2$.

Таким образом, мы приходим к следующему варианту постановки обратной кинематической задачи: найти коэффициенты $\varepsilon_1(x)$ и $\varepsilon_2(x)$ по заданным временам пробега $\tau^{(j)}(x,\nu)$, $j=1,2$, от точек $x\in S_+^{(j)}(\nu)$ до точек плоскости $\Sigma_j(\nu)$ для всех $\nu\in\mathbb{S}^2(\vartheta_0)$.

Эта задача естественным образом распадается на две подзадачи: найти $\varepsilon_1(x)$ по $\tau^{(1)}(x,\nu)$, а затем найти $\varepsilon_2(x)$ по $\tau^{(2)}(x,\nu)$ при уже известном коэффициенте $\varepsilon_1(x)$. Каждая из этих задач является недоопределённой в том смысле, что времена пробега $\tau^{(j)}(x,\nu)$ для значений ν, лежащих вне шарового пояса $\mathbb{S}^2(\vartheta_0)$, не заданы. К настоящему времени нет результатов, связанных с вопросами единственности и устойчивости решения этих задач.

Линеаризуем обратные кинематические задачи, полагая, что разности $\tilde n_j=n_j(x)-n_j^0$, $j=1,2$, малы. В этом случае функции $\tau^{(j)}(x,\nu)$ могут быть представлены в виде

$$\tau^{(j)}(x,\nu)=\tau^{(0,j)}(x,\nu)+\tilde\tau^{(j)}(x,\nu),\quad j=1,2,$$

в котором функции $\tau^{(0,j)}(x,\nu)$ соответствуют временам пробега волн в однородной среде с коэффициентами $n_j(x)=n_j^0$, $j=1,2$, а $\tilde\tau^{(j)}(x,\nu)$ малы вместе с производными первого порядка. Тогда линеаризация уравнений эйконала для $\tau^{(j)}(x,\nu)$ приводит к равенствам

$$\nabla\tau^{(0,1)}(x,\nu)\cdot\nabla\tilde\tau^{(1)}(x,\nu)=n_1^0\tilde n_1(x),\quad \tilde\tau^{(1)}(x,\nu)\,|_{\Sigma_1(\nu)}=0, \tag{20}$$

$$(n_2^0)^{-2}[\tau_{x_1}^{(0,2)}(x,\nu)\cdot\tilde\tau_{x_1}^{(2)}(x,\nu)+\tau_{x_2}^{(0,2)}(x,\nu)\cdot\tilde\tau_{x_2}^{(2)}(x,\nu)]+ \\ +(n_1^0)^{-2}\tau_{x_3}^{(0,2)}(x,\nu)\cdot\tilde\tau_{x_3}^{(2)}(x,\nu)+ \\ +(n_1^0)^{-1}(n_2^0)^{-2}\tilde n_1(x)[(\tau_{x_1}^{(0,2)}(x,\nu))^2+(\tau_{x_2}^{(0,2)}(x,\nu))^2]+ \\ +(n_2^0)^{-1}(n_1^0)^{-2}\tilde n_2(x)(\tau_{x_3}^{(0,2)}(x,\nu))^2= \\ =(n_2^0)^{-1}\tilde n_2(x)+(n_1^0)^{-1}\tilde n_1(x),\quad \tilde\tau^{(2)}(x,\nu)\,|_{\Sigma_2(\nu)}=0. \tag{21}$$

Учитывая, что

$$\nabla\tau^{(0,1)}(x,\nu)=n_1^0\nu,\quad \nabla\tau^{(0,2)}(x,\nu)=(n_2^0\nu_1,\ n_2^0\nu_2,\ n_1^0\nu_3),$$

и интегрируя равенство (20) вдоль $L_1(x,\nu)$, а равенство (21) вдоль $L_2(x,\nu)$, приходим к формулам

$$\tilde\tau^{(1)}(x,\nu)=\int\limits_{L_1(x,\nu)}\tilde n_1(\xi)d\sigma, \tag{22}$$

$$\tilde\tau^{(2)}(x,\nu)=\int\limits_{L_2(x,\nu)}[(n_2^0)^{-1}\tilde n_2(\xi)(\nu_1^2+\nu_2^2)+ \\ +(n_1^0)^{-1}\tilde n_1(\xi)\nu_3^2]ds. \tag{23}$$

В формуле (23) $ds=[(n_2^0)^2(\nu_1^2+\nu_2^2)+(n_1^0)^2\nu_3^2]^{1/2}d\sigma$ — элемент римановой длины метрики (12) для однородной среды.

Положим в формулах (22), (23) $\nu=(\cos\varphi,\sin\varphi,0)$, $x\in S_+^{(j)}(\nu)$. Тогда они преобразуются к виду

$$\tilde\tau^{(j)}(x,\nu)=\int\limits_{L_j(x,\nu)}\tilde n_j(\xi)d\sigma,\ \ x\in S_+^{(j)}(\nu),\quad j=1,2. \tag{24}$$

Левые части равенств (24), в рамках линейного приближения, известны для всех $x\in S_+^{(j)}(\nu)$ и $\varphi\in[0,2\pi]$. Поэтому для определения каждой функции $\tilde n_j(x)$, $j=1,2$, возникает обычная задача рентгеновской томографии: найти подынтегральную функцию через интегралы по семействам всевозможных прямых, параллельных плоскости $x_3=0$ и пересекающих область Ω. Решение этой задачи единственно и устойчиво в подходящих функциональных пространствах. Таким образом, линеаризованная обратная задача допускает единственное и устойчивое решение. Существуют многочисленные алгоритмы её решения.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 17–0100120).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Романов В.Г.* // Сиб. матем. журн. 2019. Т. 60. № 4. С. 845–859.
2. *Вайнберг Б.Р.* // УМН. 1975. Т. 30. № 2. С. 3–55.
3. *Klibanov M.V., Romanov V.G.* // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2015. V. 23. № 4. P. 415–428.
4. *Klibanov M.V., Romanov V.G.* // Euras. J. of Mathematical and Computer Applications. 2015. V. 3. № 1. P. 48–63.
5. *Novikov R.G.* // J. Geometrical Analysis. 2015. DOI: 10.1007/5.12220-014-9553-7
6. *Novikov R.G.* Bulletin des Sciences Math. 2015. DOI: 10.1016/j.bulsci. 2015.04.005
7. *Klibanov M.V., Romanov V.G.* // J. Inverse and Ill-Posed Problems. 2015. V. 23. № 2. P. 187–193.
8. *Klibanov M.V., Romanov V.G.* // Inverse Problems. 2016. V. 32. № 2. 015005 (16pp). DOI: 10.1088/0266-5611/32/1/015005
9. *Romanov V.G., Yamamoto M.* // Inverse Problems and Imaging. 2019. V. 13. № 1. P. 81–91.
10. *Романов В.Г.* // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58. № 4. С. 916–924.
11. *Романов В.Г.* // ДАН. 2017. Т. 474. № 4. С. 413–417.
12. *Романов В.Г.* // Сиб. матем. журн. 2018. Т. 59. № 3. С. 494–504.
13. *Романов В.Г.* // ДАН. 2019. Т. 484. № 3. С. 269–272.

AN INVERSE PHASELESS PROBLEM FOR ELECTRODYNAMIC EQUATIONS IN AN ANISOTROPIC MEDIUM

Corresponding Member of the RAS V. G. Romanov

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation

Received May 24, 2019

For the system of equations of electrodynamics which has the anisotropy of the permittivity, an inverse problem of determining the permittivity is studied. It is supposed that the permittivity is characterized by the diagonal matrix $\epsilon = \mathrm{diag}\,(\varepsilon_1(x), \varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x))$ and ε_1 and ε_2 are positive constants anywhere outside of a bounded domain $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$. Periodic in time solutions of the system of Maxwell's equations related to two modes of plane waves falled down from infinity on the local non-homogeneity located in Ω_0 is considered. For determining functions $\varepsilon_1(x)$ and $\varepsilon_2(x)$ some information on the module of the vector of the electric strength of two interfered waves is given. It is demonstrated that this information reduces the original problem to two inverse kinematic problems with incomplete data about travel times of the electromagnetic waves. An investigation of the linearized statement for these problems is given. It is shown that in the linear approximation the problem of the determining $\varepsilon_1(x)$ and $\varepsilon_2(x)$ is reduced to two X-ray tomography problems.

Keywords: Maxwell equations, anisotropy, plane wave, phaseless inverse problem.