ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 6, с. 587–589

МАТЕМАТИКА

УДК 519.175.4

РАЗМЕР МАКСИМАЛЬНОГО ПОДГРАФА СЛУЧАЙНОГО ГРАФА С ЗАДАННЫМ ЧИСЛОМ РЁБЕР

Н. М. Деревянко[1], М. Е. Жуковский[1,2,3,*], М. Рассиас[4], А. Ю. Скоркин[5]

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 25.07.2019 г.

Поступило 27.07.2019 г.

Мы доказали, что максимальный размер k индуцированного подграфа в биномиальном случайном графе $G(n,p)$ с заданным числом рёбер $e(k)$ (при некоторых ограничениях на эту функцию) с вероятностью, стремящейся к 1, принимает одно из двух значений.

Ключевые слова: биномиальный случайный граф, максимальный подграф, концентрация.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524886587-589

Мы изучаем некоторые предельные характеристики биномиального случайного графа $G(n,p)$ (см. [1–6]), где $p \in (0,1)$ — произвольное фиксированное число, не зависящее от n. Напомним, что множество вершин этого графа — $\{1, 2, \ldots, n\}$ и каждая пара вершин соединена ребром с вероятностью p независимо от всех остальных (более формально, $G(n,p)$ — это случайный элемент, принимающий значения во множестве всех графов на $\{1, 2, \ldots, n\}$, с распределением $\mathrm{P}(G(n,p) = H) = p^{e(H)}(1-p)^{\binom{n}{2}-e(H)}$, где $e(H)$ — количество рёбер в H).

В [7–10] доказано, что максимальный размер (его называют числом независимости) множества вершин в $G(n,p)$, между которыми нет рёбер, с вероятностью, стремящейся к 1, принимает одно из двух значений, $f_0(n)$ и $f_0(n)+1$, где

$$f_0(n) = \Big\lfloor 2\log_{1/(1-p)} n - 2\log_{1/(1-p)}\log_{1/(1-p)} n + 2\log_{1/(1-p)}\frac{e}{2} + 0{,}9 \Big\rfloor.$$

Некоторые уточнения и обобщения этого результата можно найти, например, в [11, 12].

В таких случаях говорят, что число независимости сконцентрировано в двух точках. Естественно задаться вопросом, можно ли как-то ослабить или изменить условие на множество вершин, чтобы концентрация сохранилась. Рассматриваются два способа такого изменения — наложение ограничений на структуру индуцированного подграфа и наложение ограничений на число рёбер индуцированного подграфа. В данной работе мы обратимся ко второму способу.

Рассмотрим два совершенно естественных ограничения: в первом случае количество рёбер не превосходит заданного, а во втором — в точности равно.

Итак, пусть $t\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}_+$ — некоторая функция. Пусть $X_n[t]$ — максимальный размер k множества вершин в $G(n,p)$, индуцирующего (множество $A \subset V(G)$ вершин графа G индуцирует в нём подграф $G|_A$, множество вершин которого равно A, а множество рёбер образовано всеми рёбрами графа G, оба конца которых принадлежат A) подграф с не более $t(k)$ рёбрами, а $Y_n[t]$ — максимальный размер k множества вершин в $G(n,p)$, индуцирующего подграф с ровно $t(k)$ рёбрами.

В [13] доказано, что при некоторых ограничениях на t величина $X_n[t]$ сконцентрирована в двух точках.

Теорема 1 (N. Fountoulakis, R.J. Kang, C. McDiarmid, 2014). *Пусть* $t = t(k) = o\left(\frac{k\sqrt{\ln k}}{\sqrt{\ln\ln k}}\right)$,

$$f_t(n) = \Big\lfloor 2\log_b n + (t-2)\log_b\log_b(np) - t\log_b t + t\log_b\frac{2pe}{1-p} + 2\log_b\frac{e}{2} + 0{,}9 \Big\rfloor.$$

Тогда с вероятностью, стремящейся к 1,

$$X_n[t] \in \{f_t(n), f_t(n)+1\}.$$

Заметим, что если t растёт значительно быстрее, то никакой подобный результат не верен (нет концентрации не только в двух точках, но и в любом

[1] Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.

[2] Кавказский математический центр, Майкоп, Республика Адыгея

[3] Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Москва

[4] Цюрихский университет, Швейцария

[5] Адыгейский государственный университет, Майкоп, Республика Адыгея

[*] E-mail: zhukmax@gmail.com

другом фиксированном числе точек). Так, если, скажем, $t = p\left(\binom{k}{2} - 10k\right)$, то с некоторой асимптотической положительной вероятностью $X_n[t] = n$ по центральной предельной теореме, так как количество рёбер в $G(n, p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами $\binom{n}{2}$ и p. Но при этом для любого фиксированного натурального числа m с положительной асимптотической вероятностью $X_n[t] \leq n - m$ (и она убывает с ростом m). Связано это с тем, что с вероятностью, стремящейся к 1, максимальная степень случайного графа не превосходит

$$np + 2\sqrt{p(1-p)n\ln n} \quad \text{(см. [14]).}$$

Для случайной величины $Y_n[t]$ такого простого рассуждения при t, близких к $p\binom{k}{2}$, провести не удаётся. Тем не менее и в этой ситуации концентрации в конечном множестве точек нет (этот результат, сформулированный ниже, был доказан Дж. Балогом и М. Жуковским и доступен по ссылке https://arxiv.org/pdf/1904.05307.pdf).

Теорема 2 (J. Balogh, M. Zhukovskii, 2019). *Пусть*

$$t(k) = \binom{k}{2} p + O(k).$$

(i) *Найдётся такое число* $\mu > 0$, *что для любых* $c > \mu$ *и* $C > 2c + \mu$ *выполнено*

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(n - C\sqrt{\frac{n}{\ln n}} < Y_n[t] < n - c\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right) \leq$$

$$\leq \limsup_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(n - C\sqrt{\frac{n}{\ln n}} < Y_n[t] < n - c\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right) < 1.$$

(ii) *Пусть для любой последовательности*

$$m_k = O\left(\sqrt{\frac{k}{\ln k}}\right)$$

целых неотрицательных чисел выполнено

$$\left|\left(t(k) - \binom{k}{2}p\right) - \left(t(k - m_k) - \binom{k - m_k}{2}p\right)\right| = o(k).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *найдутся такие* c, C, *что*

$$\liminf_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(n - C\sqrt{\frac{n}{\ln n}} < Y_n[t] < n - c\sqrt{\frac{n}{\ln n}}\right) > 1 - \varepsilon.$$

Таким образом, возникает вопрос, справедлива ли концентрация в двух точках $Y_n[t]$ для асимптотически меньших t. В частности, выполнен ли аналог теоремы 1? Нам удалось доказать, что он выполнен при ещё более общих условиях, а именно при $t = o\left(\frac{k^2}{\ln k}\right)$.

Теорема 3. *Пусть* $t = t(k) = o\left(\frac{k^2}{\ln k}\right)$ *и* $|t(k+1) - t(k)| = o\left(\frac{k}{\ln k}\right)$. *Пусть, кроме того,* $x = x(n)$ — *некоторое (единственное при достаточно больших* n*) решение уравнения*

$$x\ln\frac{n}{x} + x + t\ln\frac{x^2}{2} - t\ln t + t\ln\frac{p}{1-p} - \frac{x^2 - x}{2} \times$$
$$\times \ln\frac{1}{1-p} + \left(\frac{x^2}{2} - t\right)\ln\left(1 + \frac{t}{\frac{x^2}{2} - t}\right) = 0.$$

Тогда с вероятностью, стремящейся к 1,

$$Y_n[t] \in \{\lfloor x(n) - 0{,}1\rfloor, \lfloor x(n) - 0{,}1\rfloor + 1\}.$$

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 16–11–10014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bollobás B.* Random Graphs. 2nd ed. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.
2. *Janson S., Luczak T., Ruciński A.* Random Graphs. N.Y.: Wiley, 2000.
3. *Жуковский М.Е., Райгородский А.М.* Случайные графы: модели и предельные характеристики // Успехи матем. наук. 2015. Т. 70. 1. С. 35–88.
4. *Деревянко Н.М., Киселев С.Г.* Числа независимости случайных подграфов некоторого дистанционного графа // Проблемы передачи информации. 2017. Т. 53. № 4. С. 307–318.
5. *Егорова А.Н., Жуковский М.Е.* Опровержение закона нуля или единицы для экзистенциальных монадических свойств разреженного биномиального случайного графа // ДАН. 2019. Т. 484. № 5. С. 519–522.
6. *Ostrovsky L.B., Zhukovskii M.E.* Monadic Second-Order Properties of Very Sparse Random Graphs // Ann. Pure and Applied Logic. 2017. V. 168. № 11. P. 2087–2101.
7. *Bollobás B., Erdős P.* Cliques in Random Graphs // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1976. V. 80. P. 419–427.
8. *Grimmett G.R., McDiarmid C.J.H.* On colouring random graphs // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1975. V. 77. № 2. P. 313–324.
9. *Matula D.* The Employee Party Problem // Not. Amer. Math. Soc. 1972. V. 19. № 2. P. A–382.
10. *Matula D.* The Largest Clique Size in a Random Graph. Tech. Rep. Dept. Comp. Sci., Southern Methodist University, Dallas, Texas; 1976.
11. *Krivelevich M., Sudakov B., Vu V.H., Wormald N.C.*

On the Probability of Independent Sets in Random Graphs // Random Structures & Algorithms. 2003. V. 22. № 1. P. 1–14.
12. *Райгородский А.М.* Об устойчивости числа независимости случайного подграфа // ДАН. 2017. Т. 477. № 6. С. 649–651.
13. *Fountoulakis N., Kang R.J., McDiarmid C.* Largest Sparse Subgraphs of Random Graphs // European J. Combinatorics. 2014. V. 35. P. 232–244.
14. *Bollobás B.* The Distribution of the Maximum Degree of a Random Graph // Discrete Mathematics. 1980. V. 32. P. 201–203.

THE SIZE OF A MAXIMUM SUBGRAPH OF THE RANDOM GRAPH WITH A GIVEN NUMBER OF EDGES

N. M. Derevyanko[1], M. E. Zhukovskii[1,2,3], M. Rassias[4], A. Y. Skorkin[5]

[1]*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation*
[2]*Caucasus Mathematical Center, Maykop, Republic of Adygea, Russian Federation*
[3]*The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russian Federation*
[4]*University of Zurich, Zurich, Switzerland*
[5] *Adyghe State University, Maykop, Republic of Adygea, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov July 25, 2019

Received July 27, 2019

We have proven that the maximum size k of an induced subgraph of the binomial random graph $G(n, p)$ with a given number of edges $e(k)$ (under certain conditions on this function), with asymptotical probability 1, has at most two values.

Keywords: binomial random graph, maximum subgraph, concentration.