ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 6, с. 590–594

МАТЕМАТИКА

УДК 517.546.14

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЖЁСТКОСТИ ИЗОМЕТРИЙ НА ПЕРВОЙ ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Д. В. Исангулова

Представлено академиком РАН Ю.Г. Решетняком 15.06.2019 г.

Поступило 17.06.2019 г.

Установлена количественная теорема устойчивости изометрий на первой группе Гейзенберга с субримановой геометрией: доказано, что всякая $(1+\varepsilon)$-квазиизометрия области Джона группы Гейзенберга $\mathbb{H}$ близка к некоторой изометрии с порядком близости $\sqrt{\varepsilon}+\varepsilon$ в равномерной норме и с порядком близости ε в норме Соболева. Приведён пример, демонстрирующий асимптотическую точность результатов работы.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, квазиизометрия, изометрия, коэрцитивная оценка.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524886590-594

В 1961 г. Ф. Джон [1] доказал жёсткость изометрий: для локально $(1+\varepsilon)$-билипшицевого отображения f, где $\varepsilon<1$, существует движение φ такое, что

$$\|Df-D\varphi\|_{p,U}\le C_1p\varepsilon|U|^{1/p},\quad \sup_{x\in U}|f(x)-\varphi(x)|\le C_2(U)\varepsilon.$$

Ф. Джон доказал второе соотношение для области U специальной природы, называемой сейчас областью Джона, а первое — на кубах. Позже Ю.Г. Решетняк [2] другим методом установил оба эти соотношения на областях Джона без ограничения на ε.

В настоящей работе исследуется проблема геометрической жёсткости на первой группе Гейзенберга $\mathbb{H}$ с субримановой метрикой. Группа Гейзенберга — это трёхмерная нильпотентная контактная группа Ли. Анализ на группе Гейзенберга развит в работе А. Кораньи и Х.М. Раймана [3].

Д. Морбиделли и Н. Аркоцци [4] исследовали вопрос геометрической жёсткости для локально билипшицевых отображений группы Гейзенберга $\mathbb{H}$ и получили количественные оценки порядка близости. Однако следует отметить, что полученные ими порядки близости ($\varepsilon^{2^{-11}}$ в равномерной норме и $\varepsilon^{2^{-12}}$ в норме Соболева) очевидным образом далеки от оптимальных.

С.К. Водопьянов и Д.В. Исангулова доказали точную количественную жёсткость изометрий на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ при $n>1$ [5, 6]. Метод доказательства следует схеме Решетняка [7] доказательства устойчивости в теореме Лиувилля и существенно использует коэрцитивные оценки для дифференциального оператора первой степени с постоянными коэффициентами, ядро которого совпадает с алгеброй Ли группы изометрий. К сожалению, на первой группе Гейзенберга такой оператор получается неоднородным, у него появляются члены с производными второго порядка [8], поэтому его применение нецелесообразно. В нашей работе мы опираемся на схему П.П. Белинского доказательства устойчивости конформных отображений в $\mathbb{R}^n$ в равномерной норме [9].

Точки группы Гейзенберга можно отождествить с точками пространства $\mathbb{R}^3$ со следующим групповым законом:

$$(x,y,t)\cdot(x',y',t')=(x+x',y+y',t+t'-2xy'+2x'y).$$

Векторные поля $X=\dfrac{\partial}{\partial x}+2y\dfrac{\partial}{\partial t}$, $Y=\dfrac{\partial}{\partial y}-2x\dfrac{\partial}{\partial t}$, $T=\dfrac{\partial}{\partial t}=-\dfrac{1}{4}[X,Y]$ образуют левоинвариантный базис алгебры Ли. Подрасслоение $H\mathbb{H}$ касательного расслоения, образованное векторными полями X и Y, называется горизонтальным. На $H\mathbb{H}$ вводится скалярное произведение, относительно которого поля X и Y ортонормированы. Расстояние Карно–Каратеодори d определяется как инфимум длин всех горизонтальных кривых, соединяющих две точки (кусочно-гладкая кривая называется горизонтальной, если её касательный вектор почти всюду принадлежит $H\mathbb{H}$).

Пусть Ω — область в $\mathbb{H}$. Пространство Соболева $W_q^1(\Omega)$, $1\le q\le\infty$, состоит из функций $f\colon\Omega\to\mathbb{R}$, имеющих обобщённые производные Xf и Yf и конечную норму $\|f\|_{W_q^1(\Omega)}=\|f\|_{q,\Omega}+\|\nabla_{\mathcal{L}}f\|_{q,\Omega}$, где $\nabla_{\mathcal{L}}f=(Xf,Yf)$ — субградиент функции f, интегрирование идёт по мере Лебега на $\mathbb{R}^3$, которая является биинвариантной мерой Хаара. Если $f\in W_q^1(U)$ для каждого открытого ограниченного множества U,

Новосибирский национальный исследовательский государственный университет

E-mail: d.isangulova@g.nsu.ru

$\overline{U} \subset \Omega$, то говорят, что f принадлежит классу $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Определение 1 [10]. Непрерывное отображение $F = (f_1, f_2, f_3)\colon \Omega \to \mathbb{H}$ принадлежит классу Соболева $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{H})$, если выполнены следующие условия:

1) координатные функции f_1, f_2, f_3 принадлежат $ACL(\Omega)$;

2) $f_1, f_2 \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$;

3) вектора XF, YF принадлежат $H\mathbb{H}$ для почти всех $w \in \Omega$.

Определение 2 [6]. Пусть U — открытое множество на группе Гейзенберга $\mathbb{H}$, $L \geq 1$, а $F = (f_1, f_2, f_3)\colon U \to \mathbb{H}$ — непостоянное отображение класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(U, \mathbb{H})$. Отображение F называется L-квазиизометрией на U ($F \in QI_L(U)$), если $L^{-1}|\xi| \leq |D_h F(w)\xi| \leq L|\xi|$ для всех векторов $\xi \in H_w\mathbb{H}$ в почти всех точках $w \in U$, где $D_h F = \begin{pmatrix} Xf_1 & Yf_1 \\ Xf_2 & Yf_2 \end{pmatrix}$ — аппроксимативный горизонтальный дифференциал.

Множество L-квазиизометрий шире, чем множество локально L-билипшицевых отображений. Локальную билипшицевость можно гарантировать только для локально гомеоморфных квазиизометрий.

Определение 3 [1]. Область (открытое связное множество) $U \subset \mathbb{H}$ называется областью Джона с внутренним радиусом α и внешним радиусом β, или областью класса $J(\alpha, \beta)$, $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, если существует выделенная точка $p_0 \in U$ такая, что любая другая точка $p \in U$ может быть соединена в U с точкой p_0 спрямляемой кривой $\gamma(s)$, $0 \leq s \leq l \leq \beta$, где s — длина дуги, для которой $\gamma(0) = p$, $\gamma(l) = p_0$ и

$$\operatorname{dist}[\gamma(s), \partial U] \geq \frac{\alpha}{l} s \text{ для всех } s \in [0, l].$$

Основной результат работы сформулирован в следующей теореме.

Теорема. *Пусть U — область Джона $J(\alpha, \beta)$ на группе Гейзенберга $\mathbb{H}$. Тогда для всякой квазиизометрии $F \in QI_{1+\varepsilon}(U)$ существует изометрия Φ такая, что*

$$\sup_{w \in U} d(F(w), \Phi(w)) \leq N_1 \frac{\beta^2}{\alpha}(\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon),$$

$$\int_U \exp\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^5 \frac{N_2 |D_h F(w) - D_h \Phi(w)|}{\varepsilon}\right) dw \leq 16|U|.$$

Константы N_1 и N_2 не зависят от U и F.

Растяжение $\delta_{1+\varepsilon}(x, y, t) = ((1+\varepsilon)x, (1+\varepsilon)y, (1+\varepsilon)^2 t)$ показывает асимптотическую точность порядка близости в теореме.

Данная теорема закрывает вопрос геометрической жёсткости на всех группах Гейзенберга. Формулировка теоремы в точности совпадает с результатом на группах Гейзенберга $\mathbb{H}^n$ при $n > 1$ [6, теорема 1].

Приведём необходимые определения и вспомогательные результаты для доказательства.

Если $L(F) = 1$, то отображение F — изометрия ($F \in \mathrm{Isom}$). Всякое изометрическое отображение группы Гейзенберга $\mathbb{H}$ имеет вид $(\iota\circ)\pi_a \circ \varphi_A$, где $\iota(z, t) = (\bar{z}, -t)$ — отражение, $\pi_a(w) = a \cdot w$, $a \in \mathbb{H}$, — левый сдвиг, $\Phi_A(z, t) = (e^{iA} z, t)$, $A \in [0, 2\pi)$, — поворот [3]. Здесь мы использовали комплексную форму записи: $(z, t) \in \mathbb{H}$, где $z = (x + iy) \in \mathbb{C}$.

Определение 4. Определим квазиметрику $d^H\colon \mathbb{H} \times \mathbb{H} \to [0, \infty)$ как

$$d^H((x, y, t), (x', y', t')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$
$$(x, y, z),\ (x', y', z') \in \mathbb{H}.$$

Функция $d^H(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет всем аксиомам метрики кроме одной: она может зануляться на двух разных точках.

Для доказательства теоремы в равномерной норме на областях Джона достаточно доказать локальную устойчивость относительно d^H-квазиметрики.

Предложение 1. *Пусть U — область Джона $J(\alpha, \beta)$ на $\mathbb{H}$ с выделенной точкой w_*, $\boldsymbol{\kappa} \geq 1$. Рассмотрим такую квазиизометрию $F \in QI_L(U)$, что на каждом шаре $B = B(a, r) = \{w \in \mathbb{H}\colon d(a, w) < r\}$, $B(a, \boldsymbol{\kappa} r) \subset U$, определена изометрия Φ_B, удовлетворяющая следующему условию:*

$$\sup_{w \in B} d^H(\Phi_B \circ F(w), w) \leq \sigma r.$$

Построим изометрию $\Phi_* = \pi_{(0,0,s)} \circ \Phi_{B_0}$ с $B_0 = B(w_*, \operatorname{dist}(w_*, \partial U)/\boldsymbol{\kappa})$ и $\Phi_*(w_*) = (*, *, 0)$ $(s = -(w_*^{-1} \cdot (\Phi_{B_0} \circ F(w_*)))_3)$. Тогда

$$\sup_{w \in U} d^H(\Phi_* \circ F(w), w) \leq c_1 \sigma \beta$$

и

$$\sup_{w \in U} d(\Phi_* \circ F(w), w) \leq c_2(\sigma + \sqrt{(L+1)\sigma})\beta$$

с константами

$$c_1 = \frac{8\mathbf{к}}{2\mathbf{к}-1}\left(4L\mathbf{к}\frac{\beta}{\alpha}+2L+1\right) \le 56L\mathbf{к}\frac{\beta}{\alpha},\ c_2 > 0\,.$$

Для отображения $F\colon B(\mathbf{0},1)\to\mathbb{H}$, где $\mathbf{0}=(0,0,0)$ — единица группы $\mathbb{H}$, определим

$$\lambda_F = \inf_{\Phi\in\mathrm{Isom}}\sup_{w\in B(\mathbf{0},1)} d^H(\Phi\circ F(w),w).$$

При $L,\gamma\ge 1$ положим

$$\lambda_L^\gamma = \sup\{\lambda_F \mid F\in QI_L(B(\mathbf{0},\gamma))\}.$$

Цель нашей работы — оценить λ_L^4 в терминах $L-1$. Всюду далее мы будем обозначать $\lambda_L=\lambda_L^4$.

Свойства функции λ:

1) если множество $F(\overline{B(\mathbf{0},1)})$ ограничено, то λ_F^γ достигается для некоторой изометрии Φ;

2) $\lambda_L^\gamma\to 0$ при $L\to 1$ (в силу качественной теоремы устойчивости [6, лемма 6]);

3) $\lambda_L^{\gamma_1}\le\lambda_L^{\gamma_2}$, если $\gamma_1\ge\gamma_2$;

4) $\lambda_L^{\gamma_2}\le 56L\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\lambda_L^{\gamma_1}$, если $\gamma_1\ge\gamma_2$ (см. предложение 1);

5) если $\sup\limits_{w\in B(\mathbf{0},1)} d^H(F(w),w)\le c\lambda_L$ для некоторого $F\in QI_L(B(\mathbf{0},4))$ и $c\ge 1$, то

$$\sup_{w\in B(\mathbf{0},3/2)} d^H(F(w),w)\le(7c+4)\lambda_L.$$

Л е м м а 1. *Пусть* $F\in QI_L(B(\mathbf{0},3/2))$ *и* $\sup\limits_{w\in B(\mathbf{0},3/2)} d^H(F(w),w)\le c\lambda_L$. *Рассмотрим число* $r>0$ *и точки* w,w_0, *удовлетворяющие* $d^H(F(w),F(w_0))\le r^2$, $d(w,w_0)<r$ *и* $B(w_0,4r)\subset B(\mathbf{0},3/2)$. *Тогда*

$$d^H(w^{-1}F(w),w_0^{-1}F(w_0))\le 2(1+r+c)r\lambda_L.$$

Данная лемма выполняется для $w\in B(w_0,\ r^2/L)$, $B(w_0,4r)\subset B(\mathbf{0},3/2)$, $r<3/8$.

Построим нормализацию F_N, которая близка к оптимальному в некотором смысле.

О п р е д е л е н и е 5. Пусть $F\colon\overline{B(\mathbf{0},1)}\to\mathbb{H}$ — непрерывное отображение. Н о р м а л и з а ц и е й о т о б р а ж е н и я F называется $F_N=\Phi_A\circ\pi_a\circ F$, где $a=F(\mathbf{0})^{-1}$ и $A=-\arg(f(1,0,0)-f(0,0,0))$, $f\colon\overline{B(\mathbf{0},1)}\to\mathbb{C}$ — первая комплексная координатная функция отображения F.

Свойства нормализации F_N:

1) $F_N(0,0,0)=(0,0,0)$, $F_N(1,0,0)=(*\ge 0,0,*)$;

2) $\sup\limits_{w\in B(\mathbf{0},1)} d^H(F_N(w),w)\le 6\lambda_F$.

Отсюда сразу вытекает следующая

Л е м м а 2. *Существует число* $L_0\in[1,2)$ *такое, что всякая квазиизометрия* $F\in QI_L(B(\mathbf{0},4))$ *с* $F(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, $L\le L_0$, *удовлетворяет*

$$F(\overline{B(\mathbf{0},1)})\subset B(\mathbf{0},3/2).$$

Схема доказательства теоремы. Жёсткость в равномерной норме. Покажем, что $\lambda_L=O(L-1)$ при $L\to 1$. Пусть $\Lambda<L_0$ и $L^m\le\Lambda<L^{m+1}$. Мы будем рассматривать $l\le m$.

Р а с с м о т р и м $F\in QI_L(B(\mathbf{0},4))$ такую, что $\lambda_F\ge 9\lambda_L/10$. Без ограничения общности можно считать, что $F_N=F$. Свойство 5 функции λ влечёт

$$\sup_{w\in B(\mathbf{0},3/2)} d^H(F(w),w)\le c_3\lambda_L,\quad \text{где } c_3=46. \tag{1}$$

В силу леммы 2 $F^l(\overline{B(\mathbf{0},1)})\subset B(\mathbf{0},3/2)$ для всех $l\le m$. Поэтому

$$d^H(F^l(w),w)\le d^H(F^l(w),F^{l-1}(w))+\ldots$$
$$\ldots+d^H(F(w),w)\le c_3 l\lambda_L.$$

для всех $w\in\overline{B(\mathbf{0},1)}$ и $l=1,\ldots,m$.

Предположим, что

$$c_3 l\lambda_L\le r^2. \tag{2}$$

Тогда лемма 1 даёт

$$d^H((F^l(w))^{-1}\cdot F^{l+1}(w),w^{-1}F(w))\le$$
$$\le 2(1+r+c_3)r\lambda_L\le Nr\lambda_L \tag{3}$$

для всех $w\in\overline{B(\mathbf{0},1)}$ и $l=1,\ldots,m$, где $N=2(2+c_3)=96$.

Обозначим символами f^l и f_N^l — первые комплексные координатные функции отображения F^l и $(F^l)_N$ соответственно, $l=1,\ldots,m$. Пусть $f^l(1,0,0)=r_le^{i\theta_l}$. Мы имеем $\Psi_l=\Phi_{-\theta_l}$, где Ψ_l — изометрия, нормализующая F^l: $(F^l)_N=\Psi_l\circ F^l$. Поскольку $F^l(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, то Ψ_l состоит только из поворота без сдвига. При этом

$$|e^{i\theta_{l+1}}-e^{i\theta_l}|<3Nr\lambda_L,\quad |e^{i\theta_{l+1}}-1|<2c_3l\lambda_L,$$
$$l=1,\ldots,m. \tag{4}$$

Фиксируем точку $w_0 = (z_0, t_0) \in \overline{B(\mathbf{0},1)}$ — точку максимального отклонения:

$$d^H(F(w_0), w_0) = \sup_{w \in B(\mathbf{0},1)} d^H(F(w), w) \geq \frac{9}{10}\lambda_L.$$

Тогда неравенства (1), (3), (4) в точке w_0 дают

$$|f_N^{l+1}(w_0) - f_N^l(w_0) - f_N(w_0) + z_0| \leq$$
$$\leq |f^{l+1}(w_0) - f^l(w_0) - f(w_0) + z_0| +$$
$$+ |e^{iA_{l+1}} f^{l+1}(w_0) - e^{iA_l} f^l(w_0) - f^{l+1}(w_0) + f^l(w_0)| \leq$$
$$\leq Nr\lambda_L + |e^{iA_{l+1}} - 1| \cdot |f^{l+1}(w_0) - f^l(w_0)| +$$
$$+ |e^{iA_{l+1}} - e^{iA_l}| \cdot |f^l(w_0)| \leq$$
$$\leq Nr\lambda_L + 2c_3 l\lambda_L c_3\lambda_L + 3Nr\lambda_L \frac{3}{2} \leq Kr\lambda_L,$$
$$K = 6N = 576.$$

Суммируя по целым числам от 1 до l, мы получаем

$$|f_N^{l+1}(w_0) - z_0 - l(f_N(w_0) - z_0)| \leq Klr\lambda_L.$$

Возьмём $r = \dfrac{2}{5K}$. Поскольку $L^{l+1} \leq \Lambda$ для $l = 1, \ldots, m-1$, мы получаем

$$6\lambda_{L^{l+1}} \geq d^H((F^{l+1})_N(w_0), w_0) = |f_N^{l+1}(w_0) - z_0| \geq$$
$$\geq l|f_N(w_0) - z_0| - |f_N^{l+1}(w_0) - z_0 - l(f_N(w_0) - z_0)| \geq$$
$$\geq \frac{9}{10} l\lambda_L - Klr\lambda_L \geq \frac{1}{2} l\lambda_L,\ l = 1, \ldots, m-1.$$

Отсюда немедленно вытекает

$$l\lambda_L \leq 12\lambda_{L^{l+1}}, \quad l = 1, \ldots, m-1. \tag{5}$$

Далее мы показываем, что (2) выполняется по индукции при $\Lambda < 1 + \varepsilon_0$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$.

Предположим $m \geq 3$. Так как $L^m \leq \Lambda < L^{m+1}$, то

$$m \geq \frac{\ln\Lambda}{\ln\lambda} - 1 \quad \text{и} \quad \ln\Lambda - \ln\lambda \geq \frac{\ln\Lambda}{2}.$$

Следовательно, (5) влечёт

$$\lambda_L \leq \frac{12\lambda_\Lambda}{\dfrac{\ln\Lambda}{\ln L} - 1} \leq \frac{24\lambda_\Lambda}{\ln\Lambda}\ln L \leq C_1(L-1).$$

Оценки для $L > 1 + \varepsilon_0$ очевидны. Что и требовалось доказать. Далее, в силу предложения 1, мы получаем утверждение теоремы в равномерной норме.

Жёсткость изометрий в норме Соболева. Пусть U — область на группе $\mathbb{H}$. Однородный дифференциальный оператор Q действует на отображение $u\colon U \to \mathbb{R}^2$ следующим образом:

$$Qu = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} D_h u + (D_h u)^t \\ D_h u + JD_h uJ \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Оператор Q действует также и на соболевских отображениях u из U в $\mathbb{H}$. В этом случае $D_h u$ является аппроксимативным горизонтальным дифференциалом отображения u. Ядро оператора Q конечномерно на $\mathbb{H}$ [6, лемма 4]: $u \in Q$ тогда и только тогда, когда

$$u(z,t) = a + ikz + tb + iz^2\bar{b} + i|z|^2 b,$$
$$\text{где } a, b \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, мы можем применить коэрцитивные оценки работ [11, 12]: существует проектор P на ядро оператора Q, такой, что $\|D_h(u - Pu)\|_{2,B} \leq C\|Qu\|_{2,B}$ для всякой функции $u \in W_2^1(B, \mathbb{R}^2)$, B — некоторый шар. При этом, очевидно, что $\|D_h Pu\|_{2,B} \leq C\|u\|_{2,B}$.

Пусть $F \in QI_L(B)$, $d^H(w, F(w)) \leq C(L-1)$ для всех $w \in B$. Полный дифференциал DF — гомоморфизм алгебр Ли, сохраняющий градуировку, поэтому для почти всех $w \in \Omega$ существует число $\lambda(w, F)$ такое, что $DF(w)T = \lambda(w, F)T$. Отображение F класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{H})$ сохраняет (соответственно, меняет) KR-ориентацию [3], если $\lambda(w, F) > 0$ (соответственно, $\lambda(w, F) < 0$) для почти всех $w \in \Omega$.

В силу предложения 3 работы [13] существует число $\varepsilon_1 > 0$ такое, что отображение F не меняет KR-ориентацию, если $L < 1 + \varepsilon_1$. (В работе [13] речь идёт об отображениях с ограниченным искажением. Мы можем применять этот результат, поскольку квазиизометрии являются отображениями с ограниченным искажением.) Поскольку F сохраняет KR-ориентацию при $L < 1 + \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$, то

$$|Q(w^{-1} \cdot F(w))| \leq \frac{L^2 - 1}{2}(|D_h F(w) - I| + 2) +$$
$$+ \frac{1}{2}|D_h F(w) - I|^2$$

почти всюду в U [6, лемма 2] .

Обозначим $u(w) = w^{-1} \cdot F(w)$. Мы получаем

$$\|D_h u\|_{2,B} \leq \|D_h u - D_h(Pu)\|_{2,B} + \|D_h(Pu)\|_{2,B} \leq$$
$$\leq C\|Qu\|_{2,B} + C(L-1) \leq C(L-1)\|D_h u\|_{2,B} +$$
$$+ C(L-1) + \|D_h u\|_{4,B}^2.$$

Осталось оценить $\|D_h u\|_{4,B}^2$. Качественная жёсткость изометрий в норме Соболева [6, лемма 5] означает, что отображение $D_h F$ является отображением с ограниченным удельным колебанием в норме L_2

относительно $O(2)$ (см. [14, определения 1 и 2]). Следовательно, при L, близком к 1, выполняется оценка $\| D_h F - I \|^2_{4,B} \le \mu(L-1) \| D_h F - I \|_{2,B}$ для $F \in QI_L(U)$, $B \subset U$, $\mu\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\mu(t) \to 0$ при $t \to 0$ [14, следствие теоремы 1].

Следовательно, при L, близких к 1, $\| D_h u \|_{2,B} \le C(L-1)$. Далее, стандартными методами мы получаем результат теоремы на областях Джона. Например, можно воспользоваться доказательством теоремы 1 работы [6] или [15].

Источник финансирования. Публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (проект № 1.3087.2017/4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *John F.* // Comm Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 391–413.
2. *Решетняк Ю.Г.* // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35. № 4. С. 860–878.
3. *Korányi A., Reimann H.M.* // Inv. Math. 1985. V. 80. P. 309–338. DOI: 10.1007/BF01388609
4. *Arcozzi N., Morbidelli D.* // Comment. Math. Helv. 2008. V. 83. № 1. P. 101–141. DOI: 10.4171/CMH/120
5. *Водопьянов С.К., Исангулова Д.В.* // ДАН. 2008. Т. 420. № 4. С. 583–588.
6. *Vodopyanov S.K., Isangulova D.V.* // Mat. ann. 2013. V. 355. № 4. P. 1301–1329. DOI: 10.1007/s00208-012-0820-2
7. *Решетняк Ю.Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1996.
8. *Исангулова Д.В.* // ДАН. 2019. Т. 485. № 4. С. 405–409.
9. *Белинский П.П.* // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14. № 3. С. 475–483.
10. *Водопьянов С.К.* // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37. № 6. С. 1269–1295.
11. *Романовский Н.Н.* // Алгебра и анализ. 2004. Т. 16. № 2. С. 82–119.
12. *Романовский Н.Н.* // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49. № 1. С. 155–165.
13. *Исангулова Д.В.* // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48. № 6. С. 1228–1245.
14. *Исангулова Д.В.* // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48. № 2. С. 313–334.
15. *Buckley S.M.* // J. d'Analyse Math. 1999. V. 79. № 5. P. 215–240. DOI: 10.1007/BF02788242

SHARP ESTIMATES OF THE GEOMETRIC RIGIDITY ON THE FIRST HEISENBERG GROUP

D. V. Isangulova

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS Yu. G. Reshetnyak June 15, 2019

Received June 17, 2019

We prove quantitative stability of isometries on the first Heisenberg group with sub-Riemannian geometry: every $(1+\varepsilon)$-quasi-isometry of the John domain of the Heisenberg group $\mathbb{H}$ is close to some isometry with order of closeness $\sqrt{\varepsilon} + \varepsilon$ in the uniform norm and with the order of closeness ε in the Sobolev norm. An example demonstrating the asymptotic sharpness of the results is given.

Keywords: Heisenberg group, quasi-isometry, isometry, coercive estimate.