

УДК 539.12:537.63:537.868

## СПЕКТР ИЗЛУЧЕНИЯ И ТРАЕКТОРИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ НЕОДНОРОДНОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

В. Б. Лапшин<sup>1,2,\*</sup>, А. А. Скубачевский<sup>3</sup>, А. В. Белинский<sup>1</sup>, академик РАН А. С. Бугаев<sup>3,4</sup>

Поступило 17.06.2019 г.

На примере неоднородной электромагнитной волны, создаваемой суперпозицией двух произвольно направленных по отношению друг к другу плоских монохроматических электромагнитных волн, демонстрируется подход, позволяющий моделировать широкий спектр электромагнитных волн. Численно решена полная система уравнений, описывающих движение электрона в неоднородном электромагнитном поле. Обнаружены и исследованы особенности траектории и спектра излучения электрона.

*Ключевые слова:* неоднородные электромагнитные волны, спектр излучения, траектория электрона.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524886604-608>

Одной из первых работ, посвящённых взаимодействию заряда с электромагнитной волной, является работа Д.М. Волкова [1]. Траектория электрона в плоской неполяризованной электромагнитной волне получена в результате решения уравнения Дирака в полуклассической постановке: электромагнитное поле в классической, а электрон в квантово-механической. Уравнение Дирака применимо для описания взаимодействия частиц путём обобщения методов классической и квантовой теории только к частицам с полуцелыми спинами. Решение Волкова внесло значительный вклад в исследование поведения электронов в мощных электромагнитных полях. Однако результаты работы [1] неприменимы для неоднородных электромагнитных волн, так как уравнения движения электрона в этом случае являются нелинейными.

Использование уравнения Дирака оправдано в случае, когда масштабы явления сравнимы с комптоновской длиной волны. В связи с этим для большого класса физических явлений при исследовании взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем допустимо использование уравнений классической электродинамики.

В работах [2–6] рассмотрено движение заряженной частицы в однородной электромагнитной волне. Для частного случая заряженной частицы в неоднородной волне, а именно поперечно-электрической и поперечно-магнитной, в работе [2] получены приближённые решения методом возмущений. В работе [8] рассмотрен частный случай амплитудно-модулированной циркулярно поляризованной электромагнитной волны.

В классической постановке траектория заряженной частицы в произвольной электромагнитной волне находится как решение системы нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (1). В данной работе на примере неоднородной электромагнитной волны, создаваемой суперпозицией двух произвольно направленных по отношению друг к другу плоских монохроматических электромагнитных волн, предложен подход, позволяющий моделировать широкий спектр интерференционных структур.

Уравнение движения частицы для численного решения удобно записать в виде

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{q}{m\gamma} \left( E_x + \frac{y'}{c} H_z - \frac{z'}{c} H_y - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c^2} (x'^2 E_x + x'y'E_y + x'z'E_z) \right), \\ y'' &= \frac{q}{m\gamma} \left( E_y + \frac{z'}{c} H_x - \frac{x'}{c} H_z - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c^2} (x'y'E_x + y'^2 E_y + y'z'E_z) \right), \\ z'' &= \frac{q}{m\gamma} \left( E_z + \frac{x'}{c} H_y - \frac{y'}{c} H_x - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{c^2} (x'z'E_x + y'z'E_y + z'^2 E_z) \right), \end{aligned} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

<sup>2</sup> Институт прикладной геофизики им. Е.К. Федорова, Москва

<sup>3</sup> Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.

<sup>4</sup> Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской Академии наук, Москва

\*E-mail: lapshin-vb@mail.ru

где  $x, y, z$  – координаты и скорости (со штрихами) частицы,  $m$  – её масса,  $q$  – заряд,  $\vec{E}, \vec{H}$  – электрическое и магнитное поле неоднородной волны,  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$  – компоненты электрического и магнитного полей,  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ ,  $c$  – скорость света,  $t$  – время.

Положение плоских монохроматических волн задаётся тремя углами  $\varphi, \theta, \psi$ :  $\varphi$  – угол между направлением оси  $OX$  и проекцией волнового вектора на плоскость  $(x, y)$ ;  $\theta$  – угол между направлением волнового вектора и проекцией этого вектора на плоскость  $(x, y)$ ;  $\psi$  – угол между направлением вектора электрического поля и векторным произведением волнового вектора и нормали к плоскости  $(x, y)$ .

Суперпозицию двух произвольно направленных плоских волн запишем

$$E_x = E_{x,0}^{(1)} \sin(\omega_0 t - A_x k_0 x - A_y k_0 y - A_z k_0 z) + E_{x,0}^{(2)} \sin(\omega_0 t - B_x k_0 x - B_y k_0 y - B_z k_0 z + \Phi),$$

$$E_y = E_{y,0}^{(1)} \sin(\omega_0 t - A_x k_0 x - A_y k_0 y - A_z k_0 z) + E_{y,0}^{(2)} \sin(\omega_0 t - B_x k_0 x - B_y k_0 y - B_z k_0 z + \Phi),$$

$$E_z = E_{z,0}^{(1)} \sin(\omega_0 t - A_x k_0 x - A_y k_0 y - A_z k_0 z) + E_{z,0}^{(2)} \sin(\omega_0 t - B_x k_0 x - B_y k_0 y - B_z k_0 z + \Phi),$$

$$H_x = H_{x,0}^{(1)} \sin(\omega_0 t - A_x k_0 x - A_y k_0 y - A_z k_0 z) + H_{x,0}^{(2)} \sin(\omega_0 t - B_x k_0 x - B_y k_0 y - B_z k_0 z + \Phi),$$

$$H_y = H_{y,0}^{(1)} \sin(\omega_0 t - A_x k_0 x - A_y k_0 y - A_z k_0 z) + H_{y,0}^{(2)} \sin(\omega_0 t - B_x k_0 x - B_y k_0 y - B_z k_0 z + \Phi),$$

$$H_z = H_{z,0}^{(1)} \sin(\omega_0 t - A_x k_0 x - A_y k_0 y - A_z k_0 z) + H_{z,0}^{(2)} \sin(\omega_0 t - B_x k_0 x - B_y k_0 y - B_z k_0 z + \Phi),$$

где  $A_{x,y,z}, B_{x,y,z}$  – проекции волновых векторов волн на оси координат, индекс “0” обозначает компоненты амплитуд,  $\Phi$  – фаза,  $\omega_0$  – частота волны. При этом

$$A_x = \cos \varphi_1 \cos \theta_1, A_y = \sin \varphi_1 \cos \theta_1, A_z = \sin \theta_1, \\ B_x = \cos \varphi_2 \cos \theta_2, B_y = \sin \varphi_2 \cos \theta_2, B_z = \sin \theta_2,$$

$$E_{x,0} = E_0 (\cos \psi_1 \sin \varphi_1 - \sin \psi_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1) + E_0 (\cos \psi_2 \sin \varphi_2 - \sin \psi_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2),$$

$$E_{y,0} = E_0 (-\cos \psi_1 \cos \varphi_1 - \sin \psi_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1) + E_0 (-\cos \psi_2 \cos \varphi_2 - \sin \psi_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2),$$

$$E_{z,0} = E_0 \sin \psi_1 \cos \theta_1 + E_0 (\sin \psi_2 \cos \theta_2),$$

$$H_{x,0} = H_0 (\sin \psi_1 \sin \varphi_1 + \cos \psi_1 \sin \theta_1 \cos \varphi_1) + H_0 (\sin \psi_2 \sin \varphi_2 + \cos \psi_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2),$$

$$H_{y,0} = H_0 (-\sin \psi_1 \cos \varphi_1 + \cos \psi_1 \sin \theta_1 \sin \varphi_1) + H_0 (-\sin \psi_2 \cos \varphi_2 + \cos \psi_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2),$$

$$H_{z,0} = H_0 (-\cos \psi_1 \cos \theta_1) + H_0 (-\cos \psi_2 \cos \theta_2),$$

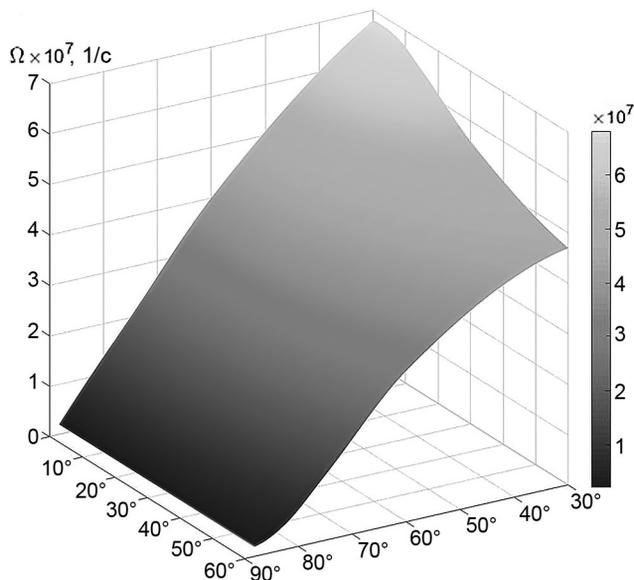
где  $E_0$  и  $H_0$  – амплитуды неоднородной волны.

При решении этой системы уравнений использовалась схема Рунге–Кутты с переменным шагом, известная как схема Дормана–Принса. В качестве численного значения для следующего шага брался результат, полученный по схеме пятого порядка точности. В этом методе применяется и схема четвертого порядка для управления шагом интегрирования. Различаются указанные выше схемы нижней строчкой коэффициентов в таблице Бутчера. Эта схема отличается от большинства схем с переменным шагом интегрирования тем, что в качестве решения мы берём результат, полученный по схеме более высокого порядка, а шаг по времени задаётся с помощью схемы более низкого порядка.

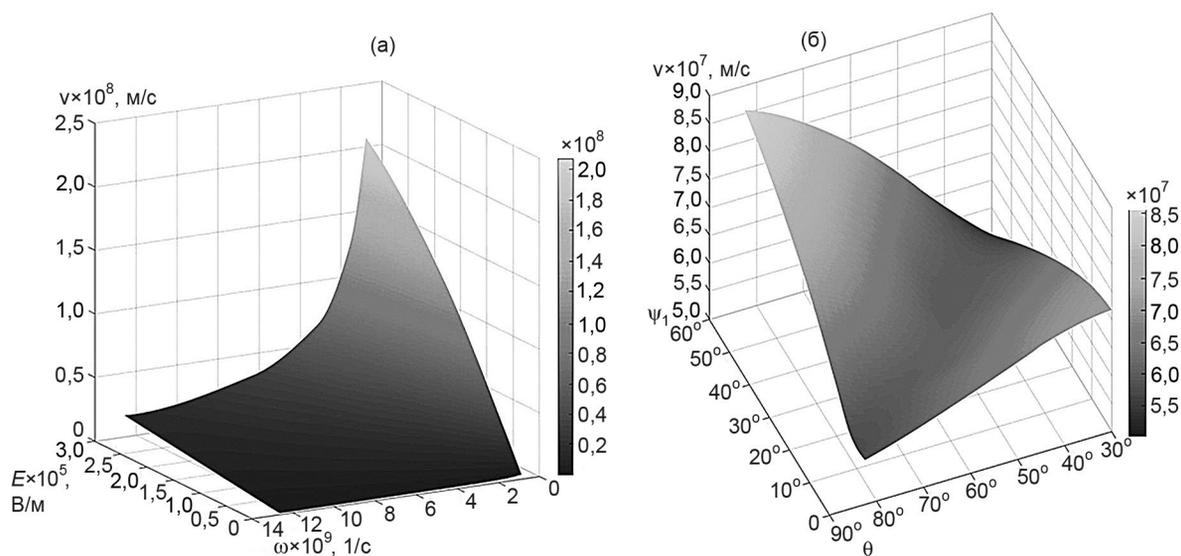
Траектория и скорости дрейфа частицы в поле плоской волны, рассчитанные численно, совпадают с вычисленными аналитически при разных значениях начальных параметров [2].

Для вычисления спектра излучения частицы неоднородную волну можно представить в виде интеграла Фурье. Используя равенство Парсевеля и формулу Лармора для полной мощности излучения, вычислим спектральную плотность излучения заряженной частицы. Спектр излучения заряда в неоднородной электромагнитной волне в общем случае содержит набор частот вследствие сложной интерференционной структуры, в общем случае нестационарной, определяющей ускорение частицы. Значение частоты модулирующего сигнала  $\Omega$  и боковых частот  $\omega_0 \pm \Omega$  модулируемого сигнала задаётся углами  $\varphi, \theta, \psi$ , определяющими пространственное положение плоских волн, образующих неоднородную волну. Таким образом, углы являются параметрами, определяющими частоты модулирующего  $\Omega$  и модулированного излучения  $\omega_0 \pm \Omega$ . На рис. 1 представлена зависимость частоты модулирующего сигнала от углов  $\theta, \psi$ .

На рис. 2 представлена рассчитанная зависимость скорости частицы от электрического поля и несущей частоты волны (рис. 2а) и от углов  $\theta, \psi$  (рис. 2б). В начальный момент времени  $t=0$  частица находится



**Рис. 1.** Зависимость модулирующей частоты  $\Omega$  неоднородной волны от углов  $\theta_1$  и  $\psi_1$  ( $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ ,  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ ,  $\psi_2 = 0$ ) с амплитудой электрического и магнитного полей  $3 \cdot 10^5$  В/м, несущей частотой  $10^9$  Гц и начальной скоростью  $5 \cdot 10^5$  м/с.



**Рис. 2.** Зависимость скорости частицы от амплитуды электрического поля и несущей частоты волны (а) и от углов  $\psi_1$ ,  $\theta_1$  (б). Начальная скорость  $5 \cdot 10^5$  м/с,  $\psi_1 = \psi_2 = \pi/2$ ,  $\theta_1 = \pi/3$ ,  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ ,  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ . Амплитуда электрического и магнитного полей  $3 \cdot 10^5$  В/м, несущая частота  $10^9$  Гц,  $\Phi = 0$ .

на одной из плоскостей нулевого электрического

поля  $y = \frac{\lambda}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)} \left(\frac{1}{2} + n\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  с начальной

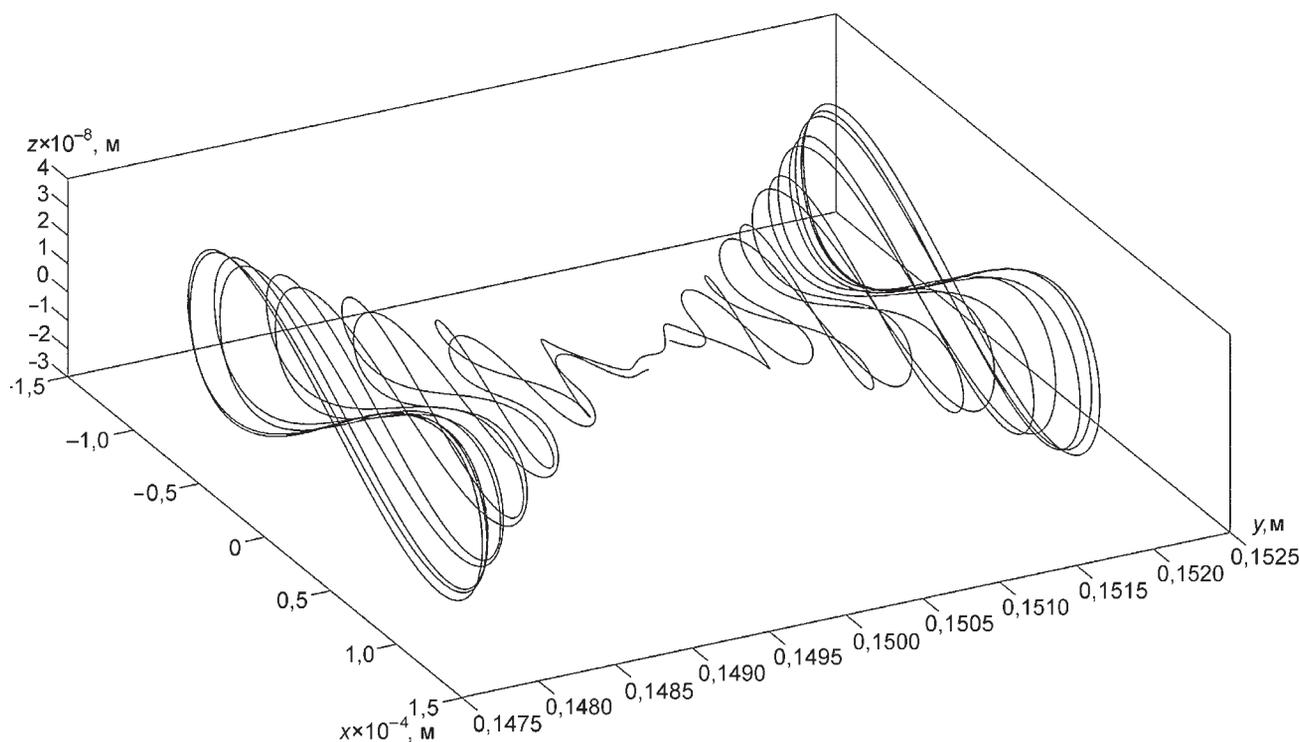
скоростью, направленной по оси  $OY$ , с координатами  $x(0) = z(0) = 0$ .

Траектория заряженной частицы расположена между плоскостями с максимальными значениями электрического поля и показана на рис. 3. Частица инжектируется с начальными координатами

$$y_0 = \frac{\lambda}{4 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right)}; \quad x_0 = z_0 = 0.$$

Представленные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1) рассчитанная траектория (рис. 3) является точным численным решением полной системы уравнений (1), в отличие от решений в [2, 5], которые являются приближёнными и получены методом возмущений для частных случаев поперечно-электрической и поперечно-магнитной волн;



**Рис. 3.** Траектория частицы в волне, созданной двумя плоскими электромагнитными волнами:  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$ ,  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ ,  $\theta_1 = \pi/3$ ,  $\theta_2 = 2\pi/3$ ,  $\Phi = 0$ . Начальная скорость направлена вдоль  $OY$ ,  $v_0 = 5 \cdot 10^5$  м/с, частота  $10^9$  Гц,  $E_0 = H_0 = 6 \cdot 10^3$  В/м.

2) значение частоты  $\Omega$  модулирующего сигнала и боковых частот модулируемого сигнала  $\omega_0 \pm \Omega$  определяется углами  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ , задающими пространственные направления плоских волн, образующих неоднородную электромагнитную волну. Таким образом, существует возможность управлять боковыми частотами, меняя значения  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ;

3) скорость частицы (рис. 2) с траекторией, указанной на рис. 3, в разной степени определяется параметрами  $\theta$ ,  $\psi$ ,  $\omega_0$ ,  $E_0$ . Значение скорости частицы в направлении  $X$  в основном определяется электрическим полем волны, а в направлении  $Y$  — так называемой пондермоторной силой, пропорциональной градиенту квадрата электрического поля;

4) особенностью траектории на рис. 3 является возможность инжектирования электронов в горловину воронки, совпадающей с одной из плоскостей нулевого электрического поля, в которой могут концентрироваться электроны, в том числе с субсветовой скоростью (рис. 2).

**Источник финансирования.** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 18–05–80023).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wolkov D.M.* // *Z. Phys.* 1935. V. 94. № 3/4. P. 250–260.
2. *Болотовский Б.М., Серов А.В.* // *УФН.* 2003. Т. 173. № 6. С. 667–678.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973.
4. *Гапонов А.В., Миллер М.А.* // *ЖЭТФ.* 1958. Т. 34. С. 168–169.
5. *Серов А.В.* // *Квантовая электроника.* 1998. Т. 25. № 3. С. 197–200.
6. *Андреев С.Н., Макаров В.П., Рухадзе А.А.* // *Квантовая электроника.* 2009. Т. 39. № 1. С. 68–72.
7. *Петров И.Б., Лобанов А.И.* Лекции по вычислительной математике. Уч. пособие. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2017. 523 с.
8. *Копытов Г.Ф., Мартынов А.А., Акинцов Н.С.* // *Экологический вестник научных центров ЧЭС.* 2014. № 2. С. 39–43.

## EMISSION SPECTRUM AND TRAJECTORY OF A CHARGED PARTICLE IN THE FIELD OF AN INHOMOGENEOUS ELECTROMAGNETIC WAVE

**V. B. Lapshin<sup>1,2</sup>, A. A. Skubachevskiy<sup>3</sup>, A. V. Belinsky<sup>1</sup>,  
Academician of the RAS A. S. Bugaev<sup>3,4</sup>**

<sup>1</sup>*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Fedorov Institute of Applied Geophysics, Moscow, Russian Federation*

<sup>3</sup>*Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation*

<sup>4</sup>*Kotelnikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Received June 17, 2019

Using the example of a non-uniform electromagnetic wave created by superposition of two plane monochromatic electromagnetic waves that are arbitrarily directed relative to each other, an approach is demonstrated that allows one to simulate a wide spectrum of electromagnetic waves. The complete system of equations describing the motion of an electron in a non-uniform electromagnetic field is solved numerically. The features of the trajectory and emission spectrum of the electron were found and investigated.

*Keywords:* inhomogeneous electromagnetic wave, emission spectrum, trajectory of electron.