УДК 517.938.5

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ К РЕАЛИЗУЕМОСТИ БИЛЛИАРДАМИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

В. В. Ведюшкина^{*}, академик РАН А. Т. Фоменко^{**}

Поступило 19.06.2019 г.

Вводятся классы интегрируемых билиардов: элементарные билиарды, топологические, книжки, с потенциалом, магнитным полем, геодезические билиарды. Эти классы используются для проверки гипотезы А.Т. Фоменко о реализуемости билиардами интегрируемых невырожденных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы, рассматриваемых с точностью до лиувиллевой эквивалентности. В классе книжных билиардов обнаружены топологические препятствия к реализуемости.

Ключевые слова: интегрируемая система, билиард, инвариант Фоменко–Цишанга.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524885471-475>

Билиард в плоской области, ограниченный дугами софокусных квадрик, интегрируем. А именно, отрезки траектории-ломаной лежат на прямых, касающихся квадрики, софокусной с квадриками, образующими границу билиарда [1]. Класс таких интегрируемых билиардов можно расширить, склеивая из них топологические билиарды — ориентируемые многообразия, а также комплексы — билиардные книжки. В работах В.В. Ведюшкиной исследована топология слоения Лиувилля таких билиардов, а именно вычислены инварианты Фоменко–Цишанга. Напомним, что слоения изознергетических 3-многообразий считаются лиувиллево эквивалентными, если существует сохраняющий ориентацию их послойный диффеоморфизм, сохраняющий ориентацию критических слоёв-окружностей. Полный инвариант слоения — меченая молекула Фоменко–Цишанга — представляет собой граф Рибба дополнительного интеграла, в вершинах которого расставлены атомы-бифуркации торov Лиувилля, а на рёбрах и самой молекуле числовые метки, показывающие склейку граничных торov атомов [2, 3]. Ранее авторы (см. [4, 5]) обнаружили среди таких билиардов множество лиувиллево эквивалентных им известных интегрируемых систем гамильтоновой механики, например, классические случаи интегрируемости (Эйлера, Ковалевской, Горячева–Чаплыгина и др.), их обобщения — случай Ковалевской на алгебре Ли $so(4)$ — и квадратично интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых поверхностях (сфере и торе). Опираясь на эти результаты, А.Т. Фоменко сформулировал гипотезу,

состоящую из шести пунктов, о реализуемости произвольных слоений Лиувилля (т.е. меченых молекул) интегрируемых систем с двумя степенями свободы (в классе лиувиллевой эквивалентности). Первый и второй пункты гипотезы А.Т. Фоменко о реализации атомов-бифуркаций торov Лиувилля (пункт А) и о моделировании грубых молекул (пункт В) уже доказаны В.В. Ведюшкиной и И.С. Харчевой (см. [6]). Сформулируем третий пункт.

Гипотеза С (меченые молекулы). Существует большой класс меченых молекул (т.е. инвариантов Фоменко–Цишанга [2], задающих множество всех интегрируемых систем с точностью до лиувиллевой эквивалентности), которые моделируются интегрируемыми билиардами. Иными словами, многие слоения Лиувилля невырожденных интегрируемых систем на изознергетических 3-поверхностях послойно диффеоморфны слоениям некоторых топологических билиардов (или билиардных книжек).

Перечислим классы билиардов, на которых естественно проверить гипотезу А.Т. Фоменко.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ БИЛЛИАРДЫ, ОГРАНИЧЕННЫЕ ДУГАМИ СОФОКУСНЫХ КВАДРИК

Под элементарным билиардом понимается часть плоскости, ограниченная дугами софокусных квадрик, такая, что углы на границе не превышают π (софокусные квадрики пересекаются под прямыми углами). Оказывается, что все такие билиарды интегрируемы [1]. Опишем границы элементарных билиардов более подробно. Выделим два случая. Первый: семейство софокусных квадрик, состоящее из эллипсов, гипербол и двух прямых (осей семей-

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

^{*}E-mail: arinir@yandex.ru

^{**}E-mail: atfomenko@mail.ru

ства — фокальная прямая и перпендикулярная ей прямая, проходящая через центр симметрии). Вторым случаем: семейство концентрических окружностей и прямых, проходящих через их общий центр.

В первом случае интегрируемость билиарда есть прямое следствие теоремы Якоби—Шаля об интегрируемости геодезического потока на квадриках в $\mathbb{R}^n$. Если квадрика — это эллипсоид в $\mathbb{R}^3$, то для каждой геодезической касательные к ней касаются одного и того же гиперboloида, принадлежащего к тому же семейству квадрик в $\mathbb{R}^3$, что и сам эллипсоид. Дж. Д. Биркгоф заметил, что если устремить малую полуось эллипсоида к нулю, то геодезический поток на эллипсоиде перейдет в билиард в эллипсе [1]. При этом интегрируемость сохранится. Если геодезическая касалась однополостного гиперboloида, то её образ будет касаться эллипса, а если её касательные прямые касались двуполостного гиперboloида, то билиардная траектория в её образе будет лежать на прямых, касательных к гиперболе, — образу двуполостного гиперboloида.

Из интегрируемости билиарда в эллипсе не сложно показать интегрируемость элементарных билиардов [1]. К элементарным билиардам можно отнести не только части плоскости, но и конечно-листные накрытия над ними, которые уже могут не иметь глобального изометричного вложения в плоскость. Таков, например, билиард C_{2n} , являющийся n -листным накрытием над билиардом C_2 , ограниченным двумя эллипсами [7]. Также естественно причислить к классу элементарных билиардов части билиардов C_n , ограниченные софокусными квадриками и не содержащие углов больше π [7].

В случае, если билиард ограничен концентрическими окружностями (одной или двумя), то его траектория либо всегда касается некоторой окружности с тем же центром, что и граница билиарда, либо лежит на прямых, проходящих через центр. Это также влечёт за собой интегрируемость.

Элементарные билиарды считаются эквивалентными, если их границы можно продеформировать друг в друга в классе софокусных квадрик (см. [7]).

Топологические билиарды. Топологическим билиардом называется двумерное ориентируемое многообразие, полученное изометричной склейкой элементарных билиардов. На склейки наложены следующие ограничения.

1. Склеиваемые билиарды находятся по одну сторону от сегмента склейки. Это условие исключает образование снова элементарного билиарда.

2. Концы рёбер склейки назовём вершинами склейки. Потребуем, чтобы в каждой вершине склейки сходилась либо четыре ребра склейки, либо два ребра склейки и два свободных ребра (на свободных ребрах склейки нет), либо два ребра склейки и ни одного свободного ребра (такие вершины назовём коническими точками).

При ударе о ребро склейки материальная точка продолжает движение по другому элементарному билиарду. Второе условие позволяет однозначно определить траекторию, попадающую в вершину склейки. Если в вершине сходятся четыре ребра, то никакого угла нет и движение определяется стандартно. Если два ребра склейки и два свободных ребра, то локально окрестность этой точки выглядит как граница билиарда — материальная точка отражается и переходит на другой билиард. Если же траектория достигает конической точки, то материальная после попадания в угол движется по тому же билиарду.

Билиардные книжки. Билиардная книжка — это клеточный комплекс, двумерными клетками которого являются элементарные билиарды, одномерными — их границы, а нульмерными — угловые точки билиардов. При этом комплекс снабжён перестановками $\sigma \in S_n$ на одномерных клетках — корешках книжки, где n — это количество двумерных клеток — листов книжки, примыкающих к данному корешку. Рассмотрим окрестность нульмерной клетки и примыкающие к ней билиарды. Угловая точка этих элементарных билиардов лежит на пересечении эллипса и гиперболы. Наложим на элементарные билиарды и перестановки, приписанные их границам в этой вершине, следующие ограничения:

1. Все элементарные билиарды, сходящиеся в этой вершине, локально расположены либо в одном, либо в двух соседних, либо в четырёх квадрантах относительно эллипса и гиперболы, проходящей через вершину;

2. Перестановки, соответствующие корешкам на двух пересекающихся кривых, обязаны коммутировать.

Последнее условие является естественным следствием требования корректности определения траектории, попадающей в вершину билиарда. Рассмотрим подробно ситуацию, когда в вершине сходятся два корешка склейки. Обозначим через σ_1 и σ_2 перестановки, приписанные этим корешкам (см. выше). Рассмотрим траектории, близкие к траектории попадающей точно в вершину — нульмерную

клетку. Они разбиваются на два класса. Для одних траекторий сначала происходит смена листа по перестановке σ_1 , а потом по σ_2 , а для других — наоборот. Если мы хотим корректно определить траекторию, попавшую в угол, как предел траекторий обоих классов, то естественно потребовать коммутирование σ_1 и σ_2 .

Введённые классы билиардов естественно вкладываются друг в друга. Элементарные билиарды — подкласс топологических, а топологические билиарды — подкласс билиардных книжек.

Билиарды с потенциалом. Перспективным направлением является введение потенциала Гаука. Оказывается, элементарный билиард с гуковским потенциалом, расположенным в центре симметрии софокусных квадратов, интегрируем (см. В.В. Козлов, Д.В. Трещёв, И.Ф. Кобцев, С.С. Пустовойтов). С.С. Пустовойтов вычислил бифуркационную диаграмму билиарда в окружности с отталкивающим центральным потенциалом. Оказалось, что она состоит из параболы, ограничивающей область отображения момента, и точки фокус-фокус, расположенной внутри, на оси параболы. Это утверждение развивает исследование Е.Е. Кантонистовой геодезических потоков на поверхности вращения с потенциалом [8]. Прямая, проходящая через фокус-фокус и параллельная директрисе параболы, разграничивает два типа изоэнергетических многообразий, а именно прямое произведение $S^1 \times S^3$ и трёхмерную сферу S^3 . Матрица монодромии при обходе точки фокус-фокус имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Построим теперь билиардную книжку, склеенную из n кругов по их общей границе. Оказывается, бифуркационная диаграмма сохраняется. Однако матрица монодромии теперь равна $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Прямая, проходящая через точку фокус-фокус, разграничивает изоэнергетические многообразия $S^1 \times S^2$ и линзовое пространство $L(n, 1)$. Таким образом, теорема С.С. Пустовойтова утверждает, два интересных слоения Лиувилля с молекулами вида $A \rightarrow A$, $r = \infty$, $\varepsilon = 1$ и $A \rightarrow A$, $r = \frac{1}{n}$, $\varepsilon = 1$ реализуются указанной билиардной книжкой (на уровне $H = \text{const}$).

Замечание 1. Рассмотрим круговые молекулы интегрируемых систем, не пересекающие дуги бифуркационных диаграмм. Например, окружающие точки фокус-фокус (например, в системе Лагранжа и в интегрируемой круговой билиардной книжке с потенциалом). Поскольку соответствующие им трёх-

мерные 3-многообразия расслоены на регулярные торы Лиувилля и не содержат особых слоёв, то эти молекулы не содержат никаких атомов. Следовательно, они не реализуются интегрируемыми билиардами, поскольку у билиардного интеграла всегда есть по крайней мере минимум и максимум.

Билиарды с магнитным полем. Движение точки в односвязном билиарде в магнитном поле — это известная задача. А.Е. Миронов и М. Бялый [9] доказали, что такой билиард с полиномиальным по скоростям интегралом интегрируем тогда и только тогда, когда он ограничен окружностью.

Геодезический билиард. Геодезический билиард задаётся движением точки по геодезическим в области на римановой поверхности. Отражение от границы области происходит по естественному закону. Граница области может быть пустой. Геодезический билиард на квадратах в $\mathbb{R}^3$, в областях высекаемых на квадрате другими квадратами из софокусного семейства, интегрируем [1]. Г. Белозёров полностью классифицировал все такие билиарды с точностью до лиувиллевой эквивалентности. То есть вычислил меченые молекулы Фоменко—Цишанга.

В дальнейшем планируется рассмотреть геодезические билиардные книжки с потенциалом и с магнитным полем.

Оказывается, в классе билиардных книжек обнаруживаются препятствия к реализуемости произвольных меченых молекул. Этот факт опирается на результаты В.В. Ведюшкиной [7, 10].

ОДНА ИЗ МОЛЕКУЛ МОДИФИЦИРОВАННОГО ВОЛЧКА ЛАГРАНЖА

Рассмотрим слоение Лиувилля на $S^1 \times S^2$, заданное молекулой $A \rightarrow A$, $r = \infty$, $\varepsilon = -1$. Такое слоение очень похоже на одно из слоений Лиувилля классического интегрируемого случая Лагранжа [3]. Ему отвечают три типа меченых молекул, задающих слоения Лиувилля на S^3 , $S^1 \times S^2$, $\mathbb{R}P^3$ (см. [3]).

Теорема 1. *Рассмотрим слоение Лиувилля на $S^1 \times S^2$, заданное молекулой $A \rightarrow A$, $r = \infty$, $\varepsilon = -1$. Тогда не существует билиардной книжки, ограниченной дугами софокусных квадратов, реализующей это слоение Лиувилля.*

Замечание 2. Не исключено, что расширяя класс билиардов (см. их список выше), нам удастся реализовать эту меченую молекулу.

Доказательство. Пусть существует такая билиардная книжка. Опишем основные бифуркации

торов Лиувилля. Каждая невыпуклая склейка соответствует некоторому атому. А именно, траектории, касательные к квадрике с невыпуклой склейкой, не образуют тора в изоэнергетической поверхности, но образуют особый слой некоторого седлового 3-атома.

Рассмотрим отдельно два случая, в первом случае билиарды ограничены дугами софокусных эллипсов и гиперболов, а во втором — софокусными окружностями. Также если билиард имеет пересечение с фокальной прямой, то траектории (или их продолжения), проходящие через фокусы, также образуют особый слой трёхмерного атома.

Рассмотрим первый случай. Отметим, что описанная выше молекула не содержит седловых атомов. Тогда билиардная книжка состоит из элементарных билиардов, внутренность которых не пересекает фокальную прямую. При этом все склейки являются выпуклыми. Рассмотрим билиард B_0 , ограниченный двумя софокусными эллипсами и двумя гиперболами [7]. При этом в таком билиарде всегда есть две невыпуклых дуги — дуга эллипса и дуга гиперболы. Отметим, что даже если билиард содержит точки фокальной прямой на границе, то склейки вдоль фокальной прямой будут приводить к образованию седловых атомов. Поэтому все остальные элементарные билиарды, внутренность которых не содержит точек фокальной прямой, можно считать частными случаями билиарда B_0 . Отметим, что к таким билиардам относятся билиард A'_0 , ограниченный двумя гиперболами, эллипсом и фокальной прямой (так как склейка вдоль фокальной прямой запрещена), треугольный билиард A'_1 , ограниченный дугой эллипса, дугой гиперболы и фокальной прямой (легко представить его как частный случай билиарда A'_0 , где дуга гиперболы попала на фокальную прямую) и билиард A'_2 , ограниченный эллипсом и фокальной прямой (частный случай билиарда A'_1 , в котором дуга гиперболы лежит на фокальной прямой). Наглядное описание перечисленных билиардов см. в [7].

Рассмотрим книжку, полученную из билиардов B_0 склейками вдоль выпуклых дуг границы. Можно показать, что в этом случае молекула билиарда имеет вид $A \rightarrow A$, где метка r конечна (и принимает любое значение путём выбора подходящих перестановок на дугах склейки). Нужная молекула при этом, очевидно, не реализуется.

Пусть теперь элементарные билиарды ограничены софокусными окружностями. Тогда к множеству таких билиардов принадлежат билиарды в круге и билиарды в кольце. Для билиарда в кольце получающаяся молекула имеет вид $A \rightarrow A$, $r = \infty$, $\varepsilon = 1$. Несмотря на совпадение метки r , она

реализует принципиально другое слоение Лиувилля, чем аналогичная молекула с отрицательной меткой. Дело в том, что если два полнотория (т.е. два атома A) склеены по метке $r = \infty$, то это означает, что при склейке меридиан склеивается с меридианом, а параллель с параллелью. Знак метки ε показывает, одинаковы ли при склейке ориентации осей полноторий (в этом случае метка $\varepsilon = -1$) или противоположны (в этом случае метка $\varepsilon = 1$). Таким образом, в этом случае знак метки ε — это топологический инвариант, различающий неэквивалентные слоения. Теорема доказана.

Тем самым гипотезу А.Т. Фоменко о реализации билиардами слоений Лиувилля интегрируемых систем интересно рассматривать последовательно, расширяя класс билиардов. Как мы показали, в классе билиардных книжек обнаружились топологические препятствия к реализации некоторых слоений Лиувилля. Однако в запасе остаются более широкие классы локально плоских билиардов с потенциалами и в магнитном поле, а также геодезические билиарды. Естественно ожидать, что, расширяя классы билиардов, мы будем расширять класс реализуемых слоений Лиувилля.

Источники финансирования. Работа выполнена при поддержке программы “Ведущие научные школы” (грант НШ-6399.2018.1, соглашение № 075-02-2018-867) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 19-01-00775-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В.В., Трещёв Д.В. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
2. Фоменко А.Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Изв. АН СССР. 1990. Т. 54. № 3. С. 546—575.
3. Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т. 1, 2. Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.
4. Фокичева В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые билиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твёрдого тела // ДАН. 2015. Т. 465. № 2. С. 150—153.
5. Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые топологические билиарды и эквивалентные динамические системы // Изв. РАН. Серия матем. 2017. Т. 81. № 4. С. 20—67.
6. Ведюшкина В.В., Харчева И.С. Билиардные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Матем. сб. 2018. Т. 209. № 12. С. 17—56.

7. Ведюшкина В.В. Топологическая классификация бильярдных областей в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик // Матем. сб. 2015. Т. 206. № 10. С. 127–176.
8. Кантонистова Е.О. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на поверхностях вращения в потенциальном поле // Матем. сб. 2016. Т. 207. № 3. С. 47–92.
9. Бялый М., Миронов А.Е. Полиномиальная неинтегрируемость магнитных бильярдных областей на сфере и гиперболической плоскости // УМН. 2019. Т. 74. № 2. С. 3–26.
10. Ведюшкина В.В. Инварианты Фоменко–Цишанга невыпуклых топологических бильярдных областей // Матем. сб. 2019. Т. 210. № 3. С. 17–74.

TOPOLOGICAL OBSTACLES TO THE REALIZABILITY OF INTEGRABLE HAMILTONIAN SYSTEMS BY BILLIARDS

V. V. Vedyushkina, Academician of the RAS A. T. Fomenko

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Received June 19, 2019

We introduce the following classes of integrable billiards: elementary billiards, topological, books, with potential, magnetic field, geodesic billiards. These classes are used to test the A.T. Fomenko conjecture about the realizability up to Liouville equivalence by billiards of integrable non-degenerate Hamiltonian systems with two degrees of freedom. In the class of book billiards found topological obstacles to realizability.

Keywords: Integrable system, billiard, Fomenko–Zieschang invariant.