ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 5, с. 476–480

МАТЕМАТИКА

УДК 517.968.72

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВОЛЬТЕРРОВЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

В. В. Власов*, Н. А. Раутиан**

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим 13.06.2019 г.

Поступило 16.06.2019 г.

Для абстрактных интегро-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве исследуется корректная разрешимость начальных задач и проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. На основании этого получено представление сильных решений указанных уравнений в виде рядов по экспонентам, отвечающим точкам спектра оператор-функций. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактную форму линейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории вязкоупругости и имеющих ряд других важных приложений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, оператор-функция, дробно-экспоненциальные ядра, вольтерров оператор.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524885476-480

В работе исследуются интегро-дифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Рассматриваемые уравнения представляют собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущённое слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. При этом ядра указанных вольтерровых операторов представляют собой сумму дробно-экспоненциальных функций Работнова. Указанные интегро-дифференциальные уравнения могут быть реализованы как интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости (см. [1, 2]), а также как интегро-дифференциальные уравнения Гуртина–Пипкина (см. [3–5]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью. Кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (см. [6, 7]).

В предлагаемом сообщении установлено существование сильных и обобщённых решений указанных интегро-дифференциальных уравнений, проведён спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами этих уравнений, и на этом основании получены представления и оценки решений рассматриваемых уравнений.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

*E-mail: vikmont@yandex.ru

**E-mail: nrautian@mail.ru

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Рассмотрим следующую задачу для интегро-дифференцильного уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0,\infty)$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^2u - \int_0^t K(t-s)A^2u(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1, \tag{2}$$

где A — самосопряжённый положительный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, имеющий компактный обратный.

Скалярная функция $K(t)$ имеет следующее представление:

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j R_j(t), \tag{3}$$

где $c_j > 0$, $j \in \mathbb{N}$, функции $R_j(t)$ — дробно-экспоненциальные функции Работнова (см. [1, гл. I]), которые имеют вид

$$R_j(t) = t^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_j)^n t^{n\alpha}}{\Gamma[(n+1)\alpha]}, \quad 0 < \alpha \le 1, \tag{4}$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. При этом предполагается, что последовательность $\{\beta_j\}$ удовлетворяет следующим условиям: $0 < \beta_j < \beta_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$, $\beta_j \to +\infty$, $j \to +\infty$. Кроме того, выполнены условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\beta_j} < 1, \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j < +\infty. \tag{6}$$

Преобразование Лапласа функции $R_j(t)$ имеет вид

$$\hat{R}_j(\lambda) = \frac{1}{\lambda^\alpha + \beta_j},$$

(см. [1, гл. I]). При этом под λ^α $(0 < \alpha \le 1)$ понимается главная ветвь многозначной функции $f(\lambda) = \lambda^\alpha$, $\lambda \in \mathbb{C}$, с разрезом по отрицательной действительной полуоси $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha \arg\lambda}$, $-\pi < \arg\lambda < \pi$.

Рассматривая преобразование Лапласа уравнения при однородных начальных условиях, получаем уравнение $L(\lambda)\hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$, где оператор-функция

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A^2 - \hat{K}(\lambda)A^2 \tag{7}$$

является символом этого уравнения, а $\hat{u}(\lambda)$ и $\hat{f}(\lambda)$ — преобразование Лапласа вектор-функций $u(t)$ и $f(t)$, соответственно, здесь $\hat{K}(\lambda)$ – преобразование Лапласа ядра $K(t)$, имеющее представление

$$\hat{K}(\lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_j}{\lambda^\alpha + \beta_j}, \quad 0 < \alpha \le 1. \tag{8}$$

В предлагаемой работе мы устанавливаем корректную разрешимость начальной задачи для уравнения в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси и исследуем вопрос о локализации спектра для оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом указанного уравнения.

В наших предшествующих работах [8–13] проводилось подробное исследование задачи (1), (2) в случае, когда ядро $K(t)$ было представимо рядом убывающих экспонент с положительными коэффициентами, что равносильно случаю $\alpha = 1$ в представлении (3). Наш подход к исследованию основывался на спектральном анализе оператор-функции (7), который также даёт возможность получить результат о корректной разрешимости и представление решения указанной задачи в виде ряда по экспонентам, соответствующим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Отметим также, что результаты работ [8–12] подытожены в главе 3 монографии [13].

2. КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

Через $W_{2,\gamma}^n\left(\mathbb{R}_+, A^n\right)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H, снабжённое нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A^n)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t} \left(\left\|u^{(n)}(t)\right\|_H^2 + \left\|A^n u(t)\right\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2},$$
$$\gamma \ge 0.$$

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^n\left(\mathbb{R}_+, A^n\right)$ см. монографию [14, глава 1]. Для $n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^0\left(\mathbb{R}_+, A^0\right) = L_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, H\right)$, где $L_{2,\gamma}\left(\mathbb{R}_+, H\right)$ обозначено пространство измеримых функций со значениями в пространстве H, снабжённое нормой

$$\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} = \left(\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t} \left\|f(t)\right\|_H^2 dt \right)^{1/2}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Будем называть вектор-функцию *u* сильным р е ш е н и е м з а д а ч и (1), (2), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$ для некоторого $\gamma \ge 0$, удовлетворяет уравнению (1) почти всюду на полуоси $\mathbb{R}_+$ и начальному условию (2).

О п р е д е л е н и е 2. Будем называть вектор-функцию *u* обобщённым решением задачи (1), (2), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$, удовлетворяет первому начальному условию (2) и для некоторого $\gamma \ge 0$ удовлетворяет тождеству

$$\left\langle A\left[u(t) - \int_0^t K(t-s)u(s)ds\right], Av(t) \right\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} -$$
$$- \left\langle u'(t), v'(t) \right\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + 2\gamma \left\langle u'(t), v(t) \right\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} =$$
$$= \left\langle f(t), v(t) \right\rangle_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \left(\varphi_1, v(0)\right)_H \tag{9}$$

при всех $v(t) \in W_{2,\gamma}^1(\mathbb{R}_+, A)$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{t \to +\infty} v(t)e^{-2\gamma t} = 0$.

Превратим область определения $\mathrm{Dom}(A^\beta)$ оператора A^β, $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β, введя на $\mathrm{Dom}(A^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A^β.

Следующая теорема даёт достаточные условия корректной разрешимости задачи (1), (2).

Т е о р е м а 1. *Предположим, что вектор-функция* $Af(t) \in L_{2,\gamma_0}\left(\mathbb{R}_+, H\right)$ *для некоторого* $\gamma_0 > 0$, *ядро* $K(t)$ *представимо в виде* (3), (4) *с постоянной* α $(0 < \alpha < 1)$, *а также выполняются условия* (5), (6), *кроме того,* $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 > \gamma_0$, *что для всех* $\gamma \ge \gamma_1$ *задача* (1), (2) *имеет единственное решение, принадлежащее пространству* $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A^2)} \le d\left(\|Af\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \left\|A^3\varphi_0\right\|_H + \left\|A^2\varphi_1\right\|_H \right) \tag{10}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

Теорема 2. *Предположим, что вектор-функция* $f(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 > 0$, *ядро* $K(t)$ *представимо в виде* (3), (4) *с постоянной* α $(0 < \alpha < 1)$, *а также выполняется условие* (5), *кроме того,* $\varphi_0 \in H_2$, $\varphi_1 \in H_1$. *Тогда существует такое* $\gamma_1 > \gamma_0$, *что для всех* $\gamma \geq \gamma_1$ *задача* (1), (2) *имеет единственное обобщённое решение в пространстве* $W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, A)$, *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u\|_{W^1_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,A^2)} \leq d\left(\|f\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+,H)} + \|A^2\varphi_0\|_H + \|A\varphi_1\|_H\right) \tag{11}$$

с постоянной d, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1.

3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Обозначим через a_j собственные значения оператора A $(Ae_j = a_j e_j)$, занумерованные в порядке возрастания: $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots, < a_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. Соответствующие собственные векторы $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис пространства H. Рассмотрим сужение оператор-функции $L(\lambda)$ на одномерное подпространство, натянутое на вектор e_n:

$$l_n(\lambda) = (L(\lambda)e_n, e_n) =$$
$$= \lambda^2 + a_n^2\left(1 - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k}{\lambda^\alpha + \beta_k}\right), \quad 0 < \alpha < 1.$$

Перейдём к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнены условия (5), (6).

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (5). *Тогда спектр оператор-функции* $L(\lambda)$ *лежит в открытой левой полуплоскости.*

Замечание 1. При выполнении условия $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{\beta_j} > 1$ в правой полуплоскости имеется бесконечное число вещественных собственных значений оператор-функции $L(\lambda)$. Таким образом, условие (5) является необходимым условием устойчивости задачи (1), (2).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (5) *и* $c_j = 0$ *для всех j, больших некоторого* $N \in \mathbb{N}$. *Тогда для каждого достаточно большого* $n \in \mathbb{N}$ *существует два невещественных комплексно-сопряжённых нуля* $\lambda_n^+ = \overline{\lambda_n^-}$ *функции* $l_n(\lambda)$, *имеющих следующую асимптотику:*

$$\lambda_n^{\pm} = -\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)a_n^{1-\alpha}\frac{Q}{2} \pm ia_n\left(1 - \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)a_n^{-\alpha}\frac{Q}{2}\right) + o(a_n^{1-\alpha}), \quad n \to +\infty, \tag{12}$$

где $Q = \sum_{j=1}^{N} c_j$.

Здесь уместно сделать важное

Замечание 2. При $\alpha = 1$ асимптотическая формула (12) переходит в ранее известную асимптотическую формулу (2.15) из работы [10] (см. также [13]).

Отметим, что оператор-функция вида (7) в случае, когда ядра интегральных операторов являются рядами убывающих экспонент с положительными коэффициентами, изучалась в [8–11]. Теоремы 1, 4 представляют собой естественное развитие результатов работы [8–11].

4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Сформулируем теоремы о представлении сильного решения задачи (1), (2).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 4, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $f(t) \equiv 0$. *Тогда сильное решение задачи* (1), (2) *представимо в виде*

$$u(t) = u_I(t) + u_R(t), \tag{13}$$

где вектор-функция $u_I(t)$ *представима в виде*

$$u_I(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(u_n^+(t) + u_n^-(t)\right)e_n,$$
$$u_n^+(t) = \frac{\left(\lambda_n^+\varphi_{0n} + \varphi_{1n}\right)e^{\lambda_n^+ t}}{2\lambda_n^+ - a_n^2\hat{K}^{(1)}\left(\lambda_n^+\right)}, \tag{14}$$
$$u_n^-(t) = \frac{\left(\lambda_n^-\varphi_{0n} + \varphi_{1n}\right)e^{\lambda_n^- t}}{2\lambda_n^- - a_n^2\hat{K}^{(1)}\left(\lambda_n^-\right)},$$

а вектор-функция $u_R(t)$ *представима в виде*

$$u_R(t) = \sum_{n=1}^{\infty}u_{Rn}(t)e_n, \tag{15}$$

$$u_{Rn}(t) = \int_0^{\infty}\frac{e^{-t\tau}\left(-\tau\varphi_{0n} + \varphi_{1n}\right)a_n^2\left(\hat{K}_-(-\tau) - \hat{K}_+(-\tau)\right)}{\left(\tau^2 + a_n^2(1 - \hat{K}_+(-\tau))\right)\left(\tau^2 + a_n^2(1 - \hat{K}_-(-\tau))\right)}d\tau,$$

$$\hat{K}_{\pm}(-\tau) = \sum_{k=1}^{N}\frac{c_k}{\tau^\alpha e^{\pm i\pi\alpha} + \beta_k}.$$

$\varphi_{kn} = (\varphi_k, e_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, 2$. *При этом ряды* (14), (15) *сходятся по норме пространства H.*

В нижеследующих теоремах 6 и 7 приведены оценки вектор-функций $v(t)$ и $w(t)$. Отметим, что компонента $v(t)$ соответствует невещественным собственным значениям $\lambda_n^{\pm}$ и отвечает за волновой характер поведения решений. Компонента $w(t)$ отвечает за поведение оператор-функции $L^{-1}(\lambda)$ на разрезе отрицательной полуоси и отражает внутренние свойства континиума. Таким образом, представление даёт дихотомию решения.

Обозначим через P_n ортопроектор на подпространство, являющееся линейной оболочкой векторов $\{e_j\}_{j=1}^n$, а через Q_n — ортопроектор на подпространство, ортогональное подпространству P_nH, т.е. $Q_n = I - P_n$ и пространство H представимо в виде ортогональной суммы

$$H = P_nH \oplus Q_nH.$$

Приведём результаты об оценке проекций вектор-функции $u(t)$ на подпространства Q_nH и P_nH.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5 *и начальные данные* $\varphi_0 \in H_3$, $\varphi_1 \in H_2$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое натуральное* n_0, *что для вектор-функции* $u(t)$, *определённой соотношением* (14), *выполнены следующие оценки:*

$$\left\|Q_{n_0}A^m u_I(t)\right\| \leqslant \theta_1 \left\|Q_{n_0}e^{-kA^{1-\alpha}t}A^{m+1}\varphi_0\right\| + \theta_2\left\|Q_{n_0}e^{-kA^{1-\alpha}t}A^m\varphi_1\right\|, \quad t>0, \tag{16}$$

$$0 < k = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\sum_{j=1}^{N}c_j - \varepsilon, \tag{17}$$

$$\left\|P_{n_0}A^m u_I(t)\right\| \leqslant \theta_3 e^{-\delta t}\left\{\left\|P_{n_0}A^{m+1}\varphi_0\right\| + \left\|P_{n_0}A^m\varphi_1\right\|\right\}, \quad t>0, \tag{18}$$

$$\delta = \operatorname{dist}\left(\left\{\lambda_j^{\pm}\right\}_{j=1}^{n_0}, \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}\right), \tag{19}$$

где $m = 0, 1, 2$, *положительные постоянные* θ_1, θ_2, θ_3 *не зависят от векторов* φ_0, φ_1.

Заметим, что δ представляет собой расстояние от подмножества невещественных собственных значений $\{\lambda_j^{\pm}\}_{j=1}^{n_0}$ до мнимой оси. Согласно теореме 3 спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежит в левой полуплоскости.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 6. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *вектор-функция* $w(t)$, *определяемая соотношением* (15), *допускает следующую оценку:*

$$\left\|A^m u_R(t)\right\|^2 \leqslant e^{-2\varepsilon t}\left\{k_1\left\|A^{m-\alpha}\varphi_0\right\|^2 + k_2\left\|A^{m-1-\alpha}\varphi_1\right\|^2\right\} + k_3\left\{\varepsilon^{2(2+\alpha)}\left\|A^{m-2}\varphi_0\right\|^2 + \varepsilon^{2(1+\alpha)}\left\|A^{m-2}\varphi_1\right\|^2\right\}, \ t>0, \tag{20}$$

где $m = 0, 1, 2$, *положительные постоянные* k_1, k_2, k_3 *не зависят от векторов* φ_0, φ_1.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия теорем* 1 *и* 4, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\varphi_0 = \varphi_1 \equiv 0$. *Тогда сильное решение задачи* (1), (2) *представимо в виде*

$$u(t) = u_I(t) + u_R(t), \quad t > 0, \tag{21}$$

где вектор-функция $u_I(t)$ *представима в виде*

$$u_I(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\omega_n(t,\lambda_n^+) + \omega_n(t,\lambda_n^-)\right)e_n, \qquad \omega_n(t,\lambda) = \frac{\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)}f_n(\tau)d\tau}{l_n^{(1)}(\lambda)}, \tag{22}$$

$f_n(\tau) = \left(f(\tau), e_n\right)$, *а вектор-функция* $u_R(t)$ *представима в виде*

$$u_R(t) = \sum_{n=1}^{\infty}u_{Rn}(t)e_n,$$

$$u_{Rn}(t) = \int_0^t\left(\int_0^{\infty}\frac{e^{-(t-\tau)\nu}a_n^2\left(\hat{K}_-(-\nu) - \hat{K}_+(-\nu)\right)}{\left(\nu^2 + a_n^2\left(1-\hat{K}_+(-\nu)\right)\right)\left(\nu^2 + a_n^2(1-\hat{K}_-(-\nu))\right)}d\nu\right)\times f_n(\tau)d\tau, \tag{23}$$

при этом ряд (22) *сходится по норме пространства* H *и* $\lambda_n^{\pm}$ — *невещественные собственные значения оператор-функции* $L(\lambda)$.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия теоремы* 8 *и* $Af(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ *для некоторого* $\gamma_0 > 0$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое натуральное число* n_0, *что для решения задачи* (1), (2) *справедлива следующая оценка*:

$$\left\|A^m u(t)\right\|^2 \le d_1 t\int_0^t\left\|Q_{n_0}e^{-kA^{1-\alpha}(t-\tau)}A^{m-1}f(\tau)\right\|^2 d\tau + d_2 t\int_0^t e^{-2\delta(t-\tau)}\left\|P_{n_0}A^{m-1}f(\tau)\right\|^2 d\tau + t\left\{k_1\int_0^t e^{-2\varepsilon(t-\tau)}\left\|A^{m-(1+\alpha)}f(\tau)\right\|^2 d\tau + k_2\varepsilon^{2(\alpha+1)}\int_0^t\left\|A^{m-2}f(\tau)\right\|^2 d\tau\right\}, \quad t>0, \tag{24}$$

где $m = 0, 1, 2$, *положительные постоянные* d_1, d_2, k_1, k_2 *не зависят от вектор-функции* $f(t)$, *константы* k *и* δ *определяются формулами* (17) *и* (19) *соответственно.*

Источники финансирования. Теоремы 1–3 доказаны при поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-6222.2018.1). Теоремы 4–9 доказаны при поддержке Российского научного фонда (проект 17–11–01215).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
2. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.
3. *Gurtin M.E., Pipkin A.C.* // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 31. P. 113–126.
4. *Eremenko A., Ivanov S.* // SIAM J. Math. Anal. 2011. V. 43. № 5. P. 2296–2306.
5. *Лыков А.В.* Проблема тепло- и массообмена. Минск: Наука и техника, 1976.
6. *Власов В.В., Гавриков А.А., Иванов С.А., Князьков Д.Ю., Самарин В.А., Шамаев А.С.* // Современные проблемы математики и механики. 2009. Т. 5. № 1. С. 134–155.
7. *Жиков В. В.* // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 7. С. 31–72.
8. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. 2011. Т. 28. С. 75–114.
9. *Власов В.В., Раутиан Н.А., Шамаев А.С.* // ДАН. 2010. Т. 434. № 1. С. 12–15.
10. *Власов В.В., Медведев Д.А., Раутиан Н.А.* // Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. Современные проблемы математики и механики. Т. VIII / Под ред. В.А. Садовничего. М.: Изд-во МГУ им. М.В. Ломоносова, 2011. 308 с.
11. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* // Современная математика. Фундаментальные направления. 2015. Т. 58. С. 22–42.
12. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* // Тр. ММО. 2014. Т. 75. № 2. С. 131–155.
13. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. М.: МАКС Пресс, 2016. 488 с. ISBN 978-5-317-05443-4
14. *Лионс Ж.П., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.

CORRECT SOLVABILITY AND REPRESENTATION OF THE SOLUTIONS OF VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH EXPONENTIAL-FRACTIONAL KERNELS

V. V. Vlasov, N. A. Rautian

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichiy June 13, 2019

Received June 16, 2019

For abstract integro-differential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space, we study the well-posed solvability of initial problems and carry out spectral analysis of the operator functions that are symbols of these equations. This allows us to represent the strong solutions of these equations as series in exponentials corresponding to points of the spectrum of operator functions. The equations under study are the abstract form of linear integro-partial differential equations arising in viscoelasticity and several other important applications.

Keywords: integro-differential equations, operator-function, fractional exponential kernels, Volterra operator.