

УДК 519.863

## ПОСТРОЕНИЕ ТРЁХМЕРНЫХ СЕЧЕНИЙ ЭФФЕКТИВНОГО ФРОНТА ДЛЯ НЕВЫПУКЛЫХ МОДЕЛЕЙ

В. Е. Кривоножко<sup>1,2,\*</sup>, А. В. Лычев<sup>1,\*\*</sup>, Н. С. Блохина<sup>3,\*\*\*</sup>

Представлено академиком РАН В.А. Геловани 26.06.2019 г.

Поступило 26.06.2019 г.

Невыпуклая модель FDH (Free Disposal Hull) появилась в научной литературе в конце прошлого века для анализа деятельности сложных многомерных объектов. Модель FDH появилась почти одновременно с моделью DEA (Data Envelopment Analysis). Однако в отличие от модели DEA множество производственных возможностей модели FDH является невыпуклым, что существенно сдерживало развитие и применение модели FDH. Необходимость методов трёхмерной визуализации для анализа деятельности сложных нелинейных моделей была давно отмечена в мировой научной литературе. В данной работе предлагается метод для построения трёхмерных сечений в моделях FDH. Метод был опробован на реальных моделях из различных областей и показал высокую эффективность и надёжность.

**Ключевые слова:** эффективный фронт, невыпуклая модель, визуализация, множество производственных возможностей.

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0869-56524885481-485>

## ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Важным направлением исследования в методологии анализа среды функционирования (АСФ) (на английском языке этот термин звучит как Data Envelopment Analysis — DEA) являются модели, в которых множество производственных возможностей является невыпуклым. Одной из основных таких моделей является модель FDH (Free Disposal Hull) [1]. Она появилась в научной литературе почти одновременно с моделью BCC [2], которая наряду с классической моделью CCR [3] в настоящее время наиболее часто используется для анализа деятельности и управления сложными объектами.

В модели FDH для анализа деятельности объектов используются два различных подхода. Первый основан на использовании оптимизационных методов, второй использует специальные алгоритмы целенаправленного перебора [4]. Оптимизационные методы опираются на хорошо известные и проработанные алгоритмы и программы оптимизации, в то время как метод целенаправленного перебора

требует разработки и программной реализации алгоритмов под каждый новый вид задач.

В настоящее время не вызывает сомнения вычислительная эффективность алгоритмов, использующих целенаправленный перебор в сравнении с оптимизационными методами. Более того, для многих видов задач такие алгоритмы уже разработаны, например, для вычисления меры эффективности [4], эффекта масштаба [5], расстояния до эффективного фронта по заданному направлению [6].

В статье [7] отмечается потребность построения сечений многомерного фронта в невыпуклых моделях для вычисления различных предельных характеристик. В статье [8] разработаны методы визуализации эффективного фронта с использованием методов целенаправленного перебора, а в работе [9] предложены алгоритмы для вычисления эффекта масштаба с использованием двумерных сечений. В них используется визуализация на основе построения двумерных сечений. В данной работе предложены алгоритмы для построения трёхмерных сечений невыпуклого многомерного фронта с использованием методов целенаправленного перебора. Эти сечения являются обобщением хорошо известных в экономике изоквант на трёхмерный случай. Данный подход позволяет вычислять замещения между тремя продуктами или ресурсами в моделях FDH при одновременном изменении сразу трёх показателей, что усиливает информационную основу для принятия решений в управлении сложными объектами.

Рассмотрим множество, состоящее из  $n$  наблюдаемых производственных объектов  $(X_j, Y_j)$ ,

<sup>1</sup>Национальный исследовательский технологический университет “МИСиС”, Москва

<sup>2</sup>Федеральный исследовательский центр “Информатика и управление” Российской Академии наук, Москва

<sup>3</sup>Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет

\*E-mail: [krivonozhkove@mail.ru](mailto:krivonozhkove@mail.ru)

\*\*E-mail: [lychev@misis.ru](mailto:lychev@misis.ru)

\*\*\*E-mail: [nsb\\_sapr@mail.ru](mailto:nsb_sapr@mail.ru)

$j = 1, 2, \dots, n$ , где вектор выходных показателей  $Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{rj}) > 0, j = 1, 2, \dots, n$ , производится из вектора входных показателей  $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) > 0, j = 1, 2, \dots, n$ . Множество производственных возможностей традиционной FDH-модели записывается следующим образом [10]:

$$T^{\text{FDH}} = \left\{ (X, Y) \left| \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j \leq X, \sum_{j=1}^n Y_j \lambda_j \geq Y, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2, \dots, n \right. \right\}. \quad (1)$$

Здесь  $\lambda_j, j = 1, 2, \dots, n$ , — целочисленные переменные, принимающие значения 0 или 1.

Согласно [11], множество производственных возможностей  $T^{\text{FDH}}$  модели FDH может быть представлено как объединение множеств производственных возможностей  $S^{\text{FDH}}(X_j, Y_j)$ , построенных для каждого объекта  $(X_j, Y_j), j = 1, 2, \dots, n$ , в отдельности:

$$T^{\text{FDH}} = \bigcup_{j=1}^n S^{\text{FDH}}(X_j, Y_j), \quad (2)$$

где  $S^{\text{FDH}}(X_j, Y_j) = \{(X, Y) \mid X \geq X_j, Y \leq Y_j\}$ .

В статье [8] разработаны методы двумерной визуализации эффективного фронта для невыпуклых моделей FDH. В данной работе предлагаются алгоритмы трёхмерной визуализации на основе построения сечений многомерного фронта FDH аффинными подпространствами. Такие трёхмерные сечения являются обобщением известных функций в математической экономике на трёхмерный случай [12].

Дадим определение трёхмерного сечения множества производственных возможностей. Для этого сначала определим трёхмерное аффинное подпространство евклидова пространства  $E^{m+r}$  в виде

$$\text{Aff}(X_o, Y_o, e_p, e_s, e_t) = \{(X, Y) \mid (X, Y) = (X_o, Y_o) + \alpha e_p + \beta e_s + \gamma e_t\}, \quad (3)$$

где  $(X_o, Y_o) \in T^{\text{FDH}}$ ,  $e_p, e_s, e_t \in E^{m+r}$  — единичные векторы с единицей в различных позициях  $p, s$  и  $t$  соответственно,  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  — действительные числа. С использованием (3) трёхмерное сечение множества производственных возможностей запишется в виде

$$\text{Sec}(X_o, Y_o, e_p, e_s, e_t) = T^{\text{FDH}} \cap \text{Aff}(X_o, Y_o, e_p, e_s, e_t). \quad (4)$$

Множество  $\text{Sec}(X_o, Y_o, e_p, e_s, e_t)$  является многогранным множеством и имеет ступенчатую структуру, как и исходное множество производственных возможностей  $T^{\text{FDH}}$ .

С точки зрения визуализации интерес представляет граница сечения (4), так как в конечном счёте именно она используется для визуализации сечения. Поэтому далее при описании алгоритма мы будем использовать термин “построение сечения”, имея в виду построение границы сечения.

Можно доказать [13], что множество слабо эффективных точек по Парето  $\text{WEff}_p T^{\text{FDH}}$  совпадает с множеством граничных точек множества  $T^{\text{FDH}}$ . Тогда граница сечения (4) запишется в виде

$$\begin{aligned} \text{Bound}(\text{Sec}(X_o, Y_o, e_p, e_s, e_t)) &= \\ &= \text{WEff}_p T^{\text{FDH}} \cap \text{Aff}(X_o, Y_o, e_p, e_s, e_t). \end{aligned} \quad (5)$$

Выбирая различные направления  $e_p, e_s$  и  $e_t$ , можно построить различные сечения, проходящие через точку  $(X_o, Y_o)$ . Трёхмерные сечения вида (4) являются обобщением хорошо известных в экономике изоквант на трёхмерный случай [14].

## ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теперь перейдём к описанию алгоритма построения трёхмерных сечений (4) в модели FDH для объекта  $(X_k, Y_k) \in T^{\text{FDH}}$  на основе методов целенаправленного перебора. Для определённости, не ограничивая при этом общности изложения, предположим, что  $e_p$  и  $e_s$  связаны с входными показателями, а вектор  $e_t$  соответствует некоторому выходному показателю. Используя представление (2), запишем сечение (4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \text{Sec}(X_k, Y_k, e_p, e_s, e_t) &= T^{\text{FDH}} \cap \text{Aff}(X_k, Y_k, e_p, e_s, e_t) = \\ &= \left( \bigcup_{j=1}^n S^{\text{FDH}}(X_j, Y_j) \right) \cap \text{Aff}(X_k, Y_k, e_p, e_s, e_t) = \\ &= \bigcup_{j=1}^n (S^{\text{FDH}}(X_j, Y_j) \cap \text{Aff}(X_k, Y_k, e_p, e_s, e_t)). \end{aligned}$$

Такая запись позволяет сначала найти пересечение множеств  $S^{\text{FDH}}(X_j, Y_j)$  с аффинным подпространством (3), в котором строится сечение, а после построить искомое сечение в виде объединения таких множеств.

На первом шаге алгоритма определяются такие множества  $S^{\text{FDH}}(X_j, Y_j)$ , которые имеют непустое пересечение с аффинным подпространством  $\text{Aff}(X_k, Y_k, e_p, e_s, e_t)$ . Соответствующее индексное множество запишется в следующем виде:

$$D(k) = \left\{ j \left| \begin{array}{l} x_{ij} \leq x_{ik}, i = 1, 2, \dots, m, i \neq p, i \neq s, \\ y_{ij} \geq y_{ik}, i = 1, 2, \dots, r, i \neq t, \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array} \right. \right\}. \quad (6)$$

На втором шаге алгоритма для каждого объекта  $(X_j, Y_j)$ ,  $j \in D(k)$ , строится пересечение соответствующего ему множества  $S^{\text{FDH}}(X_j, Y_j)$  с аффинным подпространством:

$$S_3^{\text{FDH}}(X_j, Y_j) = S^{\text{FDH}}(X_j, Y_j) \cap \text{Aff}(X_k, Y_k, e_p, e_s, e_t) = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_1 \geq x_{pj}, z_2 \geq x_{sj}, z_3 \leq y_{ij}\}. \quad (7)$$

Множество  $S_3^{\text{FDH}}(X_j, Y_j)$  представляет собой конус с тремя направляющими векторами  $e_p, e_s, -e_t$  и вершиной в точке  $(x_{pj}, x_{sj}, y_{ij}) \in E^3$ . Далее из всех множеств  $S_3^{\text{FDH}}(X_j, Y_j)$ ,  $j \in D(k)$ , оставляем только те, которые не содержатся полностью в другом множестве из этого списка. Другими словами, среди вершин  $V_j = (x_{pj}, x_{sj}, y_{ij}) \in E^3$  множеств  $S_3^{\text{FDH}}(X_j, Y_j)$  оставим только эффективные по Парето точки. Множество индексов таких точек обозначим через  $D^P(k) \subseteq D(k)$ .

Точки  $V_j, j \in D^P(k)$  являются вершинами сечения  $\text{Sec}(X_k, Y_k, e_p, e_s, e_t)$ , которые мы будем записывать с помощью множества  $V = \{V_j \mid j \in D^P(k)\}$ . Этот факт вытекает из следующих двух утверждений, которые являются следствием структуры множества  $T^{\text{FDH}}$ .

**Утверждение 1.** Все эффективные объекты модели FDH являются вершинами  $T^{\text{FDH}}$ .

**Утверждение 2.** Вершина трёхмерного сечения (4) может быть образована только эффективным объектом модели FDH.

Поскольку вершины определены, то сечение может быть записано в виде

$$\text{Sec}(X_k, Y_k, e_p, e_s, e_t) = \bigcup_{j \in D^P(k)} S^{\text{FDH}}(V_j), \quad (8)$$

где с помощью  $S^{\text{FDH}}(V_j)$  обозначено множество  $S_3^{\text{FDH}}(X_j, Y_j)$ . Тогда нахождение искомого сечения сведётся к определению граней сечения, представляющего собой объединение множеств  $S^{\text{FDH}}(V_j)$ . Процедура нахождения граней сечения основывается на следующем утверждении.

**Утверждение 3.** Трёхмерное сечение модели FDH имеет не более  $3N$  граней, где  $N$  — число вершин сечения.

Согласно (8) сечение (4) является объединением множеств  $S^{\text{FDH}}(V_j)$ , которые имеют одну вершину  $V_j$  и три грани, параллельные координатным плоскостям. Поэтому число различных граней не будет превышать  $3N$ , и все они определяются различными гранями множеств  $S^{\text{FDH}}(V_j)$ .

На третьем шаге алгоритма для каждой грани  $f \in S^{\text{FDH}}(V_j)$ ,  $j \in D^P(k)$ , определяем пересечение

с другими множествами  $S^{\text{FDH}}(V_i)$ ,  $i \neq j$ ,  $i \in D^P(k)$ , и общие части (за исключением границы области пересечения) исключаем из грани  $f$ , поскольку они являются внутренними точками сечения (4) и, следовательно, не принадлежат искомой границе.

Следующим шагом для каждой пары параллельных и при этом лежащих в одной плоскости граней, найденных на предыдущем шаге, проверяется, имеют ли они общие точки. Если имеют, то такие грани объединяются в одну. В результате будет определено множество  $F$  граней сечения.

Таким образом, будут найдены множество вершин  $V$  и множество граней  $F$  сечения, т.е. построена граница искомого сечения и, тем самым, определено и само сечение (4). Описанная схема может быть изложена в виде следующего алгоритма.

#### Алгоритм 1

[ВХОД]:  $(X_j, Y_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , — множество наблюдаемых производственных объектов,

$e_p, e_s, e_t \in E^{m+r}$  — направляющие векторы сечения,

$(X_k, Y_k)$  — производственный объект, для которого строится сечение.

[ВЫХОД]:  $V$  — множество вершин сечения,

$F$  — множество граней сечения.

**Шаг 1.** Определяем множество  $D(k)$  по формуле (6).

**Шаг 2.** Среди всех точек  $V_j = (x_{pj}, x_{sj}, y_{ij}) \in E^3$ ,  $j \in D(k)$ , оставляем только эффективные по Парето точки, которые задают множество  $D^P(k)$ . Определяем множество вершин сечения  $V = \{V_j \mid j \in D^P(k)\}$ .

**Шаг 3.** Для каждой грани  $f \in S^{\text{FDH}}(V_j)$ ,  $j \in D^P(k)$  определяем пересечение с другими множествами  $S^{\text{FDH}}(V_i)$ ,  $i \neq j$ , и общие части (за исключением границы области пересечения) исключаем из грани  $f$ .

**Шаг 4.** Объединяем грани, найденные на предыдущем шаге, если они лежат в одной плоскости и имеют общие точки. В результате будет определено множество  $F$  граней сечения.

**Шаг 5.** Стоп.

**Теорема 1.** Алгоритм 1 строит сечение вида (4) за конечное число шагов.

Предложенный алгоритм был протестирован на реальных данных. В данной работе рассмотрен пример работы алгоритма для модели по рыболовным траулерам дальневосточного региона. В модели использовались три затратных показателя: водоизмещение судна (тонн), численность команды (чел.) и вычисленный показатель, равный мощности двигателя, умноженной на пройденный путь

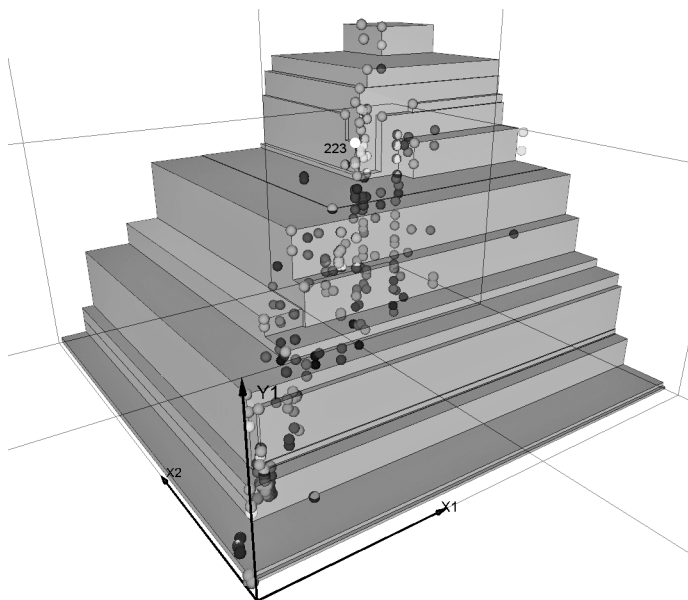


Рис. 1. Трёхмерная изокванта для объекта 223 в невыпуклой модели FDN.

(ГВт-милль). Выходной показатель отражает улов рыбы (тонн). Набор данных содержит 233 объекта, статистические данные были собраны за 2003–2005 гг. В данной модели некоторые входные показатели имеют дискретный характер: водоизмещение, количество членов экипажа, мощность двигателя. По этой причине модели FDN больше подходят для таких задач.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вычислительные эксперименты показали, что разработанные алгоритмы построения трёхмерных сечений в невыпуклых моделях FDN работают корректно и строят сечения за приемлемое время. Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере с процессором Intel Core i7, тактовая частота 3,47 ГГц.

На рис. 1 изображено сечение четырёхмерного множества производственных возможностей модели FDN, построенное для объекта 223 по следующим показателям:  $x_1$  — водоизмещение судна,  $x_2$  — численность команды,  $y_1$  — улов рыбы. Белым цветом на рисунке отмечен объект, через который построено сечение, остальные точки являются проекциями наблюдаемых объектов на аффинное подпространство сечения. Все трёхмерные сечения (699 шт.), задаваемые двумя входными показателями и одним выходным показателем, были построены за 2,84 с. Таким образом, время расчёта одной изокванты в среднем составляет 4,06 мс.

Визуализация деятельности многомерных объектов позволяет исследовать поведение объектов, определять области с высокой и низкой эффективностью объектов, выявлять новые зависимости в поведении объектов. Вычислительные эксперименты, проведённые на реальных данных, показывают, что предложенные методы визуализации трёхмерных сечений на основе алгоритмов целенаправленного перебора работают эффективно и надёжно.

**Источник финансирования.** Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 17–11–01353).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Deprins D., Simar L., Tulkens H.* Measuring labor efficiency in post offices. In: M. Marchand, P. Pestieau, H. Tulkens (Eds.). *The performance of public enterprises: Concepts and measurements*. North Holland, Amsterdam, 1984. P. 243–268.
2. *Banker R.D., Charnes A., Cooper W.W.* // *Management Sci.* 1984. V. 30. № 9. P. 1078–1092.
3. *Charnes A., Cooper W.W., Rhodes E.* // *Europ. J. Operat. Res.* 1978. V. 2. № 6. P. 429–444.
4. *Tulkens H.* // *J. Product. Anal.* 1993. V. 4. № 1–2. P. 183–210.
5. *Soleimani-Damaneh M., Jahanshahloo G.R., Reshadi M.* // *Europ. J. Operat. Res.* 2006. V. 174. № 2. P. 1055–1059.
6. *Kerstens K., Van de Woestyne I.* // *Annals of Operations Research*. 2018. V. 271. № 2. P. 1067–1078.
7. *Cesaroni G., Kerstens K., Van de Woestyne I.* // *Europ. J. Operat. Res.* 2017. V. 259. № 2. P. 576–586.
8. *Кривоножко В.Е., Лычев А.В.* // *ДАН.* 2017. Т. 477. № 1. С. 22–25.



9. Кривоножко В.Е., Лычев А.В. // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 3. С. 534–546.
10. Kerstens K., Vanden Eeckaut P. // Europ. J. Operat. Res. 1999. V. 113. № 1. P. 206–214.
11. Briec W., Kerstens K., Vanden Eeckaut P. // Journal of Economics. 2004. V. 81. № 2. P. 155–192.
12. Krivonozhko V.E., Utkin O.B., Volodin A. V., et al. // J. Operat. Res. Soc. 2004. V. 55. № 10. P. 1049–1058.
13. Krivonozhko V.E., Utkin O.B., Volodin A. V., et al. // J. Operat. Res. Soc. 2005. V. 56. № 12. P. 1373–1378.
14. Володин А.В., Кривоножко В.Е., Рыжих Д.А., Уткин О.Б. // ЖВМиМФ. 2004. Т. 44. № 4. С. 623–639.

## CONSTRUCTION OF THREE-DIMENSIONAL SECTIONS OF THE EFFICIENT FRONTIER FOR NON-CONVEX MODELS

V. E. Krivonozhko<sup>1,2</sup>, A. V. Lychev<sup>1</sup>, N. S. Blokhina<sup>3</sup>

<sup>1</sup> National University of Science and Technology “MISiS”, Moscow, Russian Federation

<sup>2</sup> Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

<sup>3</sup> Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.A. Gelovani June 26, 2019

Received June 26, 2019

Non-convex Free Disposal Hull (FDH) model was proposed in the scientific literature in the end of 20-th century for performance measurement of complex multidimensional production units. FDH model was proposed almost simultaneously with DEA (Data Envelopment Analysis) model. However, as distinct from the DEA models, production possibility set of FDH models are non-convex ones, what significantly refrained the development of these models. As far as we know, the necessity for such approach has been noted in the world scientific literature for a long time. In this paper, an approach is proposed for three-dimensional visualization of FDH models. An approach was tested using real-life data sets from different areas. Computational experiments confirm reliability and effectiveness of the proposed approach.

**Keywords:** efficient frontier, Free Disposal Hull (FDH), visualization, production possibility set.