ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 488, № 5, с. 486–487

МАТЕМАТИКА

О ЧИСЛАХ НЕЗАВИСИМОСТИ ДИСТАНЦИОННЫХ ГРАФОВ С ВЕРШИНАМИ В $\{-1, 0, 1\}^n$

А. М. Райгородский[1,2,3,4,*], Е. Д. Шишунов[2,]**

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 02.07.2019 г.

Поступило 11.07.2019 г.

В работе получены новые оценки чисел независимости графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$.

Ключевые слова: число независимости, дистанционный граф, расстояние Хэмминга.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524885486-487

Настоящая работа посвящена исследованию графов $G_{\pm}(n,r,s)$, вершинами которых являются все возможные n-мерные векторы с r координатами величины ± 1 и $n-r$ координатами, равными нулю; при этом рёбрами служат все пары вершин со скалярным произведением s. Таким образом, s находится в пределах от $-r$ до r. Изучение графов $G_{\pm}(n,r,s)$ очень важно для комбинаторной геометрии, теории Рамсея, теории графов и гиперграфов и теории кодирования (см. [1–12]). В этой работе нас интересует случай, когда $n \to \infty$, а r и s – константы.

Напомним, что число независимости графа G – это максимальное число вершин, попарно не соединённых рёбрами. Обозначается это число $\alpha(G)$. Мы рассмотрим ниже величины $\alpha(G_{\pm}(n,r,s))$.

Ранее был практически полностью разобран случай, когда $s = 1$. А именно, в работах [13, 14] доказана

Теорема 1. *Положим* $c(0)=0$, $c(1)=1$, $c(2)=c(3)=2$. *Обозначим* $\{x\}$ *дробную часть числа* x. *Тогда*

$$\alpha\left(G_{\pm}(n,3,1)\right) = max\{6n-28, 4n-4c(4\{n/4\})\}.$$

А в работе [15] установлена

Теорема 2. *Пусть* $r \geq 5$. *Положим*

$$\left[\frac{n-3}{3}\right]^3 = \begin{cases} \left(\frac{n-3}{3}\right)^3, & n \equiv 0 \pmod 3; \\ \left(\frac{n-4}{3}\right)^2\left(\frac{n-1}{3}\right), & n \equiv 1 \pmod 3; \\ \left(\frac{n-2}{3}\right)^2\left(\frac{n-5}{3}\right), & n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

При $n \to \infty$ *выполнены неравенства*

$$2C_{n-2}^{r-2} \leq \alpha\left(G_{\pm}(n,r,1)\right) \leq 2C_{n-2}^{r-2} + O(n^{r-3}), \text{ при } r > 5;$$

$$2C_{n-3}^{3} + \left[\frac{n-3}{3}\right]^3 \leq \alpha\left(G_{\pm}(n,r,1)\right) \leq 2C_{n-3}^{3} + \left[\frac{n-3}{3}\right]^3 + O(n^2), \text{ при } r = 5.$$

Таким образом, при $s = 1$ только случай $r = 4$ совсем не изучен, а также при $r \geq 5$ найдены не точные значения, но асимптотики (хотя, по-видимому, нижние оценки в теореме 2 неулучшаемы).

В настоящей работе мы находим порядок роста величины $\alpha(G_{\pm}(n,r,s))$ при всех $s \leq 0$.

Теорема 3. *Имеют место неравенства*

$$2C_{n-1}^{r-1} \leq \alpha\left(G_{\pm}(n,r,0)\right) \leq \left(2+o(1)\right)C_{n-1}^{r-1}, \tag{1}$$

$$C_n^r \leq \alpha\left(G_{\pm}(n,r,-1)\right) \leq \left(1+o(1)\right)C_n^r. \tag{2}$$

При $s \leq -2$ *имеем*

$$\alpha\left(G_{\pm}(n,r,s)\right) = \Theta(n^r).$$

Случай $s \leq -2$ в теореме 3 тривиален. В самом деле, общее число вершин графа $G_{\pm}(n,r,s)$ равно $2^r C_n^r = \Theta(n^r)$. С другой стороны, беря вершины, не содержащие координат -1, сразу получаем оценку снизу величиной $C_n^r = \Theta(n^r)$.

В неравенстве (2) нижняя оценка также получается рассмотрением векторов без минус единиц. А в неравенстве (1) нижняя оценка задаётся конструкцией, в которую входят все векторы без минус единиц с первой координатой 1 и все векторы без единиц с первой координатой –1. Верхние оценки в (1) и (2) нетривиальны. При условии, что $r-s$ является степенью простого числа, их можно получить с помощью линейно-алгебраического метода в комбинаторике. А именно, справедлива

Теорема 4. *Пусть* $s \in \{-1, 0\}$ *и* $r-s$ *является степенью простого числа. Тогда*

[1] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.*
[2] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
[3] *Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета, Майкоп*
[4] *Институт математики и информатики Бурятского государственного университета, Улан-Удэ*
* *E-mail: mraigor@yandex.ru*

$$\alpha\left(G_{\pm}(n, r, s)\right) \leq \sum_{(i, j) \in \mathcal{A}} C_n^i C_{n-i}^j,$$

где

$$\mathcal{A} = \left\{(i, j) \colon i + j \leq n,\ i + 2j \leq r - s - 1\right\}.$$

Видно, что, поскольку у нас r – константа, вся сумма в теореме 4 асимптотически доминируется слагаемым с $i = r - s - 1$, $j = 0$. Отсюда и верхние оценки в (1) и (2).

Конечно, в случае $s \leq -2$ нужно оторваться от тривиальности и найти асимптотики или даже точные значения чисел независимости. Также интересны точные значения в неравенствах (1) и (2). По-видимому, они равны нижним границам в этих неравенствах. Наконец, совсем не исследован случай $s \geq 2$. Мы высказываем гипотезу, что в этом случае

$$\alpha(G_{\pm}(n, r, s)) = \Theta(\max\{n^{r-s-1}, n^s\}).$$

Источники финансирования. Настоящая работа выполнена за счёт гранта РФФИ (проект № 18–01–00355) и гранта Президента РФ НШ-6760.2018.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров Д.А., Райгородский А.М.* Клико-хроматические числа графов пересечений // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 1. С. 142–144.
2. *Боголюбский Л.И., Райгородский А.М.* Замечание о нижних оценках хроматических чисел пространств малой размерности с метриками l_1 и l_2 // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 2. С. 187–213.
3. *Frankl P., Kupavskii A.* Partition-Free Families of Sets // Proc. of the London Mathematical Society. 2019. DOI: 10.1112/plms.12236
4. *Пушняков Ф.А.* О количествах ребер в порожденных подграфах некоторых дистанционных графов // Матем. заметки. 2019. Т. 105. № 4. С 592–602.
5. *Shabanov L.E.* Turán-Type Results for Distance Graphs in an Infinitesimal Plane Layer // J. Mathematical Sciences (United States). 2019. V. 236. № 5. P. 554–578.
6. *Sagdeev A.A., Raigorodskii A.M.* On a Frankl–Wilson Theorem and Its Geometric Corollaries // Acta Math. Univ. Comenianae. 2019.
7. *Balogh J., Cherkashin D., Kiselev S.* Coloring General Kneser Graphs and Hypergraphs Via High-Discrepancy Hypergraphs // Europ. J. Combinatorics. 2019. V. 79. P. 228–236.
8. *Kupavskii A., Mustafa N.H., Swanepoel K.J.* Bounding the Size of an Almost-Equidistant Set in Euclidean Space // Combinatorics Probability and Computing. V. 28. Iss. 2. March 2019. P. 280–286.
9. *Kostina O.A.* On Lower Bounds for the Chromatic Number of Spheres // Math. Notes. 2019. V. 105. № 1. P. 16–27.
10. *Frankl P., Kupavskii A.* Families of Sets with no Matching of Sizes 3 and 4 // Europ. J. of Combinatorics. 2019. V. 75. P. 123–135.
11. *Shabanov D.A., Krokhmal N.E., Kravtsov D.A.* Panchromatic 3-Colorings of Random Hypergraphs // Europ. J. of Combinatorics. 2019. V. 78. P. 28–43.
12. *Cherkashin D., Petrov F.* On Small n-Uniform Hypergraphs with Positive Discrepancy // J. of Combinatorial Theory. Ser. B. 10.1016/j.jctb.2019.04.001.
13. *Cherkashin D., Kulikov A., Raigorodskii A.* On the Chromatic Numbers of Small-Dimensional Euclidean Spaces // Discrete and Applied Math. 2018. V. 243. P. 125–131.
14. *Черкашин Д.Д., Райгородский А.М.* О хроматических числах пространств малой размерности // ДАН. 2017. Т. 472. № 1. С. 11–12.
15. *Шишунов Е.Д., Райгородский А.М.* О числах независимости некоторых дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$ // ДАН. 2019. Т. 485. № 3.

ON THE INDEPENDENCE NUMBER OF DISTANCE GRAPHS WITH VERTICES IN $\{-1, 0, 1\}^n$

A. M. Raigorodskii[1,2,3,4], E. D. Shishunov[2]

[1] *Moscow Institute of Physics and Technology, Dolgoprudny, Moscow region, Russian Federation*
[2] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[3] *Adygya State University, Maykop, Russian Federation*
[4] *Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov July 2, 2019

Received July 17, 2019

In this work we find new bounds for the independence numbers of distance graphs with vertices in $\{-1, 0, 1\}^n$.

Keywords: the independence number, distance graph, Hamming distance.