УДК 517.518.47+517.518.5

ОБОБЩЁННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДЛЯ ШАРОВЫХ ЧАСТИЧНЫХ СУММ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Р. Р. Ашуров

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 18.01.2019 г.

Поступило 04.03.2019 г.

Доказана обобщённая локализация шаровых частичных сумм кратных рядов Фурье в классе L_2 , т.е. если $f \in L_2(T^N)$ и $f = 0$ на некотором открытом множестве $\Omega \subset T^N$, то шаровые частичные суммы сходятся к нулю почти всюду на множестве Ω . Ранее было известно, что обобщённая локализация отсутствует в классах $L_p(T^N)$ при $1 \leq p < 2$. Таким образом, принцип обобщённой локализации полностью решён в классах $L_p(T^N)$, $p \geq 1$: если $p \geq 2$, то справедлив принцип локализации, а если $p < 2$, то этот принцип отсутствует.

Ключевые слова: кратные ряды Фурье, шаровые средние, сходимость почти всюду, обобщённая локализация.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-565248917-10>

1. Пусть $\{f_n\}$, $n \in Z^N$, коэффициенты Фурье функции $f \in L_2(T^N)$, $N \geq 2$. Рассмотрим шаровые частичные суммы кратных рядов Фурье:

$$S_\lambda f(x) = \sum_{|n|^2 < \lambda} f_n e^{inx}. \quad (1)$$

Целью настоящей работы является изучение сходимости почти всюду данных частичных сумм. Одним из первых вопросов, возникающих при исследовании сходимости почти всюду сумм (1), является вопрос о справедливости гипотезы Лузина: верно ли, что шаровые суммы (1) ряда Фурье любой функции $f \in L_2(T^N)$ сходятся почти всюду на T^N ? Иначе говоря, распространяется ли теорема Карлсона на N -кратные ряды Фурье при суммировании по кругам. Ответ на этот вопрос до настоящего момента неизвестен. Известно, однако, что теорема Ханта о сходимости почти всюду рядов Фурье функций из L_p , $p > 1$, на N -кратные ряды ($N > 2$), суммируемые по кругам, не распространяется (см. [1] и литературу, приведённую там).

Исторически прогресс в решении гипотезы Лузина был достигнут путём рассмотрения более простых проблем. Одна из таких проблем в случае частичных сумм (1) заключается в исследовании их

сходимости почти всюду к нулю на множестве $T^N \setminus \text{supp } f$.

В.А. Ильин [2] ввёл понятие обобщённого принципа локализации для произвольных разложений по собственным функциям. Следуя В.А. Ильину, мы будем говорить, что обобщённый принцип локализации справедлив для S_λ в $L_p(T^N)$, если для любой функции $f \in L_p(T^N)$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda f(x) = 0 \quad (2)$$

почти всюду на $T^N \setminus \text{supp } f$.

Заметим, что, в отличие от классического принципа локализации, обобщённый принцип требует выполнения равенства (2) почти всюду на $T^N \setminus \text{supp } f$.

Для шаровых частичных кратных интегралов Фурье (обозначим их через $\sigma_\lambda f(x)$) обобщённый принцип локализации в классах $L_p(R^N)$ был исследован многими математиками (см. [3–9]). В частности, в работе А. Карбери и Ф. Сория [5] доказана справедливость обобщённой локализации для σ_λ в $L_p(R^N)$, когда $2 \leq p < \frac{2N}{N-1}$.

Для рядов Фурье (1) А. Бастис [4] доказал отсутствие обобщённой локализации в классах $L_p(T^N)$, когда $1 \leq p < 2$, т.е. он построил функцию $f \in L_p(T^N)$, такую, что на некотором подмножестве множества $T^N \setminus \text{supp } f$ положительной меры имеет место соотношение

Национальный университет Узбекистана
им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Республика Узбекистан
Институт математики им. В.И. Романовского
Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент,
Республика Узбекистан
E-mail: ashurovr@gmail.com

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} |S_\lambda f(x)| = +\infty.$$

Следует отметить, что этот результат справедлив и для частичных интегралов $\sigma_\lambda f(x)$.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема 1. Пусть $f \in L_2(T^N)$ и $f=0$ на некотором открытом множестве $\Omega \subset T^N$. Тогда равенство (2) справедливо почти всюду на Ω .

Таким образом, проблема обобщённой локализации для S_λ в классах $L_p(T^N)$ при $p \geq 1$ полностью решена: если $p \geq 2$, то справедлив принцип обобщённой локализации, и если $p < 2$, то обобщённая локализация отсутствует.

При исследовании вопросов сходимости почти всюду целесообразно ввести в рассмотрение максимальный оператор

$$S_* f(x) = \sup_{\lambda > 0} |S_\lambda f(x)|.$$

Доказательство теоремы 1 основано на следующей оценке этого оператора.

Теорема 2. Пусть $f \in L_2(T^N)$ и $f=0$ в шаре $\{|x| < R\} \subset T^N$. Тогда для любого $r < R$ существует константа $C = C(R, r)$ такая, что

$$\int_{|x| \leq r} |S_* f(x)|^2 dx \leq C \int_{T^N} |f(x)|^2 dx. \quad (3)$$

2. Доказательство теоремы 2 использует метод, разработанный в работе [5], и основано на нескольких вспомогательных утверждениях, наиболее важные из которых приведены в этом разделе.

Пусть $f=0$ на некотором шаре $\{|x| < R\} \subset T^N$ и фиксируем число $r < R$.

Пусть $\chi_b(t)$ является характеристической функцией сегмента $[0, b]$. Обозначим через $\phi_1(t)$ гладкую функцию, удовлетворяющую условию

$$\chi_{(R-r)/3}(t) \leq \phi_1(t) \leq \chi_{2(R-r)/3}(t),$$

и положим $\phi_2(t) = 1 - \phi_1(t)$. Определим новую функцию равенством $\psi(x) = \phi_2(|x|)$, когда $x \in T^N$, и продолжим её 2π -периодически по каждой переменной x_j .

Положим $\theta(x, \lambda) = (2\pi)^{-N} \sum_{|m|^2 < \lambda} e^{inx}$. Тогда по определению коэффициентов Фурье имеем

$$S_\lambda f(x) = \int_{T^N} \theta(x - y, \lambda) f(y) dy.$$

Если обозначить $\theta_\lambda(x) = \theta(x, \lambda)\psi(x)$, то так как носитель функции f содержится в $\{|x| \geq R\}$,

$$S_\lambda f(x) = \int_{T^N} \theta_\lambda(x - y) f(y) dy$$

для всех x с $|x| \leq r$. Поэтому для того, чтобы доказать оценку (3), достаточно показать справедливость неравенства

$$\int_{T^N} \sup_{q > 0} |\theta_q * f|^2 dx \leq C \int_{T^N} |f(x)|^2 dx, \quad (4)$$

где $\sup$ взято по всем натуральным числам.

Коэффициенты Фурье функции $\theta_\lambda(x)$ обозначим через $(\theta_k)_n$. Для них справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Для любого натурального l существует константа C_l , зависящая от l, r и R , такая, что для всех $k \geq 0$ и $n \in Z^N$ имеет место оценка

$$|(\theta_k)_n| \leq \frac{C_l}{(1 + |n| - \sqrt{k})^l}.$$

Пусть $\{\psi_m\}$ есть коэффициенты Фурье функции $\psi(x)$ и пусть $(\Theta_j)_n = (\theta_{j+1})_n - (\theta_j)_n$, т.е.

$$(\Theta_j)_n = (2\pi)^{-N} \sum_{|m|^2=j} \psi_{m-n} = (2\pi)^{-N} \sum_{|n-m|^2=j} \psi_m$$

(если диофантово уравнение $|m - n|^2 = j$ не имеет решения, то положим $(\Theta_j)_n = 0$). Имеем следующее утверждение.

Лемма 2. Равномерно по n справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{\infty} |(\Theta_j)_n|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{2k} |(\Theta_{k^2+p})_n|^2 \leq C.$$

Если соответствующим образом группировать числа $(\Theta_{k^2+p})_n$ по параметру p , то можно получить более сильное утверждение. Наша ближайшая цель — реализовать эту группировку.

Обозначим через y_0 точку пересечения шара $\{x \in R^N : |x - n| \leq k + 1\}$ с прямой On , расположенную ближе к началу координат. Проведём через эту точку касательную гиперповерхность T_{y_0} . Пусть $B_0 = \{y \in T_{y_0} : |y - y_0| < 1\}$ и $B_j = \{y \in T_{y_0} : \sqrt{j} \leq |y - y_0| < \sqrt{j+1}\}, j = 1, 2, \dots, 2k-1$. Обозначим через $C_j^k, j = 0, 1, \dots, 2k-1$, N -мерный цилиндр с основанием B_j и осью, параллельной к On и длиной $|n|$. Рассмотрим “кольцо” $K = \{m \in Z^N : k^2 \leq |m - n|^2 < (k+1)^2\}$ и поделим его на следующие множества: $P_j^k = K \cap C_j^k, j = 0, 1, \dots, 2k-1$.

Определим множества $Q_q^k, q = 0, 1, \dots, 2k-1$, следующим образом: Q_q^k есть множество тех целых p ,

$0 \leq p \leq 2k$, для которых диофантово уравнение $|m - n|^2 = k^2 + p$ имеет решение, лежащее на множестве P_q^k . Если P_q^k не содержит решения уравнения $|m - n|^2 = k^2 + p$ ни при каких p , то отнесём к множеству Q_q^k одно любое число p , которое не вошло в предыдущие множества $Q_j^k, j = 0, 1, \dots, q - 1$. Если же таких p уже нет, то будем считать множества $Q_j^k, j = q, q + 1, \dots, 2k - 1$, пустыми.

При таком выборе множества Q_q^k можно показать, что оно имеет не более $4\sqrt{q+1}$ элементов и справедливы следующие утверждения.

Лемма 3. *Равномерно по n справедлива оценка*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p \in Q_q^k} |(\Theta_{k^2+p})_n|^2 \leq C.$$

Лемма 4. *Равномерно по n справедлива оценка*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^{-2} \sum_{p \in Q_q^k} |(\Theta_{k^2+p})_n|^2 \leq C.$$

3. Пусть $\Theta_j(x) = \theta_{j+1}(x) - \theta_j(x)$.

Тогда $\theta_{j+1} * f + \theta_j * f = 2\theta_j * f + \Theta_j * f$.

Заметим, что коэффициенты Фурье функции $\Theta_j(x)$ есть введённые ранее числа $(\Theta_j)_n$.

Легко видеть, что

$$|\theta_q * f|^2 = \sum_{j=0}^{q-1} |\Theta_j * f|^2 + 2 \sum_{j=0}^{q-1} [\Theta_j * f][\theta_j * f],$$

или

$$\begin{aligned} \sup_{q>0} |\theta_q * f|^2 &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |\Theta_j * f|^2 + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} \sum_{p \in Q_q^k} |\Theta_{k^2+p} * f|(q+1) |\theta_{k^2+p} * f|(q+1)^{-1}. \end{aligned}$$

Интегрируя по T^N и используя сформулированные выше леммы, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{T^N} \sup_{q>0} |\theta_q * f|^2 &\leq \sum_n |f_n|^2 \sum_{j=0}^{\infty} |(\Theta_j)_n|^2 + \\ &+ \sum_n |f_n|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^2 \sum_{p \in Q_q^k} |(\Theta_{k^2+p})_n|^2 + \\ &+ \sum_n |f_n|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{2k-1} (q+1)^{-2} \sum_{p \in Q_q^k} |(\Theta_{k^2+p})_n|^2 \leq \\ &\leq C \sum_n |f_n|^2 = C \int_{T^N} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Это и есть утверждение теоремы 2. Теорема 1 вытекает из теоремы 2 с помощью стандартной техники (см. [11]).

Благодарности. Автор выражает благодарность Ш.А. Алимову за обсуждение результатов работы, а также Марсело М. Дисконзи (Marcelo M. Disconzi), Университет Вандербилт (США), за поддержку и гостеприимство.

Источник финансирования. Работа выполнена при участии Фонда поддержки фундаментальных исследований Республики Узбекистан (проект ОТ-Ф4-88).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш.А., Ашуров Р.Р., Пулатов А.К. Кратные ряды и интегралы Фурье // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1989. № 42. С. 7–104.
2. Ильин В.А. Об обобщенной интерпретации принципа локализации для рядов Фурье по фундаментальным системам функций // Сиб. мат. журн. 1968. № 9. С. 1093–1106.
3. Бастис А.Й. Обобщенный принцип локализации для N -кратного интеграла Фурье // ДАН. 1984. Т. 287. № 6. С. 777–778.
4. Бастис А.Й. Обобщенная локализация рядов Фурье по собственным функциям оператора Лапласа в L_p -классах // Литовский мат. сб. 1991. № 31. С. 387–405.
5. Carbery A., Soria F. Almost Everywhere Convergence of Fourier Integrals for Functions in Sobolev Spaces, and an L_2 -Localization Principle // Revista Mat. Iberoamericana. 1988. № 4. P. 319–337.
6. Carbery A., Rubio de Francia J.L., Vega L. Almost Everywhere Summability of Fourier Integrals // J. London Math. Soc. 1988. № 38. P. 513–524.
7. Carbery A., Romera E., Soria F. Radial Weights and Mixed Norm Inequalities for the Disc Multiplier // J. Funct. Anal. 1992. № 109. P. 52–75.
8. Carbery A., Soria F. Pointwise Fourier Inversion and Localization in R^n // J. Fourier Analysis and Applications. 1997. № 3. Special Issue. P. 847–858.
9. Sjölin P. Regularity and Integrability of Spherical Means // Monatsh. Math. 1983. № 96. P. 277–291.
10. Ashurov R.R., Ahmedov A., Ahmad Rodzi b. Mahmud. The Generalized Localization for Multiple Fourier Integrals // J. Math. Anal. and Appl. 2010. № 371. P. 832–841.
11. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974. 337 с.

GENERALIZED LOCALIZATION FOR SPHERICAL PARTIAL SUMS OF MULTIPLE FOURIER SERIES

R. R. Ashurov

*National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek and Institute of Mathematics,
Tashkent, Uzbekistan*

*Uzbekistan Academy of Science Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Science,
Tashkent, Uzbekistan*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev January 18, 2019

Received March 4, 2019

In this paper the generalized localization principle for the spherical partial sums of the multiple Fourier series in the L_2 -class is proved, that is, if $f \in L_2(T^N)$ and $f=0$ on an open set $\Omega \subset T^N$, then it is shown that the spherical partial sums of this function converge to zero almost — everywhere on Ω . It has been previously known that the generalized localization is not valid in $L_p(T^N)$ when $1 \leq p < 2$. Thus the problem of generalized localization for the spherical partial sums is completely solved in $L_p(T^N)$, $p \geq 1$: if $p \geq 2$ then we have the generalized localization and if $p < 2$, then the generalized localization fails.

Keywords: multiple Fourier series, spherical partial sums, convergence almost-everywhere, generalized localization.