ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 489, № 1, с. 11–16

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977.1, 517.977.5

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА В (B)-ПРОСТРАНСТВАХ. ПРИМЕРЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В (H)-ПРОСТРАНСТВАХ И ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В $\mathbb{R}^n$

А. И. Прилепко

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим 04.07.2019 г.

Поступило 04.07.2019 г.

Исследуются задачи наблюдения и управления в банаховых (B)-пространствах. На основе BUME-метода и метода монотонных отображений формулируется критерий управляемости и оптимальной управляемости. Вводится обратная задача управляемости и сформулирован абстрактный принцип максимума в (B)-пространствах. Исследуется случай для уравнений в частных производных в гильбертовых (H)-пространствах, и для обыкновенных дифференциальных уравнений в $\mathbb{R}^n$ доказывается интегральный принцип максимума и выписывается система оптимальности.

Ключевые слова: оптимальное управление, обратная задача, BUME-метод, принцип максимума.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-5652489111-16

1. В данном разделе (следуя [1, 8–10]) вводятся основные определения и даётся постановка задач (см. [1–7, 11–15]).

Пусть X, Y есть (B)-пространства и их сопряжённые X', Y'. Для линейного оператора $A\colon X \supset D(A) \to R(A) \subset Y$ обозначаем $D(A)$ — область определения, $R(A)$ — область значений, $N(A)$ — нуль-пространство (ядро) оператора A. Через $\overline{R(A)}$ обозначаем замыкание $R(A)$. $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ означает, что $D(A) = X$, $R(A) \subset Y$ и A есть линейный непрерывный (ограниченный) оператор. $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ обозначает двусторонний обратный к A. Вводятся также A_l^{-1} — левый обратный и A_r^{-1} — правый обратный к оператору A (см. [8; 12, ссылка 114, гл. V, § 4.4]). Значение линейного функционала $x'(x)$ обозначаем $x'(x) = \langle x, x'\rangle_{XX'}$ либо $x'(x) = \langle x', x\rangle_{X'X}$ (см. [9]).

Сопряжённый оператор A' (по Банаху) к оператору A определяется по правилу $\langle Ax, y'\rangle_{YY'} = \langle x, A'y'\rangle_{XX'} = \langle x, x'\rangle_{XX'}$, где $x \in X$, $y' \in Y'$ (см. [9]). Это обозначение сохраняется, когда X и Y есть (H)-пространства. Для нелинейного отображения A из X в Y обозначим $A \in (X \to Y)$. Пишем $x \neq 0$, если $\|x\| \neq 0$.

2. Введём операторные задачи наблюдения и управления. Пусть $T \in (0, \infty)$, $J = (0, T)$, $t \in \bar{J}$. Даны (B)-пространства E_1 и E и их сопряжённые E_1', E' не зависят от времени, а также даны (B)-пространства, зависящие от времени и E_1. $U_T = B(J, E_1)$, $U_T' = (B(J, E_1))'$, U_T' называется пространством управлений. Ниже всюду все (B)- и (H)-пространства являются вещественными, если не оговорено особо, причём U_T' есть рефлексивное (B)-пространство.

В отличие от [1], мы, следуя [14], уравнение первого рода называем задачей наблюдения, а его сопряжённое — задачей управления.

Задача наблюдения. Дано операторное уравнение первого рода в (B)-пространстве

$$A_T e = u, \quad e \in E, \quad u \in U_T, \quad A_T \in \mathcal{L}(E, U_T). \quad (1)$$

Предполагаем: (1) — непрерывно наблюдаемое, т.е.

$$\exists \mu_{m_T} > 0\colon \|(A_T)_l^{-1}\| = \frac{1}{\mu_{m_T}} < \infty \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|A_T e\| \geq \mu_{m_T}\|e\| \Leftrightarrow \|(A_T)_l^{-1}\| < +\infty, \quad (2)$$

причём для (1) выполняется обратное неравенство наблюдаемости, т.е.

$$\exists \mu_T > 0\colon \|A_T e\|_{U_T} \geq \mu_T \|e\|_E \quad \forall e \Rightarrow \|(A_T)_l^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu_T}. \quad (3)$$

Тогда (2) выполняется для $0 < \mu_T \leq \mu_{m_T} < \infty$.

Сопряжённое к (1) есть задача управления.

Задача управления. Дано $e' \in E' \setminus \{0\}$, найти $u' \in U_T'$ из уравнения

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: *prilepko.ai@yandex.ru*

$$A'_T u' = e', \quad \text{где } (A_T)' = A'_T, \quad (A'_T)' = A_T,$$
$$A'_T \in \mathcal{L}(U'_T, E'). \tag{4}$$

Решение $u_* \neq 0$ уравнения (4) (т.е. $A'_T u_* = e'$) называется управлением (в [2–6, 11, 12] u_* называют точным управлением). Множество всех управлений (4) обозначаем $U_* \subset U'_T$, причём минимальное по норме управление (4) обозначаем $u_*^{\text{opt}} \equiv u_*^0$ и называем оптимальным управлением, т.е.

$$\|u_*^0\|_{U'_T} = \inf\{\|u_*\|_{U'_T} \mid u_* \in U_*\}.$$

Привлечём BUME-метод и метод монотонных отображений решений [1] и теорему Банаха для операторного уравнения первого рода (см. [1, 9]). Справедлив следующий критерий.

Теорема 1 (Критерий управляемости и оптимальной управляемости). *Пусть U'_T — рефлексивное* (B)*-пространство. Тогда справедливы следующие эквивалентные утверждения.*

Непрерывная наблюдаемость (2) *для* (1), *т.е.* $\|(A_T)_l^{-1}\| < +\infty \Leftrightarrow R(A_T) = \overline{R(A_T)} = N(A'_T)^{\perp}$, $N(A_T) = 0 \Leftrightarrow R(A'_T) = \overline{R(A'_T)}$, $N(A_T) = 0 \Leftrightarrow R(A'_T) = E \Leftrightarrow \exists$ *управление* $u_* \neq 0$ *уравнения* (4) $\Leftrightarrow \exists U_* \neq \varnothing$, $0 \notin U_*$, $U_* = A_r^{-1}\{e'\}$, U_* *— замкнутое выпуклое множество* $U_* \subset U'_T \Leftrightarrow \exists$ *единственное* $u_*^0 \neq 0$, $u_*^0 \in U_*$, *если* U'_T *— рефлексивное строго выпуклое* (B)*-пространство.*

Далее пусть U'_T — рефлексивное строго выпуклое (B)-пространство. Тогда существует единственное дуальное отображение $J_{U'} \in (U_T \to U'_T)$ со свойствами

$$\langle J_{U'}u, u\rangle_{U'_T U_T} = \|J_{U'}u\|_{U'_T} \cdot \|u\|_{U_T} = \|J_{U'}u\|^2_{U'_T} = \|u\|^2_{U_T},$$

где $u' = J_{U'}u \in U'_T$, $u \in U_T$.

В случае когда U_T, U'_T есть (H)-пространства $J_{U'} \in \mathcal{L}(U_T, U'_T)$, причём $J_{U'} = J_U^{-1}$, где $J_U \in \mathcal{L}(U'_T, U_T)$, есть отображение Рисса (см., например, [1, гл. V, § 21; 7, § 32.3*d*, Т. 11]).

Введём обратную задачу наблюдения: дано $e' \in E' \setminus \{0\}$, найти $e \in E$ из уравнения

$$\Lambda_T e = e', \quad \Lambda_T = A'_T J_{U'} A_T, \quad \Lambda_T \in (E \to E'). \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть U'_T — рефлексивное строго выпуклое* (B)*-пространство. Тогда имеем*

$\|(A_T)_l^{-1}\| < +\infty \Leftrightarrow \Lambda_T$ *есть биективное отображение, т.е.* $\exists \Lambda_T^{-1} \in (E' \to E)$, *существует единственное решение* (5) $e_\Lambda = \Lambda_T^{-1}e \Leftrightarrow$ *существует единственное оптимальное управление для* (4) $u_*^0 = J_{U'}u_e^0$, *где* $u_e^0 = A_T e_\Lambda = A_T\Lambda_T^{-1}e'$, $\|u_*^0\|^2 = \|u_e^0\|^2 = \langle e', \Lambda_T^{-1}e'\rangle$, $U_* = u_*^0 + N(A'_T)$, $u_*^0 \perp N(A'_T) \Leftrightarrow \langle u_*, u_e^0\rangle_{U'_T U_T} = \langle u_*^0, u_e^0\rangle_{U'_T U_T}$.

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 имеем*

$$\|(A_T)_l^{-1}\| < +\infty \Leftrightarrow \|A_T e\|_{U'_T} \geq \mu_{m_T}\|e\|_E \quad \forall e \in E \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|e_\Lambda\|_E = \|\Lambda_T^{-1}e'\|_E \leq \frac{1}{\mu^2_{m_T}}\|e'\|_{E'} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|u_*^0\|^2_{U'_T} = \|u_e^0\|^2_{U_T} \leq \frac{1}{\mu^2_{m_T}}\|e'\|^2_{E'},$$

причём

$$0 < \frac{1}{\mu_{m_T}} \leq \frac{1}{\mu_T} < +\infty,$$

где $\mu_T > 0$ *— константа обратного неравенства наблюдаемости.*

Пусть дана $f(t)$ — вещественная, непрерывная и строго выпуклая функция $f(|t|) \to \infty$, $|t| \to \infty$. В этом случае справедлива

Теорема 3. *Пусть U'_T — рефлексивное строго выпуклое* (B)*-пространство. В этом случае*

$$\|(A_T)_l^{-1}\| < +\infty \Leftrightarrow \max_{u_* \in U_*} P(u_*, \ldots) = P(u_*^{\text{opt}}, \ldots),$$

где

$$P(u_*, \ldots) = \langle u_*, u_e^0\rangle_{U'_T U_T} + \gamma\langle A'_T J_{U'}u_e^0, e_\Lambda\rangle -$$
$$- f(\|u_*\|_{U'_T}),$$

где $0 \leq \gamma < \infty$, $e_\Lambda = \Lambda_T^{-1}e'$, *причём в частности можно взять* $f(\|u_*\|_{U'_T}) = \|u_*\|^2_{U'_T}$.

Доказательство. Действительно, из теоремы 2 имеем

$$\|(A_T)_l^{-1}\| < +\infty \Leftrightarrow \langle u_*, u_e^0\rangle_{U'_T U_T} = \langle u_*^0, u_e^0\rangle_{U'_T U_T},$$

кроме того,

$$\min_{u_* \in U_*} f(\|u_*\|_{U'_T}) = f(\|u_*^0\|_{U'_T}) \quad \text{(см. [15, гл. 4])},$$

откуда следует утверждение теоремы 3.

3. В данном разделе исследуется задача наблюдения и управления в случае вещественных (H)-пространств; при выполнении условия непрерывной наблюдаемости доказываются теоремы 1–3.

Пусть E, E_1 и их сопряжённые E', E'_1 есть вещественные (H)-пространства, $U_T = V(J, E)$ есть (H)-пространство $U'_T = (V(J, E))'$, где V — (H)-пространство. Предполагаем, что

$$\|(A_T)_l^{-1}\| = \frac{1}{\mu_{m_T}} \Leftrightarrow \|A_T e\|_{U_T} \geq \mu_{m_T}\|e\| \Leftrightarrow \|(A_T)_l^{-1}\| < +\infty,$$

причём

$$0 < \frac{1}{\mu_{m_T}} \le \frac{1}{\mu_T} < \infty,$$

где μ_T — константа обратного неравенства. В этом случае $J_{U'} \in \mathcal{L}(U_T, U'_T)$, $\Lambda_T \in \mathcal{L}(E, E')$ и так как $\Lambda_T = A'_T J_{U'} \Lambda_T$, то $\Lambda_T = \Lambda'_T$, причём

$$\langle \Lambda_T e, e\rangle_{E'E} = \langle A'_T J_{U'} A_T e, e\rangle_{E'E} = \\ = \langle J_{U'} A_T e, A_T e\rangle_{U_T} = \|A_T e\|^2_{U_T} \ge \mu^2_{m_T} \|e\|^2_E,$$

т.е.

$$\exists\ \Lambda_T^{-1} \in \mathcal{L}(E', E) \quad \|\Lambda_T^{-1}\| \le \frac{1}{\mu^2_{m_T}},$$

$$e_\Lambda = \Lambda_T^{-1} e', \quad \|e_\Lambda\|_E \le \frac{1}{\mu^2_{m_T}} \|e'\|_{E'}.$$

Далее, e' дано из $E' \setminus \{0\}$. Положим $u_e^0 = A_T e_\Lambda = A_T \Lambda_T^{-1} e'$, $u_e^0 \ne 0$. Введём $\tilde{u}_* = J_{U'} u_e^0$, то $\tilde{u}_* \in U_*$ (так как $A'_T \tilde{u}_* = e'$), причём $\forall\ u_* \in U_*, u_* \ne 0$, имеем

$$u_* = \tilde{u}_* + (u_* - \tilde{u}_*); \quad (u_* - \tilde{u}_*) \in N(A'_T),$$

так как $u_e^0 \in R(A_T) = \overline{R(A_T)} = N(A'_T)^\perp$, то $u_*^0 \perp (u_* - \tilde{u}_*)$, поэтому $(u_*, u_e^0)_{U'_T U_T} = \langle \tilde{u}_*, u_e^0\rangle_{U'_T U_T}$, причём $\forall\ u_* \in U_*$ имеем

$$\|u_*\|_{U'_T} \|u_e^0\|_{U_T} \ge \langle u_*, u_e^0\rangle_{U'_T U_T} = \langle \tilde{u}_*, u_e^0\rangle_{U'_T U_T} = \\ = \langle J_{U'} u_e^0, u_e^0\rangle_{U'_T U_T} = \|u_e^0\|^2_{U_T}.$$

Так как $u_e^0 \ne 0$, то

$$\|u_*\|_{U'_T} \ge \|u_e^0\|_{U_T} = \|J_{U'} u_e^0\|_{U'_T} = \|\tilde{u}_*\|_{U'_T},$$

т.е. $\|u_*\|_{U'_T} \ge \|\tilde{u}_*\|_{U'_T}$, так как существует единственное $\|u_*^0\| \ne 0$, то $\tilde{u}_* = u_*^0$.

Далее,

$$\|(A_T)_l^{-1}\| < \infty \Leftrightarrow \|A_T e\|_{U_T} \ge \mu_{m_T} \|e\|_E \quad \forall\ e \in E,$$

то

$$\langle \Lambda_T e, e\rangle_{E'E} = \|A_T e\|^2_{U_T} \ge \mu^2_{m_T} \|e\|^2_E,$$

так как $\Lambda_T = \Lambda'_T$, то

$$\exists\ \Lambda_T^{-1} \in \mathcal{L}(E', E) \quad \|\Lambda_T^{-1}\| \le \frac{1}{\mu^2_{m_T}},$$

поэтому

$$\|e_\Lambda\|_E = \|\Lambda_T^{-1} e'\| \le \frac{1}{\mu^2_{m_T}} \|e'\|_{E'},$$

т.е.

$$\|u_*^0\|^2_{U'_T} = \langle J_{U'} A_T \Lambda_T^{-1} e, A_T \Lambda_T^{-1} e\rangle_{U'_T U_T} = \\ = \langle A'_T J_{U'} A_T \Lambda_T^{-1} e', \Lambda_T^{-1} e'\rangle_{E'E} = \langle e', \Lambda_T^{-1} e'\rangle \le \frac{1}{\mu^2_{m_T}} \|e'\|^2_{E'},$$

где

$$0 < \frac{1}{\mu_{m_T}} \le \frac{1}{\mu_T} < \infty.$$

Таким образом, теоремы 1–3 и следствие для (H)-пространств доказаны.

Замечание. В большом числе монографий и статей (см. [2–6, 11, 12] и цитированную там литературу и др.) для многих конкретных задач Ур.ч.п. в (H)-пространстве доказывается, что выполняется обратное неравенство наблюдаемости. Итак, для указанных задач Ур.ч.п. выполняются теоремы 1–3 и их следствия.

4. В данном разделе рассматриваются задачи наблюдения и управления для ОДУ в $\mathbb{R}^n$ (см. [2–6, 11–15] и др.). Даны пространства $E = E' = \mathbb{R}^n$, $E_1 = E'_1 = \mathbb{R}^m$, $1 \le m \le n < \infty$, и дано $T \in (0, \infty)$, $J = (0, T)$, $t \in \bar{J}$. Введём $U_T = L^2(J, E_1)$, $U'_T = L^2(J, E'_1)$, $U'_T = L^2(J, \mathbb{R}^m)$ — энергетическое пространство управлений (см. [14] и др.). Даны $G_T = L^2(J, E)$, $G'_T = L^2(J, E')$. Даны вещественные кусочно-непрерывные $(n \times n)$-матрица $A(t)$ и $(n \times m)$-матрица $B(t)$ и их транспонированные $A^T(t)$, $B^T(t)$. Пусть $B \in \mathcal{L}(G_T, U_T)$, $B^T \in \mathcal{L}(U'_T, G'_T)$. Рассмотрим однородную задачу Коши для ОДУ в $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) = -A(t) z(t),\ t \in \bar{J} \quad \left(\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}\right); \\ &z(T) = e, \end{aligned} \tag{6}$$

и неоднородную задачу Коши

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = A^T(t) y(t) + f(t),\ t \in \bar{J}; \\ &y(0) = 0, f \in L^2(J, E'). \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда (6) называется союзной задачей к (7), причём $z(t) = S_A(T, t)e$ есть абсолютно-непрерывное решение (6), $S_A(T, t)$ есть эволюционная (разрешающая) матрица (6), $y(t) = \int_0^t S_A^T(t, \tau) f(\tau) d\tau$ — решение (7), $y \in H^1(J, E')$, $\dot{y} \in L^2(J, E')$ (см. [15, гл. 4, § 4]), где $H^1(J, E') = W_2^1(0, T; E')$ — пространство Соболева,

$$\|f\|^2_{H^1} = \|f\|^2_{L^2} + \|\dot{f}\|_{L^2}, \quad L^2 = L^2(J, E').$$

Обозначим $\bar{z}(t) = \overline{S_A(T, t)e}$ обобщённое решение из $G_T = L^2(J, E)$ уравнения $\dot{\bar{z}}(t) = -A(t)\bar{z}(t)$,

$\bar{z}(T) = e$, где $\overline{S_A(T, t)}$ есть продолжение $S_A(T, t)$ в пространство G_T, т.е. пусть e_n, $e \in E$, $e_n \to e$ в E, $n \to \infty$,

$$z_n(t) = S_A(T, t)e_n \to \bar{z}(t) = \overline{S_A(T, t)}e,$$

сходимость в $G_T = L^2(J, E)$. В этих условиях введём задачу наблюдения:

$$\begin{gathered} A_T e = u, \quad \text{где } e \in E,\ u \in U_T,\ A_T \in \mathcal{L}(E, U_T), \\ \text{причём } A_T e = u \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow B(t)\bar{z}(t) = B(t)\overline{S_A(T, t)}e = u(t),\ u \in U_T. \end{gathered} \tag{8}$$

Предполагаем, что для (8) выполняется обратное неравенство наблюдаемости:

$$\begin{gathered} \exists\, \mu_T > 0: \|A_T e\|_{U_T} \ge \mu_T \|e\|_E \quad \forall e \in E, \\ \text{т.е. } \|(A_T)_l^{-1}\| \le \frac{1}{\mu_T} < \infty \Rightarrow \\ \Rightarrow \|(A_T)_l^{-1}\| < \infty. \end{gathered} \tag{9}$$

Сопряжённое к (8) есть задача управления для ОДУ в $\mathbb{R}^n$.

З а д а ч а у п р а в л е н и я: дано $e' \in E' \setminus \{0\}$, найти $u' \in U'_T$ из уравнения

$$\begin{gathered} A'_T u' = e', \quad (A_T)' = A'_T, \quad (A'_T)' = A_T, \\ A'_T \in \mathcal{L}(U'_T, E'). \end{gathered} \tag{10}$$

Операторная задача (10) $\Leftrightarrow$ д и ф ф е р е н ц и а л ь н о й з а д а ч е у п р а в л е н и я: дано $e' \in E' \setminus \{0\}$, найти пару $u' \in U'_T$, $y \in H^1(J, E')$ из условий

$$\begin{gathered} \dot{y}(t) = A^T(t)y(t) + B^T(t)u'(t), \quad t \in \bar{J}, \\ y(0) = 0, \quad y(T) = e'. \end{gathered} \tag{11}$$

Отметим,

$$A'_T u' = e' \Leftrightarrow \int_0^T S_A^T(T, t)\, B^T(t) u'(t) dt = e',$$

кроме того, предполагаем $\|(A_T)_l^{-1}\| < +\infty$.

В этих условиях о б р а т н а я з а д а ч а у п р а в л я е м о с т и для ОДУ в $\mathbb{R}^n$ имеет вид: дано $e' \in E' \setminus \{0\}$, найти $e \in E$ из уравнения

$$\Lambda_T e = e', \quad \Lambda_T = A'_T A_T, \quad \Lambda_T \in \mathcal{L}(E, E'),$$

$$\Lambda_T = \int_0^T S_A^T(T, t) B^T(t) B(t) \overline{S_A(T, t)} dt.$$

Из утверждений раздела 3 имеем

Т е о р е м а 4. *Пусть* $u' \in U'_T = L^2(J, \mathbb{R}^m)$, *причём выполняется* (9)

$$\|(A_T)_l^{-1}\| < \infty.$$

Тогда справедливы теоремы 1–3 *и следствие для ОДУ в* $\mathbb{R}^n$.

Из теоремы 2

$$\|(A_T)_l^{-1}\| < \infty \Leftrightarrow \langle u_*, u_e^0 \rangle_{U'_T U_T} = \langle u_*^0, u_e^0 \rangle_{U'_T U_T}, \quad u_*^0 = u_e^0,$$

где

$$u_e^0 = A_T \Lambda_T^{-1} e' = B(t)\bar{z}_e(t), \quad \bar{z}_e(t) = \overline{S_A(T, t)} \Lambda_T^{-1} e'.$$

Т е о р е м а 5 (Интегральный принцип максимума для ОДУ). *Пусть* $u' \in U'_T = L^2(J, \mathbb{R}^m)$, *тогда из* (9)

$$\|(A_T)_l^{-1}\| < +\infty \Leftrightarrow \max_{u_* \in U_*} \int_0^T H(u_*(t), \ldots) dt =$$

$$= \int_0^T \mathcal{H}(u_*^{\text{opt}}(t), \ldots) dt,$$

где

$$\begin{gathered} H(u_*(t), \ldots) = \langle u_*, u_e^0 \rangle_{E_1' E_1} + \\ + \langle A^T(t) y_*^0(t), \bar{z}_e(t) \rangle_{E'E} - \|u_*(t)\|_{E'}^2 \end{gathered}$$

с системой оптимальности

$$\begin{gathered} \dot{y}_*^0(t) = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_e}; \quad y_*^0(0) = 0,\ y_*^0(T) = e'; \\ \dot{\bar{z}}_e = -\frac{\partial H}{\partial y_*^0}; \quad \bar{z}_e(T) = \Lambda_T^{-1} e' \end{gathered}$$

и двуточечной задачей

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_*^0(t) \\ \bar{z}_e(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^T(t) & B^T(t)B(t) \\ 0 & -A(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_*^0(t) \\ \bar{z}_e(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \bar{J}; \\ y_*^0(0) = 0, \quad y_*^0(T) = e'; \\ \bar{z}_e(T) = \Lambda_T^{-1} e'. \end{gathered}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\begin{gathered} \langle u_*(t), u_e^0(t) \rangle_{E_1' E_1} = \langle u_*^0(t), u_e^0(t) \rangle_{E_1' E_1} = \\ = \langle u_*^0(t), B(t)\bar{z}_e(t) \rangle_{E_1' E_1} = \langle B^T(t) u_*^0, \bar{z}_e(t) \rangle_{E'E}. \end{gathered}$$

Кроме того,

$$\begin{gathered} \langle A^T y_*^0(t), \bar{z}_e(t) \rangle_{E'E} = \langle y_*^0(t), A(t)\bar{z}_e(t) \rangle_{E'E} \\ (\text{так как } A(t)\bar{z}_e(t) \text{ из } G_T). \end{gathered}$$

Отсюда следует теорема 5.

Введём теперь сглаживающую (союзную) задачу наблюдения:

$$\tilde{A}_T e = u_{kc} \Leftrightarrow B(t) S_A(T, t) e = u_{kc}(t),$$

$u_{kc} \in KC(\bar{J}, E)$ — кусочно-непрерывные функции. Отметим, что $(\tilde{A}_T)' \ne A'_T$.

Введём также с о ю з н у ю о б р а т н у ю задачу управления: дано $e' \in E' \setminus \{0\}$, найти $e \in E$ из условий

$$\Gamma_T e = e', \quad \text{где } \Gamma_T = A'_T\tilde{A}_T = \\ = \int_0^T S_A^T(T,t)B^T(t)B(t)S_A(T,t)dt.$$

В ОДУ (см. [12–14] и др.) Γ_T называют грамианом управления, причём

$$\langle \Gamma_T e, e\rangle_{E'E} = \int_0^T \|B(t)S_A(T,t)e\|_E^2 dt = \|\tilde{A}e\|_{U_T}^2.$$

Заметим, что $\Gamma_T = \Gamma_T^T$ есть самосопряжённая матрица в $\mathbb{R}^n$. Из алгебры имеется

Лемма 1.

$$N(\tilde{A}_T) = 0 \Leftrightarrow \det\Gamma_T \neq 0 \Leftrightarrow \|\Gamma_T^{-1}\| = \frac{1}{\mu_T^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \langle \Gamma_T e, e\rangle_{E'E} \geq \mu_T^2\|e\|^2 \quad \forall e \in E \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|(\tilde{A}_T)_l^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu_T} < \infty.$$

Так как A_T, Λ_T есть продолжения $\tilde{A}_T$ и Γ_T, то справедлива

Лемма 2.

$$N(\tilde{A}_T) = 0 \Leftrightarrow \|(\tilde{A}_T)_l^{-1}\| = \frac{1}{\mu_T} < \infty \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|A_T e\|_{U_T}^2 = \|\tilde{A}_T e\|^2 \geq \mu_T^2\|e\|^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \|(A_T)_l^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu_T}, \quad \|\Lambda_T^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu_T^2}.$$

Лемма 3. *В классе управлений* $U'_T = L^2(J, E'_1) = L^2(J, \mathbb{R}^m)$ *условие*

$$N(\tilde{A}_T) = 0 \Leftrightarrow \|(A_T)_l^{-1}\| < +\infty \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow R(A_T) = \overline{R(A_T)}, \quad N(A_T) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \exists u_{kc} \neq 0 \quad u_{kc} = \tilde{A}_T\Gamma_T^{-1}e' = B(t)S_A(T,t)\Gamma_T^{-1}e', \\ u_{kc} \in U_*,$$

причём

$$\|u_{kc}\|_{U'_T}^2 = \langle e', \Gamma_T^{-1}e'\rangle \leq \frac{1}{\mu_T^2}\|e'\|_{E'}^2,$$

кроме того,

$$\|u_{kc}\|_{U'_T} > \|u_*^0\|_{U'_T}.$$

Доказательство.

$$A'_T u_{kc} = A'_T\tilde{A}_T\Gamma_T^{-1}e' = e',$$

т.е. $u_{kc} \in U_*$, $u_{kc} \neq 0$, есть управление. Далее,

$$\|u_{kc}\|^2 = \langle e', \Gamma_T^{-1}e'\rangle \leq \frac{1}{\mu_T^2}\|e'\|_{E'}^2,$$

причём

$$\|u_*^0\|^2 = \|u_e^0\|^2 = \langle e', \Lambda_T^{-1}e'\rangle \leq \frac{1}{\mu_{m_T}^2}\|e'\|_{E'}^2, \\ 0 < \frac{1}{\mu_{m_T}} \leq \frac{1}{\mu_T} < \infty.$$

Пусть $u_*^0 \notin KC(\bar{J}, E)$, т.е. $u_*^0 \neq u_{kc}$. Запишем $u_{kc} = u_e^0 + (u_{kc} - u_e^0)$, $(u_{kc} - u_e^0) \in N(A'_T)$, так как $u_e^0 \in R(A_T) = \overline{R(A_T)} = N(A'_T)^\perp$, то $u_e^o \perp (u_{kc} - u_e^0)$. Поэтому

$$\|u_{kc}\|^2 = \|u_e^0\|^2 + \|u_{kc} - u_e^0\|^2,$$

т.е. $\|u_{kc}\| > \|u_e^0\| = \|u_*^0\|$. Лемма доказана.

Из ОДУ в $\mathbb{R}^n$ (см. [12–14]) справедливо

Утверждение 1. *В энергетическом классе управления* $U'_T = L^2(J, \mathbb{R}^m)$ *для ОДУ в* $\mathbb{R}^n$ *условие* $N(\tilde{A}_T) = 0$ *называют вполне наблюдаемостью* $\Leftrightarrow$ *критерию Калмана при* A, B = const $\Leftrightarrow$ *аналитическому критерию, когда* $A(t)$, $B(t)$ — *аналитические. Справедлив достаточный критерий Красовского и др.*

Теорема 6. *Для* $U'_T = L^2(J, \mathbb{R}^m)$ *вполне наблюдаемость, т.е.* $N(\tilde{A}_T) = 0 \Leftrightarrow$ *единственности (без* $\exists$*) союзной задачи* $\tilde{A}_T e = u_{kc} \Leftrightarrow$ *выполнение обратного неравенства наблюдаемости* $\|A_T e\| \geq \mu_T\|e\| \Leftrightarrow$ *непрерывной наблюдаемости* $\|(A_T)_l^{-1}\| < \infty \Leftrightarrow$ *справедливости теорем* 1–5 *и их следствий для задач* (10) *и* (11) *управления ОДУ в* $\mathbb{R}^n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прилепко А.И.* // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 377–380.
2. *Lions J.L.* // SIAM Review. 1988. V. 30. P. 1–64.
3. *Lagnese J.E.* // Lecture Notes in Comput. Sci. 1991. V. 148. P. 158–181.
4. *Lasieska J.*, *Tridgiani R.* // Control Theory for Partial Differential Equations: Continuos and Approximation Theorems. V. I, II. Cambrige, 2000.
5. *Bensousan A.*, *Da Prato G.*, *Delfour M.C.*, *Mitter S.K.* Representation and Control of Infinite Dimensional System. V. I, II. Birkhauses, 2007.
6. *Komornik V.* Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method. John Wiley Sons, 1994.
7. *Zeidler E.* Nonlinear Functional Analysis and Its Application. V. I–IV. Springer Verlag, 1985, 1990.
8. Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
10. *Хилле Э.* Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Мир, 1972.

11. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999.
12. *Васильев Ф.П., Куржанский М.А., Потапов М.М., Разгулин А.В.* Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: МАКС Пресс, 2010.
13. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1960.
14. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. М.: Наука, 1968.
15. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973.

OPTIMAL CONTROL AND MAXIMUM PRINCIPLE IN (B)-SPACES. EXAMPLES FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN (H)-SPACES AND ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS IN $\mathbb{R}^n$

A. I. Prilepko

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichii July 4, 2019

Received July 4, 2019

Observation and control problems in Banach (B)-spaces are investigated. On the basis of the BUME method and the monotone mapping method, a criterion of controllability and optimal controllability is formulated. The inverse controllability problem is introduced and an abstract maximum principle is formulated in (B)-spaces. For PDE in Hilbert (H)-spaces and for ODE in $\mathbb{R}^n$, the integral maximum principle is proved and the optimality system is written out.

Keywords: optimal control, inverse problem, BUME method, maximum principle.