ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 489, № 1, с. 17–21

МАТЕМАТИКА

УДК 519.876

ФАКТОРНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ПРОЦЕССОВ

Академик РАН Б. Н. Четверушкин[1], В. А. Судаков[1,2,*]

Поступило 04.08.2019 г.

В работе предложена оригинальная концепция построения факторной модели на основе фреймов. Разработана методика вычисления значений факторов через поиск собственных значений матриц парных сравнений степени влияния слотов. Обсуждены возможные применения факторной модели при исследовании сложных процессов и систем.

Ключевые слова: факторная модель, фрейм, слот, собственный вектор, собственные значения.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-5652489117-21

1. ВВЕДЕНИЕ

Анализ сложных систем, включая технические, экономические и социальные, требует одновременного учёта большого количества разнородных показателей. В силу высокой размерности вектора показателей построение количественной модели затруднительно.

Один из подходов к моделированию таких систем заключается в построении факторной модели [1]. Она представляет собой ориентированный граф, в котором вершины — это факторы-показатели, определяющие состояние описываемой системы, а дуги — это взаимосвязи между различными факторами.

Степень влияния одного фактора на другой отражается по-разному. В простейшем случае она характеризуется просто знаком “плюс” или “минус”, что говорит о том, что увеличение значения одного фактора ведёт к увеличению или уменьшению значения другого фактора. Такие модели называют когнитивными. Они, как правило, основаны на экспертных суждениях.

Более сложным является вариант, когда каждой дуге приписывают коэффициент влияния, характеризующий степень влияния одного фактора на другой. Значения этих коэффициентов могут быть получены на основании суждений экспертов или определены на основании того или иного опыта, в том числе вероятностных оценок [2]. Возможны и более сложные случаи, когда коэффициенты зависят от самих факторов, т.е. нелинейной зависимости.

В данной работе в основном обсуждается задача со статистическими коэффициентами влияния.

2. ФОРМАЛИЗАЦИЯ ФАКТОРНОЙ МОДЕЛИ

Факторная модель может быть формализована в матричном виде

$$X = AX + F. \tag{1}$$

Здесь X — вектор значений факторов размерности n, A — матрица коэффициентов влияния между соответствующими факторами, F — вектор значений, характеризующий внешнее влияние.

Значения факторов могут быть найдены с помощью итерационной процедуры

$$X^{(k+1)} = AX^{(k)} + F. \tag{2}$$

Скорость сходимости этой процедуры (и сама возможность сходимости) определяется собственными значениями матрицы A.

Во многих случаях приходится сталкиваться с высокой размерностью решаемой задачи, когда число факторов велико. Объём вычислений в процедуре (2) резко возрастает. Визуальное представление графа становится трудно воспринимаемым. Для разрешения данной ситуации в работе предлагается моделирование факторов на основе концепции фреймов.

Фрейм является способом представления знаний в искусственном интеллекте (ИИ) [3] и соответствует тому или иному понятию реального мира. Фрейм состоит из слотов, которые содержат структурированные знания. Значение слота — это значение фактора в определённый момент времени. Соответственно фрейм — понятие из предметной области,

[1] *Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва*

[2] *Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова, Москва*

**E-mail*: *sudakov@ws-dss.com*

агрегирующее ряд слотов по смысловому признаку. Аналогией перехода от слотов к фрейму является процесс конденсации графа [4].

Фреймовая структура позволяет уменьшить сложность описания системы. Не погружаясь внутрь структуры фрейма, можно изучать, как слоты одного фрейма влияют на слоты другого фрейма. По аналогии с конденсацией графа концентрация нескольких вершин-факторов в единую вершину фрейма позволяет получить граф меньшей размерности. Внутренне влияние одних слотов на другие в рамках фрейма задаётся петлями у соответствующих вершин.

Введём обозначения: $i = 1, 2, \ldots, m$ — номер фрейма; $I = \{i\}$ — множество номеров фреймов; J_i — кортеж номеров факторов i-го фрейма; q_i — мощность J_i; (i_1, i_2) — дуга, говорящая о влиянии i_1-го фрейма на i_2-й фрейм.

Рассмотрим ориентированный граф взаимосвязи фреймов $G = (I, \{(i_1, i_2)\})$. В нём для каждой дуги (i_1, i_2) и каждого фактора $j^* \in J_{i_2}$ строится обратно-симметричная матрица парных сравнений степени влияния $j \in J_{i_1}$ на j^* [5]:

$$U_{i_1 j^*} = \begin{Vmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \ldots & u_{1q_{i_1}} \\ \frac{1}{u_{12}} & 1 & u_{23} & u_{24} & \ldots & u_{2q_{i_1}} \\ \frac{1}{u_{13}} & \frac{1}{u_{23}} & 1 & u_{34} & \ldots & u_{3q_{i_1}} \\ \frac{1}{u_{14}} & \frac{1}{u_{24}} & \frac{1}{u_{34}} & 1 & \ldots & u_{4q_{i_1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{1}{u_{1q_{i_1}}} & \frac{1}{u_{2q_{i_1}}} & \frac{1}{u_{3q_{i_1}}} & \frac{1}{u_{4q_{i_1}}} & \ldots & 1 \end{Vmatrix}. \quad (3)$$

Из уравнения

$$(\lambda_{i_1 j^*} I - U_{i_1 j^*}) w_{i_1 j^*} = 0 \quad (4)$$

найдём максимальное собственное значение $\lambda_{i_1 j^*}$ и соответствующий вектор факторов влияния $w_{i_1 j^*}$.

Факторами могут быть как критерии, характеризующие эффективность функционирования моделируемой системы, так и другие характеристики исследуемой системы, например ресурсные ограничения. Понятие фреймов допускает достаточно широкое толкование, например, можно вводить иерархию наследования, что позволяет применять одинаковые типы слотов к фреймам с единым предком.

Построим обобщённую матрицу влияния A по всем факторам:

$$A = \begin{Vmatrix} w_{i_1 1}^{1} & 0 & \ldots & 0 \\ w_{i_1 1}^{2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{i_1 1}^{q_{i_1}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & w_{i_2 2}^{1} & \ldots & 0 \\ 0 & w_{i_2 2}^{2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & w_{i_2 2}^{q_{i_2}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & w_{i_n n}^{1} \\ 0 & 0 & \ldots & w_{i_n n}^{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & w_{i_n n}^{q_{i_n}} \end{Vmatrix}. \quad (5)$$

Обозначим элементы матрицы $A = \|a_{ij}\|$; они определяются по формулам

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{i_1 j}^{i^*}, & \text{если } \exists i_1 \exists i_2 \colon ((i_1, i_2) \in G) \wedge (i \in J_{i_1}) \wedge \\ & \wedge\, (j \in J_{i_2}); \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (6)$$

где i^* — это порядковый номер фактора i в кортеже J_{i_1}.

В соответствующих столбцах j указываются векторы $w_{i_k j}$ там, где влияние фрейма i_k присутствует. Остальные элементы заполняются нулями.

Нормируем исходные коэффициенты влияния факторов:

$$A^* = \mathrm{norm}\langle A \rangle = A \cdot \begin{Vmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{k1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sum_{k=1}^{n} a_{k2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sum_{k=1}^{n} a_{kn} \end{Vmatrix}. \quad (7)$$

Таким образом, выполнится условие $\sum_{k=1}^{n} a_{kj}^* = 1$ $\forall j$ стохастической матрицы A^*.

Построим последовательность стохастических матриц, определяемых соотношением

$$A^1 = A^*,$$
$$A^h = \mathrm{norm}\langle A^{(h-1)} \cdot A^* \rangle \text{ для } h = 2, 3, \ldots \quad (8)$$

Данная процедура позволяет увидеть распространение влияния факторов по всем возможным маршрутам графа влияний, которому соответствует матрица A. Её элементы показывают только непосредственное влияние каждого фактора системы на все другие факторы. Слотами фрейма могут быть другие фреймы, это приводит к созданию иерархии влияющих друг на друга факторов. Факторы могут влиять друг на друга косвенно, через некоторые транзитные факторы. Необходимо рассмотреть все возможные маршруты влияния через транзитные факторы. Для этого построим последовательность матриц влияния: матрица A, её квадрат, куб, четвёртая степень и т.д.

Рассмотрим предел

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{h=1}^{k}\frac{A^h}{k}. \tag{9}$$

Если некая последовательность сходится к пределу, то её чезаровская сумма сходится к тому же самому пределу [6]. Может оказаться, что последовательность (8) не сходится к единственному пределу, но среднее чезаровских сумм (9) даёт единственный предел. Таким образом, возможны два варианта:

1) начиная с какого-то h матрица A^h меняется не более чем заданная малая погрешность (согласно теореме Гамильтона—Кэли), и, значит, решение найдено;

2) матрица A^h будет изменяться с заданным периодом, и тогда следует найти период и среднее между всеми вариантами A^h, попадающими в него.

3. АПРОБАЦИЯ МОДЕЛИ

Для апробации математического аппарата рассматривалась задача моделирования инновационно-активного предприятия. Выбор тех или иных стратегических или тактических действий на предприятии, безусловно, является задачей поддержки принятия решений, для которых целесообразно определить цели и критерии оценки качества принимаемых решений и использовать методы многокритериального анализа альтернатив. Однако для оценки решений следует каким-то образом научиться рассчитывать прогнозные значения критериев по результатам принимаемых управленческих воздействий. Расчёт критериев может осуществляться на базе тех или иных моделей предметных областей, в случае слабоструктурированных задач эффективным подходом к построению данных моделей, по мнению авторов, являются предлагаемые факторные модели на основе фреймов.

На рис. 1 представлена факторная модель инновационно-активного предприятия. Фреймы обозначены прямоугольниками со скруглёнными углами. Имя фрейма указано в верхней секции прямоугольника. Моделируемые факторы структурированы по слотам фреймов. Они показаны в нижней секции фреймов. Влияния фреймов друг на друга показаны чёрными стрелками (внутренняя часть стрелки закрашена чёрным).

Предприятие может работать на нескольких рынках и выпускать несколько видов продукции. Если их добавлять в модель как независимые фреймы с соответствующими слотами и отношениями влияния, то визуальное восприятие модели значительно затруднится. Все товары и все рынки обладают одинаковыми признаками, поэтому для их моделирования используется понятие обобщения, показанное стрелкой, внутренняя часть которой не закрашена чёрным. Подобная схема позволяет упростить вариации структуры модели, например, при появлении новых типов товаров и при анализе целесообразности освоения новых рынков. В рамках модели мы можем проводить анализ вида “что если”, например, что будет с прибылью, если мы выведем на рынок товар с теми или иными характеристиками.

В табл. 1 показаны рассчитанные значения элементов матрицы A для задачи выбора стратегии по выходу на один из альтернативных рынков сбыта (Рынок 1 или Рынок 2) при условии использования одного товара (Товар 1). Эти коэффициенты были получены путём применения процедуры экспертных парных сравнений и расчёта собственных значений по формулам (3) и (4). Для обозначения факторов приняты следующие сокращения: П — прибыль, Д — доходы, Р — риск, О — объём продаж, Н — новизна рынка, К — качество, Ц — цена, С — себестоимость.

Степень влияния слотов одного фрейма на один слот другого фрейма нормирована, например, для влияния на П: О + Н = 1 и К + Ц + С = 1.

В результате применения процедуры расчёта по формулам (7) и (8) была получена матрица A^2, которая с точностью до погрешности $\varepsilon = 2{,}886 \cdot 10^{-3}$ остаётся неизменной. Она показана в табл. 2. Нулевые значения в матрице A^2 говорят о том, что влияние одного фактора на соответствующий другой фактор с течением времени пропадает и распространяется на другие факторы.

Как видно из табл. 2, более целесообразен выход на рынок 1, так как это решение парето-оптимально по всем трём целевым факторам. Если бы парето-оптимальное решение не было получено, то следует ввести интегральный фактор качества функциони-

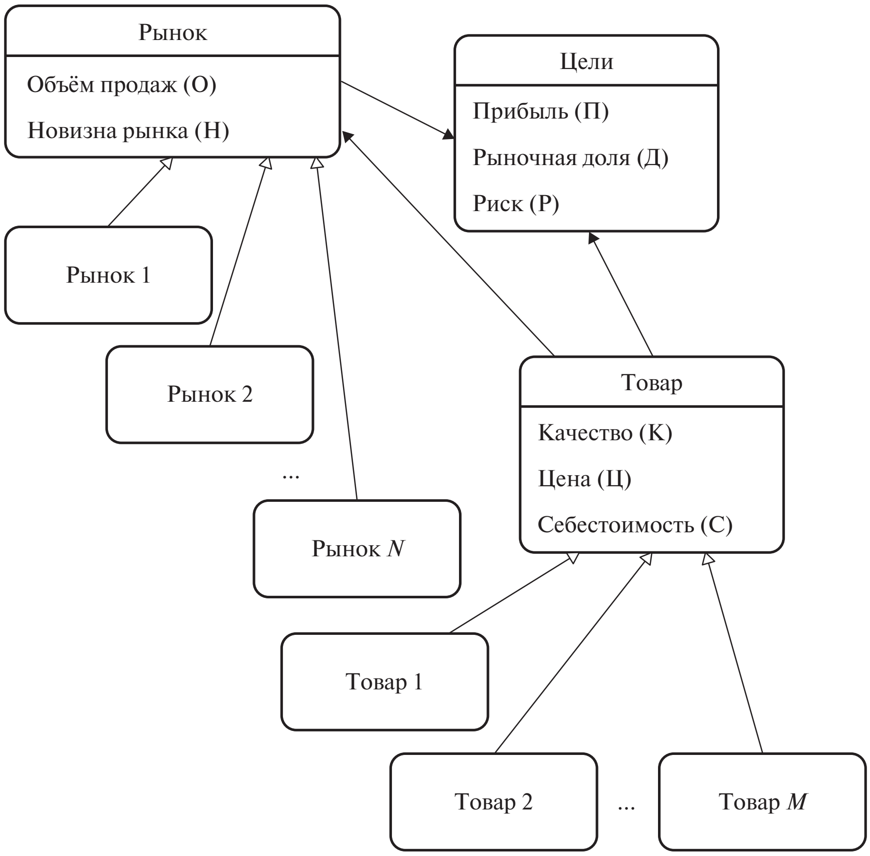

Рис. 1. Модель инновационно-активного предприятия.

Таблица 1. Исходные значения коэффициентов влияния факторов

	П	Д	Р	О	Н	Рынок 1	Рынок 2	К	Ц	С	Товар 1
П	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Д	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Р	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
О	0,83	0,5	0,13	0	0	0	0	0	0	0	0
Н	0,17	0,5	0,88	0	0	0	0	0	0	0	0
Рынок 1	0	0	0	0,7	0,7	1,0	0	0	0	0	0
Рынок 2	0	0	0	0.3	0	0	1.0	0	0	0	0
К	0,14	0,29	0,33	0,33	0,6	0	0	0	0	0	0
Ц	0,5	0,57	0,26	0,33	0,28	0	0	0	0	0	0
С	0,36	0,14	0,41	0,33	0,13	0	0	0	0	0	0
Товар 1	0	0	0	0	0	0	0	1,0	0,5	0,3	1,0

Таблица 2. Предельные значения коэффициентов влияния факторов

	П	Д	Р	О	Н	Рынок 1	Рынок 2	К	Ц	С	Товар 1
П	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Д	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Р	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
О	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Н	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Рынок 1	0,18	0,19	0,2	0,35	0,41	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Рынок 2	0,06	0,04	0,01	0,15	0,0	0,0	1,0	0,0	0,0	0,0	0,0
К	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Ц	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
С	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Товар 1	0,76	0,77	0,79	0,5	0,59	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0	1,0

рования предприятия или воспользоваться одним из методов многокритериального анализа альтернатив [7].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная модель может быть использована для решения следующих задач:

определение факторов, влияющих в наибольшей степени на эффективность системы;

прогнозирование развития сложных динамических систем с обратными связями;

оценка и выбор управленческих решений на основе анализа факторов, являющихся критериями в рассматриваемых задачах;

моделирование инновационной деятельности предприятий в условиях неполной или нечёткой информации.

Рассмотренный в работе пример в силу его невысокой размерности можно рассматривать как учебный. Однако данный подход можно успешно применить к различным факторным моделям высокой размерности в актуальных научно-технических и социально-экономических задачах, при моделировании развития экономики корпораций, макрорегионов и государств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ким Дж.-О.*, *Мьюллер Ч.У.* Факторный анализ: статистические методы и практические вопросы. В сб. “Факторный, дискриминантный и кластерный анализ”: Пер. с англ. / Под ред. И.С. Енюкова. М.: Финансы и статистика, 1989.
2. *Четверушкин Б.Н.*, *Осипов В.П.*, *Балута В.И.* Подходы к моделированию последствий принятия решений в условиях противодействия // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 43. DOI: 10.20948/prepr-2018-43.
3. *Minsky M.* A Framework for Representing Knowledge, in: Winston P.H. (ed.). The Psychology of Computer Vision. N.Y.: McGraw-Hill (U.S.A.), 1975. DOI: 10.1016/B978-1-4832-1446-7.50018-2.
4. *Седжвик Р.* Фундаментальные алгоритмы на C++. Алгоритмы на графах. СПб.: ДиаСофтЮП, 2002.
5. *Saaty T.L.* Decision Making with Dependence and Feedback: The Analytic Network Process. N.Y.: Rws Publications, 2001.
6. *Volkov I.I.* Cesàro summation methods. In: Hazewinkel, Michiel. Encyclopedia of Mathematics, Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer Academic Publishers, 2001.
7. *Осипов В.П.*, *Судаков В.А.* Комбинированный метод поддержки принятия многокритериальных решений // Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 30. 21 с.

FACTOR MODEL FOR THE STUDY OF COMPLEX PROCESSES

Academician of the RAS B. N. Chetverushkin[1], V. A. Sudakov[1,2]

[1]*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[2]*Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russian Federation*

Received April 4, 2019

The paper proposes an original concept of building a factor model based on frames. A method has been developed for calculating the values of factors by searching for the eigenvalues of matrices of pairwise comparisons of the degree of influence of slots. Possible applications of the factor model in the study of complex processes and systems are discussed.

Ключевые слова: factor model, frame, slot, eigenvector, eigenvalues.