

УДК 539.3(5):517.956.8

## МОДЕЛИРОВАНИЕ КЛЕПАНИЯ: АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛАСТИН КИРХГОФА С ТОЧЕЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ СОБОЛЕВА

С. А. Назаров

Представлено академиком РАН Н.Ф. Морозовым 04.03.2019 г.

Поступило 22.05.2019 г.

Теорема вложения Соболева устанавливает корректность постановки в изолированных точках условий Дирихле или условий сопряжения, которые имитируют контактную сварку, крепление болтами или шурупами и т.п. Рассмотрены задачи об изгибе пластины Кирхгофа с периодически расположенными точечными опорами и о соединении пластин рядами заклёпок. Проведённый асимптотический анализ предоставляет асимптотические разложения решений и оценки погрешностей, а именно одномерную модель узкой пластины и условия сопряжения на общей границе двух пластин. Результаты осреднения существенно различаются в случаях одного или нескольких рядов опор или заклёпок. В частности, однорядное клепание обеспечивает только шарнирное сцепление пластин (допускаются разрывы углов поворотов), а двурядное — почти полное сцепление, при котором в главном упругие поля оказываются непрерывными на линии сцепления.

*Ключевые слова:* осреднение пластин Кирхгофа, модели точечных опор и заклёпок, точечные условия Соболева.

**DOI:** <https://doi.org/10.31857/S0869-5652489134-39>

1. Мотивировка. В сообщении рассмотрены две задачи о пластинах Кирхгофа с условиями Соболева, имитирующими мелкие соединительные элементы — заклёпки, болты, пятна контактной сварки и т.п. Корректность постановки условий (7) в изолированных точках двумерной пластины обеспечена теоремой вложения Соболева [1], что и объясняет принятое в литературе название точечных условий. Именно, выводятся одномерная модель узкой пластины с периодическим семейством точечных опор, а также условия сопряжения на общей границе пары пластин, сцепленных периодическими шеренгами заклёпок. Постановка задач нуждается в пояснениях, так как все исследуемые объекты соотносятся с разнообразными малыми параметрами. Прежде всего исходная трёхмерная — тонкая, но длинная — пластина характеризуется малыми отношениями толщина/ширина и ширина/длина, т.е. возможен предельный переход к двумерной задаче Кирхгофа (см., например, [2, гл. 4, § 30]) в области  $\Omega^h \subset \mathbb{R}^2$ , которая после масштабирования становится узкой ( $h \ll 1$  в формуле (2)). Разумеется, при клепаном сочленении двух пластин  $\Omega_{\pm}^h$  прежний параметр  $h$  не нужен и через  $h$  обозначается относительная ширина зоны  $\Theta^h = \Omega_+^h \cap \Omega_-^h$  их перехлёста.

Тот же параметр  $h$  берётся в качестве периода расположения заклёпок. Индивидуальный размер деталей крепления много меньше  $h$ , что и позволило заменить их условиями в точках (ср. асимптотический анализ в статье [3]).

Одиночные пластины с точечными опорами во многих публикациях рассматриваются как модели вантовых мостов (см. книгу [4] и имеющуюся в ней литературу), однако их планомерный асимптотический анализ не проводился, несмотря на то, что полотно моста — классический пример тонкой длинной пластины с периодическим креплением вантами, предварительно напряжёнными стальными тросами. Результат проведённого осреднения задачи Соболева—Кирхгофа — система обыкновенных дифференциальных уравнений на оси узкой пластины — существенно зависит от расположения точек крепления. Так, если опор нет, то возникает система двух уравнений четвёртого и второго порядков, а в случае опор на одной прямой — скалярное уравнение второго порядка. Наконец при наличии нескольких рядов точек крепления предельная система становится пустой и процедура построения асимптотики изменяется по существу. Эти выводы согласуются с практическими инженерными знаниями (см. справочник [5]): в указанном первом случае полотну моста свойственны вертикальные и изгибные-вокруг-оси колебания (последние наиболее

опасны: разрушившийся мост Такома—Нэрроуз и “танцующий” волгоградский мост). Однорядное или двурядное вантовое крепление демпфирует соответственно первый или оба типа колебаний.

Простые геометрические характеристики проявляются и при склёпывании пластин. Два или несколько параллельных рядов близко расположенных заклёпок обеспечивают почти полное сцепление пластин: в главном все упругие поля оказываются непрерывными на разделительной линии  $\Upsilon$ . В то же время при расположении заклёпок в один ряд реализуется шарнирное сцепление пластин, т.е. прогиб и перерезывающая сила остаются непрерывными, однако на углы поворотов в плоскостях, перпендикулярных линии  $\Upsilon$ , ограничения не накладываются. Таким образом, деформация такого сочленения пластин посредством разнонаправленных изгибающих моментов провоцирует концентрацию напряжений вблизи единственного ряда заклёпок и может инициировать процесс разрушения. Именно поэтому в практической инженерии предпочтение обычно отдаётся двурядному клепанию (ср. справочник [6]). Впрочем, используемая здесь простейшая модель Соболева—Кирхгофа не позволяет полностью описать механизмы разрушения. Более сложные модели применяют технику самосопряжённых расширений дифференциальных операторов (см., например, работы [3, 7, 8]).

2. Модель узкой пластины. Пусть  $\Pi$  — периодическая в направлении оси ординат бесконечная пластина с ячейкой периодичности  $\mathfrak{w}$ , т.е.

$$\Pi = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2: (\xi_1, \xi_2 \pm 1) \in \Pi\},$$

$$\mathfrak{w} = \{\xi \in \Pi: |\xi_2| < 1/2\}. \quad (1)$$

Для простоты предположим, что граница  $\partial\Pi$  области  $\Pi$  гладкая. Период сведён к единице масштабированием, а декартовы координаты и геометрические параметры сделаны безразмерными. Выберем различные точки  $P^1, \dots, P^J \in \mathfrak{w}$ ,  $P^j \neq P^k$  при  $j \neq k$ . Растиражируем точки по периодичности и обозначим  $\mathcal{P}$  их бесконечное множество;  $\mathcal{P} = \emptyset$  в случае  $J = 0$ .

Пусть  $N$  — большое натуральное число и  $h = 1/N$  — малый параметр, а  $\Omega^h$  — узкая периодическая пластина (рис. 1а):

$$\Omega^h = \{x = (x_1, x_2): \xi := h^{-1}x \in \Pi, |x_2| < 1\}, \quad (2)$$

$$\mathcal{P}^h = \{x \in \Omega^h: \xi \in \mathcal{P}\}, \quad \Omega^h = \Omega^h \setminus \mathcal{P}^h. \quad (3)$$

При этом  $\gamma_{\pm}^h = \{x \in \partial\Omega^h: x_2 = \pm 1\}$  — торцы пластины (2), а  $\Gamma^h = \{x \in \partial\Omega^h: |x_2| < 1\}$  — её боковая граница.

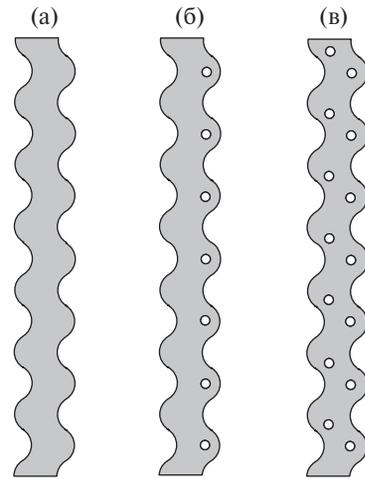


Рис. 1. Узкая периодическая пластина (а) с одним (б) или двумя (в) рядами точечных опор.

В проколотой пластине (см. формулу (3) и рис. 1б, 1в) рассмотрим уравнение Кирхгофа

$$\Delta_x^2 u^h(x) = f^h(x), \quad x \in \Omega^h, \quad (4)$$

со смешанными краевыми условиями

$$u^h(x) = 0, \quad \partial_n u^h(x) = 0, \quad x \in \gamma_{\pm}^h, \quad (5)$$

$$N_q^h(x, \nabla_x) u^h(x) = 0, \quad x \in \Gamma^h, \quad q = 2, 3, \quad (6)$$

и условиями Соболева

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \mathcal{P}^h. \quad (7)$$

Здесь  $f^h$  — поперечная сила, отнесённая к цилиндрической жёсткости  $D^h$  пластины, а  $u^h$  — её прогиб (см. [2, гл. 4, § 30]). Краевые условия (6) означают, что граница  $\Gamma^h$  свободна от внешних воздействий, и включают дифференциальные операторы (см. [9; 2, гл. 4, § 30])

$$N_2^h = \Delta_x - (1 - \nu)(\partial_s^2 + \kappa^h \partial_n),$$

$$N_3^h = \partial_n \Delta_x - (1 - \nu)(\partial_s \kappa^h \partial_s - \partial_s^2 \partial_n), \quad (8)$$

в которых  $\kappa^h$  — кривизна,  $\Delta_x$  — оператор Лапласа,  $\partial_s = \frac{\partial}{\partial s}$ ,  $s$  — длина дуги на  $\Gamma^h$ , а  $\partial_n = \frac{\partial}{\partial n}$  — производная вдоль внешней нормали. Кроме того, условия (5) жёсткого защемления торцов включают производные  $\partial_n = \pm \frac{\partial}{\partial x_2}$ . Наконец  $\nu \in [0, 1/2)$  — коэффициент Пуассона материала пластины, отсутствующий в уравнении (4), но фигурирующий в функционале упругой энергии [2, гл. 4, § 30]

$$E(u^h, u^h; \Omega^h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^h} (D(\nabla_x) u^h(x))^T AD(\nabla_x) u^h(x) dx, \quad (9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$D(\nabla_x) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \sqrt{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^\top,$$

здесь  $\top$  — знак транспонирования, т.е.  $D(\nabla_x)$  — столбец.

Процедура осреднения периодических задач состоит в последовательном решении задач на ячейке периодичности с условиями периодичности на её основаниях  $\tau_\pm^h = \{\xi = \partial\mathfrak{w}: \xi_2 = \pm 1/2\}$ . Условия Соболева наследуются этой задачей, и далее придётся различать три ситуации:

1°) в  $\mathcal{P}$  имеются две точки  $P^1 = (P_1^1, P_2^1)$  и  $P^2 = (P_1^2, P_2^2)$ , для которых  $P_1^1 \neq P_1^2$  (рис. 1в);

2°)  $P^j = (0, P_2^j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, J$  (рис. 1б), т.е. все опоры расположены на вертикальной прямой;

3°)  $\mathcal{P} = \emptyset$  (рис. 1а), т.е. опор нет.

В ситуации 3°) асимптотический анзац для решения задачи (4)–(6) выглядит так:

$$u^h(x) = U^0(y) + hU^1(y, \xi) + h^2U^2(y, \xi) + \tilde{u}^h(x). \quad (11)$$

Здесь  $y = x_2$  и  $\xi = h^{-1}x$  — медленная и быстрые переменные,

$$U^0(y) = w_1(y), \quad U^1(y, \xi) = \xi_1 w_2(y), \quad (12)$$

$$U^2(y, \xi) = \frac{1}{2} \mathcal{X}_1(\xi) \partial_y^2 w_1(y) + \mathcal{X}_2(\xi) \partial_y w_2(y), \quad (13)$$

а  $\mathcal{X}_j$  — периодические по переменной  $\xi_2$  решения задач на ячейке периодичности

$$\Delta_\xi^2 \mathcal{X}_j(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathfrak{w}, \quad (14)$$

$$N_q^1(\xi, \nabla_\xi) \mathcal{X}_j(\xi) = -N_q^1(\xi, \nabla_\xi) (\xi_2 \xi_j), \\ \xi \in \partial\mathfrak{w} \setminus (\tau_+ \cup \tau_-), \quad q = 2, 3.$$

Вектор-функция  $w = (w_1, w_2)^\top$  находится как решение задачи Дирихле для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathcal{L}(\partial_y)w(y) := D(-\partial_y)^\top \mathcal{A}D(y)w(y) = g(y), \quad (15) \\ y \in (-1, 1),$$

$$w_1(\pm 1) = 0, \quad \partial_y w_1(\pm 1) = 0, \quad w_2(\pm 1) = 0, \quad (16)$$

в которой  $D(\partial_y) = \text{diag}\{\partial_y^2, \partial_y\}$  — диагональная оператор-матрица, а числовая, симметричная и положительно определённая матрица  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{jk})_{j,k=1}^2$  находится по формуле

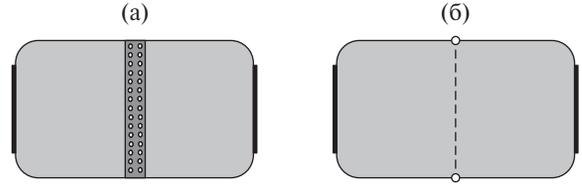


Рис. 2. Перехлестывающиеся пластины, соединённые двумя рядами заклёпок (а), и сцепленные предельные пластины (б).

$$\mathcal{A} = \int_{\mathfrak{w}} (D(\nabla_\xi) \mathcal{Y}(\xi))^\top \mathcal{A}D(\nabla_\xi) \mathcal{Y}(\xi) d\xi, \\ \mathcal{Y}(\xi) = \left( \frac{1}{2} (\xi_2^2 + \mathcal{X}_1(\xi)), \xi_1, \xi_2 + \mathcal{X}_2(\xi) \right). \quad (17)$$

Вектор  $g = (g_1, g_2)^\top$  правых частей системы (15) определён равенствами

$$g_1(y) = f^1(y) \int_{\mathfrak{w}} d\xi = f^1(y) \text{mes}_2(\mathfrak{w}), \\ g_2(y) = \int_{\mathfrak{w}} \xi_1 f^0(y, \xi) d\xi \quad (18)$$

по членам представления правой части уравнения (4)

$$f^h(x) = h^{-1} f^0(y, \xi) + f^1(y) + \tilde{f}^h(x), \\ \int_{\mathfrak{w}} f^0(y, \xi) d\xi = 0, \quad y \in [-1, 1]. \quad (19)$$

Наконец  $\tilde{f}^h$  в (19) и  $\tilde{u}^h$  в (11) — малые остатки.

Согласно соотношениям (11) и (12) величины  $w_1(y)$  и  $w_2(y)$  — осреднённые прогиб пластины и поворот вокруг её оси  $\{x: x_1 = 0\}$ .

В ситуации 2°) анзац (11) укорачивается, так как прогиб  $w_1(y)$  равен нулю из-за наличия опор  $\mathcal{P}^h$ , расположенных на оси и допускающих поворот вокруг неё. Функция  $w_2$  — решение скалярной задачи

$$-\mathcal{A}_{22} \partial_y^2 w_2(y) = g_2(y), \quad y \in (-1, 1), \quad w_2(\pm 1) = 0, \quad (20)$$

где  $g_2$  — функция из (18), а  $\mathcal{A}_{22} > 0$  — нижний правый элемент симметричной и положительно определённой матрицы  $\mathcal{A}$  из (17). Отметим, что благодаря множителю  $\xi_1$  второй член (12) анзаца (11) удовлетворяет условиям Соболева

$$U(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathfrak{P}, \quad (21)$$

функция  $\mathcal{X}_2$  — периодическое решение задачи (14),  $j = 2$ , дополненной условиями (21), а слагаемое  $f^1(y)$  можно присоединить к остатку  $\tilde{f}^h$  в представлении (19), из которого к тому же исключается последнее условие ортогональности.

Наконец в ситуации 1°) задача на ячейке  $\mathfrak{w}$  с условиями периодичности и условиями Соболева (21) становится однозначно разрешимой, т.е. предельная задача вида (15) или (20) отсутствует. Обе функции

$w_1$  и  $w_2$ , а также члены (12), (13) нулевые, и анзац (11) принимает вид

$$u^h(x) = h^3 U^3(y, \xi) + \tilde{u}^h(x),$$

где  $U^3$  — периодическое решение задачи на ячейке  $\mathbb{T}$  с условиями (21) и правой частью  $f^0(y, \xi)$ , периодической по переменной  $\xi_2$  и взятой из представления (19) (слагаемое  $f^1$  и условия ортогональности опять не нужны).

Вблизи защемлённых торцов пластины (2) возникает явление пограничного слоя, который конструируется, например, при помощи приёмов из [10, гл. 14].

3. Склёпанные пластины. Пусть область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ограничена простым гладким замкнутым контуром  $\Gamma = \partial\Omega$ , а пластины (рис. 2а)

$$\Omega_{\pm}^h = \{x \in \Omega: \pm x_1 > \mp hl_{\mp}\}, \quad l := l_+ + l_- > 0, \quad (22)$$

налегают одна на другую вдоль полосы  $\Theta^h = \{x \in \Omega: -hl_- < x_1 < hl_+\}$  малой ширины  $hl$  и соединены рядами заклёпок, которые моделируются условиями сопряжения Соболева

$$u_+^h(x) = u_-^h(x), \quad x \in \mathcal{P}^h \subset \Theta^h. \quad (23)$$

Прогибы  $u_{\pm}^h$  пластин (22) удовлетворяют уравнениям Кирхгофа

$$\Delta_x^2 u_{\pm}^h(x) = f_{\pm}^h(x), \quad x \in \Omega_{\pm}^h, \quad (24)$$

и аналогичным (5) и (6) краевым условиям

$$u_{\pm}^h(x) = 0, \quad \partial_n u_{\pm}^h(x) = 0, \quad x \in \gamma_{\pm}, \quad (25)$$

$$N_q^1(x, \nabla_x) u_{\pm}^h(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega_{\pm}^h \setminus \overline{\gamma_{\pm}}, \quad q = 2, 3. \quad (26)$$

Пластины жёстко защемлены вдоль дуг  $\gamma_{\pm} \subset \Gamma_{\pm} = \{x \in \Gamma: \pm x_1 > 0\}$  (отмечены жирными линиями на рис. 2а), а на прямых краях  $\Upsilon_{\pm}^h = \{x \in \Omega: x_1 = \mp hl_{\mp}\}$ , свободных от внешних воздействий, операторы (8) принимают вид

$$N_{2\pm}^1(\nabla_x) = \Delta_x - (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$N_{3\pm}^1(\nabla_x) = \mp \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \Delta_x + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right). \quad (27)$$

Осреднение краевых задач в областях с быстроосциллирующими границами обычно производится при помощи построения пограничного слоя, требование затухания которого приводит к условиям сопряжения на линии  $\Upsilon = \{x \in \Omega: x_1 = 0\}$  предельных пластин (штрихпунктирная линия на рис. 2б). Именно в обеих ситуациях 1°) и 2°) задачи

$$\Delta_x^2 u_{\pm}^0(x) = f_{\pm}^0(x), \quad x \in \Omega_{\pm}^0,$$

$$u_{\pm}^0(x) = 0, \quad \partial_n u_{\pm}^0(x) = 0, \quad x \in \gamma_{\pm}, \quad (28)$$

$$N_q^1(x, \nabla_x) u_{\pm}^0(x) = 0, \quad x \in \Gamma_{\pm} \setminus \gamma_{\pm}, \quad q = 2, 3,$$

дополняются условиями непрерывности

$$u_+^0(x) = u_-^0(x),$$

$$N_{3+}^1(\nabla_x) u_+^0(x) = -N_{3-}^1(\nabla_x) u_-^0(x), \quad x \in \Upsilon. \quad (29)$$

При многорядном клепании (ситуация 1°)) ещё одна пара условий

$$\frac{\partial u_+^0}{\partial x_1}(x) = \frac{\partial u_-^0}{\partial x_1}(x), \quad (30)$$

$$N_{2+}^1(\nabla_x) u_+^0(x) = N_{2-}^1(\nabla_x) u_-^0(x), \quad x \in \Upsilon,$$

вместе с (29) делает все упругие поля непрерывными на  $\Upsilon$ , т.е. соотношения (28)–(30) образуют задачу Кирхгофа для цельной пластины. Иными словами, в главном происходит полное сцепление пластин.

Если выполнено предположение 2°) (один ряд заклёпок), то вместо условий (30) возникают два краевых условия

$$N_{2\pm}^1(\nabla_x) u_{\pm}^0(x) = 0, \quad x \in \Upsilon, \quad (31)$$

которые аннулируют на линии  $\Upsilon$  изгибающие моменты. При этом никакие ограничения на углы поворотов  $\frac{\partial u_{\pm}^0}{\partial x_1}$  на этой линии не накладываются. Таким образом, задача (28), (29), (31) описывает шарнирное соединение пластин  $\Omega_{\pm}^0$ .

4. Полиномиальное свойство функционала энергии. Ввиду простого неравенства

$$2E(u^h, u^h; \Omega^h) \geq (1-\nu) \|\nabla_x^2 u^h; L^2(\Omega^h)\|^2, \quad (32)$$

где  $\nabla_x^2 u^h$  — совокупность вторых производных функции  $u^h$  и  $L^2(\Omega^h)$  — пространство Лебега, функционал энергии (9) вырождается только на пространстве линейных функций

$$\mathcal{L}(\phi) = \{L(x) = a_0 + a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 \mid a_q \in \mathbb{R}\}. \quad (33)$$

Это свойство называется полиномиальным [11] и позволяет сделать полезные выводы о рассматриваемых задачах при помощи несложных алгебраических вычислений.

1) *Тонкие области.* Согласно общей процедуре из статей [11, 12] в пространстве (33) нужно найти базис  $\{\Phi^{m,k}\}$ , удовлетворяющий соотношениям

$$\frac{\partial \Phi^{m,k}}{\partial \xi_2}(\xi) = \Phi^{m,k-1}(\xi), \quad k = 0, 1, \dots, t_m; \quad (34)$$

$$m = 1, 2, \dots, d;$$

здесь  $\Phi^{mj} = 0$  при  $j < 0$ . В нашем случае такой базис очевиден:

$$\Phi^{1,0}(\xi) = 1, \quad \Phi^{1,1}(\xi) = \xi_2, \quad \Phi^{2,0}(\xi) = \xi_1, \quad (35)$$

$$d = 2, \quad t_1 = 2, \quad t_2 = 1. \quad (36)$$

Благодаря результатам [11, § 4; 12] формулы (35) и (36) означают, что асимптотический анзац (11) для решения задачи (4)–(6) в ситуации 3° начинается со слагаемых (12), где элементы  $\Phi^{j,0}(\xi)$  базиса (35) умножены на неизвестные функции  $w_j(y)$ , которые удовлетворяют системе (15) с эллиптической  $(d \times d)$ -матрицей  $\mathcal{L}(\partial_y)$  дифференциальных операторов  $\mathcal{L}_{kj}(\partial_y)$  порядков  $t_j + t_k$ .

В ситуации 2° одномерное пространство  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  линейных функций, удовлетворяющих условиям Соболева (21), натянута на моном  $\xi_1$ , т.е.  $\Phi^{1,0}(\xi) = \xi_1$  и  $d = t_1 = 1$ . В итоге согласно [11, § 4; 12] предельная задача (20) включает скалярное ( $d = 1$ ) уравнение порядка  $2 = t_1 + t_1$ . Наконец в ситуации 1°) пространство  $\mathcal{L}(\mathcal{P})$  тривиально, т.е.  $d = 0$  и предельная задача на отрезке  $(-1, 1) \ni y$  пустая.

2) *Пограничный слой.* Поведение решения  $\{u_+^h, u_-^h\}$  задачи (23)–(26) около зоны склёпывания описывается при помощи решений  $\{U_+, U_-\}$  уравнений

$$\Delta_{\xi}^2 U_{\pm}(\xi) = F_{\pm}(\xi), \quad \xi \in \Xi_{\pm}^{\pm}, \quad (37)$$

поставленных в проколотых (без точек из  $\mathcal{P}$ ) полуполосах  $\Xi_{\pm}^{\pm} = \{\xi = (\xi_1, \xi_2): \pm \xi_1 > -l_{\mp}, \xi_2 \in (0, 1)\}$  и снабжённых краевыми условиями

$$N_{q_{\pm}}^1(\nabla_{\xi})U_{\pm}(\xi) = 0, \quad \xi_1 = \mp l_{\mp}, \quad \xi_2 \in (0, 1), \quad q = 2, 3, \quad (38)$$

условиями периодичности

$$\frac{\partial^p U_{\pm}}{\partial \xi_2^p}(\xi_1, 1) = \frac{\partial^p U_{\pm}}{\partial \xi_2^p}(\xi_1, 0), \quad \pm \xi_1 > -l_{\mp}, \quad (39)$$

$$p = 0, 1, 2, 3,$$

и условиями сопряжения Соболева

$$U_+(\xi) = U_-(\xi), \quad \xi \in \mathcal{P} \subset \Xi^+ \cap \Xi^-. \quad (40)$$

Полиномиальное свойство функционала энергии (9) позволяет перечислить (см. обзор [11, § 3]) все энергетические решения однородной ( $F_{\pm} = 0$ ) задачи (37)–(40), т.е. пары  $\{L_+, L_-\}$  линейных функций:

$$\{a_0 + a_1 \xi_1, a_0 + a_1 \xi_1\} \text{ в ситуации } 1^{\circ}, \quad (41)$$

$$\{a_0 + a^+ \xi_1, a_0 + a^- \xi_1\} \text{ в ситуации } 2^{\circ}. \quad (42)$$

Тот факт, что в формуле (41) имеются два ( $K = 2$ ) свободных коэффициента  $a_0$  и  $a_1$ , приводит к необходимости постановки двух ( $= 4 - K$ ) первых условий сопряжения в списках (29) и (30), а три ( $K = 3$ ) свободных коэффициента  $a_0$  и  $a_1^{\pm}$  в (42) дают лишь одно

( $= 4 - K$ ) условие сопряжения, указанного первым в (29). При этом четвёрка — количество линейных функций  $L_{\pm}$  в  $\Xi_{\pm}^{\pm}$ , удовлетворяющих условиям (38) и (39). Наконец условия разрешимости задачи (37)–(40) в энергетическом классе, т.е. равенств

$$\sum_{\pm} \int_{\Xi_{\pm}^{\pm}} F_{\pm}(\xi) L_{\pm}(\xi) d\xi = 0$$

с функциями  $L_{\pm}$  из формулы (41) или (42), порождают остальные условия сопряжения из списков (29), (30) или (29), (31) в количестве  $K$  штук.

3) *Гладкость решений и оценки погрешностей.* Если в ситуации 1°) решение  $u^0 = (u_+^0, u_-^0)$  предельной задачи (28)–(30) с правой частью  $f^0 \in L^2(\Omega)$  попадает в пространство Соболева  $H^4(\Omega)$ , а значит, называется по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемым в области  $\Omega$  вплоть до границы  $\partial\Omega$ , то в ситуации 2°) решение предельной задачи (28), (29), (31) может приобрести сингулярности в концах разделительного отрезка  $\Upsilon$ . Опять полиномиальное свойство функционала (9) позволяет уточнить дифференциальные свойства решения  $u_{\pm}^0 \in H^2(\Omega_{\pm}^0)$ . Именно в силу результатов [11, § 2; 13] найдётся такой положительный показатель  $\epsilon > 0$ , при котором

$$|\nabla_x^2 u_{\pm}^0(x)| \leq cr(x)^{\epsilon-1}, \quad (43)$$

где  $r(x)$  — расстояние от точки  $x$  до ближайшего из концов отрезка  $\Upsilon$ . Сингулярности вторых производных, разрешённые формулой (43), определяют порядок погрешностей, возникающих при переходе от задачи (23)–(26) к предельной задаче (28), (29), (31), — их решения подчинены неравенству

$$\sum_{\pm} \|u_{\pm}^h - u_{\pm}^0; H^2(\Omega_{\pm}^0)\| \leq ch^{\min\{\epsilon, 1/2\}}. \quad (44)$$

В ситуации 1°) показатель степени малого параметра в оценке (44), связывающей решения задач (23)–(26) и (28)–(30), становится равным  $1/2$ .

**Источник финансирования.** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 17–11–01003).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
2. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.
3. Buttazzo G., Cardone G., Nazarov S.A. Thin Elastic Plates Supported over Small Areas. II: Variational-Asymptotic Models // J. Convex Analysis. 2017. V. 24. № 3. P. 819–855.

4. *Gazzola A.* Mathematical Models for Suspension Bridges. Nonlinear Structural Instability, Modeling, Simulation and Applications. V. 15. B.: Springer-Verlag, 2015.
5. *Петропавловский А.А.* Вантовые мосты. М.: Транспорт, 1985.
6. *Анурьев В.И.* Справочник конструктора-машиностроителя. В 3 т. / Под ред. И.Н. Жестковой. 8-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 2001.
7. *Капешина Ю.Е., Павлов Б.С.* Взаимодействия нулевого радиуса для бигармонического и полигармонического уравнений // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 1. С. 49–59.
8. *Назаров С.А.* Асимптотические условия в точках, самосопряженные расширения операторов и метод сращиваемых асимптотических разложений // Тр. СПб. матем. об-ва. 1996. Т. 5. С. 112–183.
9. *Бирман М.Ш.* О вариационном методе Треффца для уравнения  $\Delta^2 u = f$  // ДАН. 1955. Т. 10. № 2. С. 201–204.
10. *Mazja W.G., Nasarow S.A., Plamenewski B.A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. Т. 1, 2. B.: Akademie-Verlag, 1991.
11. *Назаров С.А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Усп. матем. наук. 1999. Т. 54. № 5. С. 77–142.
12. *Назаров С.А.* Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7. № 5. С. 1–92.
13. *Назаров С.А., Пламеневский Б.А.* Задача Неймана для самосопряженных эллиптических систем в области с кусочно гладкой границей // Тр. Ленингр. матем. об-ва. 1990. Т. 1. С. 174–211.

## MODELS OF RIVETING: ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE KIRCHHOFF PLATES WITH SOBOLEV POINT CONDITIONS

S. A. Nazarov

*Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS N.F. Morozov March 4, 2019

Received May 22, 2019

The Sobolev embedding theorem implies the correct setting at isolated points of the Dirichlet condition or the transmission conditions which simulate contact welding, binding by bolts or screws and so on. We consider the problems on bending the Kirchhoff plate with periodically distributed point supports and the joint of two plates by rows of rivets. Asymptotic analyzes performed provide asymptotic expansions of solutions and error estimates, namely, the one-dimensional model of a narrow plate and the transmission conditions at the common edge of two plates. The results of homogenization differ seriously in the cases of one or several rows of supports and rivets. In particular, one-row riveting provides only hinge joint of the plates (jumps of the rotation angles are allowed) but two-row riveting provides almost complete clutch which all elastic fields become in main continuous at the common edge.

*Keywords:* homogenization of Kirchhoff plates, models of point supports and rivets, point Sobolev conditions.