

УДК 519.63

КОМБИНИРОВАННАЯ СХЕМА РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЁРКИНА, СОХРАНЯЮЩАЯ ПОВЫШЕННУЮ ТОЧНОСТЬ В ОБЛАСТЯХ ВЛИЯНИЯ УДАРНЫХ ВОЛН

М. Е. Ладонкина^{1,2}, О. А. Неклюдова^{1,2}, В. В. Остапенко^{2,3,*},
член-корреспондент РАН В. Ф. Тишкин^{1,2}

Поступило 27.05.2019 г.

Предложена комбинированная схема разрывного метода Галёркина, которая монотонно локализует фронты ударных волн и одновременно сохраняет повышенную точность в областях гладкости рассчитываемых обобщённых решений. В этой схеме в качестве базисного используется немонотонный вариант DG-метода (Discontinuous Galerkin method) третьего порядка, а в качестве внутреннего — монотонный вариант данного метода, в котором применяется нелинейная коррекция численных потоков. Приведены тестовые расчёты, демонстрирующие преимущества новой схемы по сравнению со стандартными монотонизированными вариантами DG-метода.

Ключевые слова: разрывный метод Галёркина, комбинированная схема, ударная волна, интегральная и локальная точность.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524892119-124>

1. В работах [1, 2] был предложен метод построения комбинированных схем сквозного счёта, которые монотонно локализируют фронты ударных волн и одновременно сохраняют повышенную точность в областях гладкости рассчитываемых обобщённых решений. В комбинированной схеме применяется базисная немонотонная схема, которая имеет повышенный порядок сходимости в областях влияния ударных волн. По базисной схеме разностное решение строится во всей расчётной области. В окрестностях больших градиентов, где это решение имеет нефизические осцилляции, оно корректируется путём численного решения внутренних начально-краевых задач по одной из NFC (Nonlinear Flux Correction) схем, к которым относятся MUSCL-схемы [3], TVD-схемы [4], WENO-схемы [5], DG-схемы [6], CABARET-схемы [7]. В [1] в качестве базисной использовалась симметричная компактная схема [8] третьего порядка слабой аппроксимации, а в [2] — RBM (Rusanov-Burstein-Mirin) схема [9, 10] третьего порядка классической аппроксимации; в качестве внутренней NFC-схемы применялась схема

CABARET [7] второго порядка точности на гладких решениях. Основной недостаток комбинированных схем, построенных в [1, 2], заключается в том, что соответствующие им базисная и внутренняя схемы имеют существенно различный тип, что приводит к определённым сложностям при реализации численного алгоритма на границе внутренней расчётной области. Поэтому в настоящей работе предлагается новая комбинированная схема, лишённая данного недостатка. В этой схеме в качестве базисного алгоритма используется немонотонный вариант DG-метода третьего порядка [6], а в качестве внутреннего алгоритма — NFC-вариант того же метода.

2. Рассмотрим квазилинейную гиперболическую систему законов сохранения

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{f}(\mathbf{u})_x = 0, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(x, t)$ — искомая, а $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ — заданная гладкие вектор-функции.

Поставим для системы (1) задачу Коши с гладкими периодическими начальными данными:

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{v}(x) \equiv \mathbf{v}(x + X). \quad (2)$$

Предположим, что задача (1), (2) при $t > 0$ имеет единственное ограниченное обобщённое решение $\mathbf{u}(x, t)$, которое на отрезке длины периода X содержит одну ударную волну, возникающую в результате градиентной катастрофы.

Аппроксимируем задачу Коши (1), (2) разрывным методом Галёркина на равномерной простран-

¹Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша
Российской Академии наук, Москва

²Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева
Сибирского отделения Российской Академии наук,
Новосибирск

³Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет

*E-mail: ostapenko_vv@ngs.ru

ственной сетке $x_i = ih$, где $h = X/N$ — постоянный шаг сетки, N — количество ячеек сетки на отрезке длины периода. Численное решение будем искать в виде кусочно-полиномиальной функции, составленной из полиномов степени не выше p относительно переменной x в каждой пространственной ячейке $[x_i, x_{i+1}] \in [0, X]$:

$$\mathbf{U}_i(x, t) = \sum_{j=0}^p \mathbf{U}_{ij}(t) \varphi_{ij}(x), \quad (3)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$\varphi_{ij}(x) = \left(\frac{x - x_{i+1/2}}{h} \right)^j, \quad x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

суть скалярные базисные функции, а $\mathbf{U}_{ij}(t)$ — искомые вектор-функции.

Функции $\mathbf{U}_{ij}(t)$ находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{U}_i \varphi_{ik} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) \varphi'_{ik} dx + \mathbf{F}_{i+1} \varphi_{ik}(x_{i+1}) - \mathbf{F}_i \varphi_{ik}(x_i) = 0, \quad (4)$$

в которой $\mathbf{F}_i(t)$ — численные потоки, определяемые по формулам Русанова—Лакса—Фридрихса

$$\mathbf{F}_i(t) = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{U}_{i-1}(x_i, t)) + \mathbf{f}(\mathbf{U}_i(x_i, t))}{2} - a(\mathbf{U}_{i-1}(x_i, t), \mathbf{U}_i(x_i, t)) \frac{(\mathbf{U}_i(x_i, t) - \mathbf{U}_{i-1}(x_i, t))}{2},$$

где

$$a(\mathbf{U}_{i-1}(x_i, t), \mathbf{U}_i(x_i, t)) = \max_m (|\lambda_m(\mathbf{U}_{i-1}(x_i, t))|, |\lambda_m(\mathbf{U}_i(x_i, t))|),$$

λ_m — собственные значения матрицы Якоби \mathbf{f}_u системы (1).

Поскольку с учётом формулы (3)

$$\frac{d}{dt} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{U}_i \varphi_{ik} dx = \sum_{j=0}^p a_{kj}^i \frac{d\mathbf{U}_{ij}}{dt}, \quad a_{kj}^i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_{ik} \varphi_{ij} dx,$$

где матрицы $A_i = (a_{kj}^i)$ являются невырожденными, то систему уравнений (4) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{U}_{ij}}{dt} = \sum_{k=0}^p b_{jk}^i \mathbf{Y}_{ik}, \quad (5)$$

$$j = 0, 1, \dots, p, \quad i = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$\mathbf{Y}_{ik} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{f}(\mathbf{U}_i) \varphi'_{ik} dx - \mathbf{F}_{i+1} \varphi_{ik}(x_{i+1}) + \mathbf{F}_i \varphi_{ik}(x_i),$$

$B_i = (b_{jk}^i)$ — матрица, обратная к A_i .

3. Система уравнений (5) представляет собой дифференциально-проекционную схему разрывного метода Галёркина (дифференциальную по временной переменной t и проекционную по пространственной переменной x). В настоящей работе изучается метод третьего порядка, для которого $p = 1$ и полиномы (3) на каждом n -м временном слое являются линейными по x функциями:

$$\mathbf{U}_i^n(x) = \mathbf{U}_{i0}^n + \mathbf{U}_{i1}^n \frac{x - x_{i+1/2}}{h}, \quad \mathbf{U}_{ij}^n = \mathbf{U}_{ij}(t_n). \quad (6)$$

Численное интегрирование по времени проводится при помощи метода Рунге—Кутты третьего порядка на равномерной разностной сетке $t_n = n\tau$, где $n \geq 0$, в которой постоянный шаг по времени выбирается из условия устойчивости

$$\tau = \frac{rh}{\max_{m,i,n} |\lambda_m(\mathbf{U}_{i+1/2}^n)|}, \quad \mathbf{U}_{i+1/2}^n = \mathbf{U}_i(x_{i+1/2}, t_n),$$

где $r \in (0, 1)$ — число Куранта. Для данного разрывного метода Галёркина будем использовать сокращённое обозначение DG1.

Поскольку DG1-метод имеет третий порядок на гладких решениях и не принадлежит классу NFC-схем, то получаемое на его основе численное решение содержит заметные нефизические осцилляции, возникающие при расчёте ударных волн. Для подавления этих осцилляций используется ограничитель Кокбурна [6], применение которого приводит к тому, что каждая компонента U_{il}^n векторного решения \mathbf{U}_{il}^n , входящего в формулу (6), заменяется на величину

$$V_{il}^n = M(U_{il}^n, \alpha(U_{i+1,0}^n - U_{i0}^n), \alpha(U_{i0}^n - U_{i-1,0}^n)), \quad (7)$$

где $\alpha \in [1, 2]$ — эвристический параметр, выбираемый в результате тестовых расчётов; U_{l0}^n — соответствующие компоненты векторов \mathbf{U}_{l0}^n при $l = i-1, i, i+1$; M — оператор minmod, действие которого определяется по формуле

$$M(u_1, u_2, u_3) = s \min(|u_1|, |u_2|, |u_3|), \quad (8)$$

где $s = \text{sign}(u_i)$ при условии, что все числа u_i , входящие в (8), имеют одинаковый знак и $s = 0$, если это условие не выполнено. Для DG1-методов, коррекция которых по формуле (7) происходит при пара-

метрах $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$, будем использовать обозначения DG1A1 и DG1A2.

Увеличение параметра α , входящего в оператор коррекции (7), приводит к ослаблению сглаживающих свойств этого оператора. Тестовые расчёты, в частности, показывают, что метод DG1A1 полностью подавляет численные осцилляции, возникающие на фронте ударной волны в DG1-методе, в то время как метод DG1A2 подавляет эти осцилляции лишь частично. Целью настоящей работы является сравнительный анализ точности методов DG1, DG1A1 и DG1A2 при расчёте ударных волн, а также построение на основе этого анализа и подходов, развитых в [1, 2], комбинированной схемы разрывного метода Галёркина, которая монотонно локализует фронты ударных волн и одновременно сохраняет повышенную точность в областях гладкости рассчитываемых обобщённых решений.

4. В качестве конкретной гиперболической системы выберем систему уравнений первого приближения теории мелкой воды, дивергентная форма записи которой в случае прямоугольного горизонтального русла без учёта донного трения имеет вид (1), где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} H \\ q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} q \\ q^2/H + gH^2/2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Здесь $H(x, t)$ и $q(x, t)$ — глубина и расход жидкости, g — ускорение свободного падения. Рассмотрим для системы (1), (9) задачу Коши (2) с начальными данными

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right), \\ H(x, 0) &= \frac{1}{4g} \left(a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + b \right)^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $v = q/H$ — скорость жидкости (такая задача рассматривалась в работах [1, 2]). Начальным условиям (10) соответствуют следующие начальные значения инвариантов $w_1 = v - 2c$ и $w_2 = v + 2c$:

$$\begin{aligned} w_1(x, 0) &= -b, \\ w_2(x, 0) &= 2v(x, 0) + b = 2a \sin\left(\frac{2\pi x}{X} + \frac{\pi}{4}\right) + b, \end{aligned}$$

где $c = \sqrt{gH}$, $a = 2$, $b = 10$ и $X = 10$.

Точное решение этой задачи моделируется численным расчётом по монотонному методу DG1A1 на мелкой сетке с пространственным шагом $h = 0,0005$. Профили глубины, получаемые в этом расчёте в моменты времени $T = 1$ и $T = 2,5$, изобра-

жены сплошной линией на рис. 1 (на отрезке длины периода) и на рис. 2 (в окрестности фронта ударной волны). Кружками на рис. 1 и 2 показаны результаты расчёта глубины на сетке с пространственным шагом $h = 0,05$, получаемые по модифицированной схеме, описание которой приводится ниже. На рис. 2 результаты аналогичных расчётов по методу DG1 показаны квадратиками, по методу DG1A1 — крестиками и по методу DG1A2 — треугольниками. На рис. 2 видны осцилляции, возникающие в немонотонном DG1-методе в окрестности фронта ударной волны, которые сглаживаются в методе DG1A2 и полностью подавляются в методе DG1A1.

На рис. 1 приведены порядки интегральной сходимости ρ_j разностных решений на отрезках $[x_j, X]$, определяемые по методу, предложенному в [11], а на рис. 3 и 4 изображены графики сеточных функций $(r_i)_j = \lg|\delta w_i(x_j)|$, где $\delta w_i(x_j)$ — относительные локальные дисбалансы вычисления модулей инвариантов w_1 и w_2 , получаемые по методу, изложенному в [12]. Величины ρ_j и $(r_i)_j$ рассчитывались на базисной сетке с пространственным шагом $h = 0,005$ и приведены на рис. 1 для каждого 30-го простран-

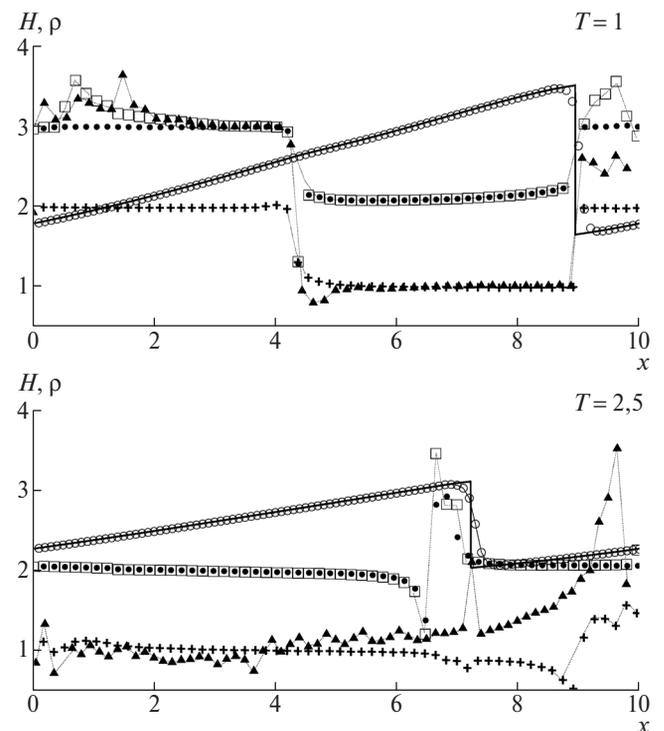


Рис. 1. Глубина жидкости, получаемая по комбинированной схеме (○), и интегральные порядки сходимости, получаемые по комбинированной схеме (●), по методу DG1 (□), по методу DG1A1 (+) и по методу DG1A2 (▲). Сплошная линия — точное решение, которое моделируется расчётом по методу DG1A1 на мелкой сетке.

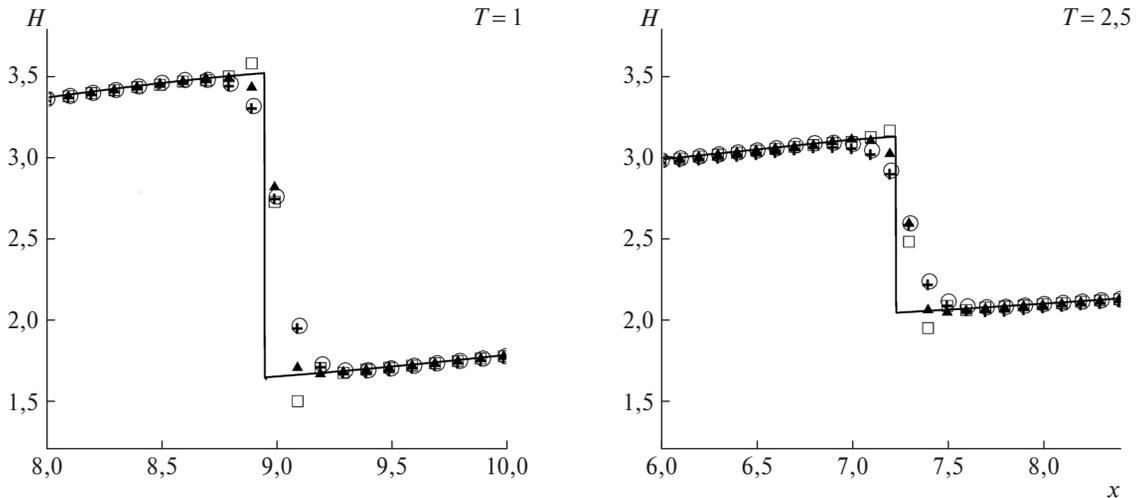


Рис. 2. Глубина жидкости в окрестности фронта ударной волны, получаемая по комбинированной схеме (○), по методу DG1 (□), по методу DG1A1 (+) и по методу DG1A2 (▲). Сплошная линия — точное решение, которое моделируется расчётом по методу DG1A1 на мелкой сетке.

ственного узла $j = 30i$ разностной сетки, а на рис. 3 и 4 — для каждого 35-го узла $j = 35i$. Результаты этих расчётов показаны точками для комбинированной схемы, квадратиками для метода DG1, крестиками для метода DG1A1 и треугольниками для метода DG1A2. Во всех расчётах число Куранта $r = 0,5$.

5. Из рис. 1 следует, что немонотонный DG1-метод, несмотря на заметные осцилляции на фронте ударной волны (рис. 2), обеспечивает второй порядок интегральной сходимости на отрезках $[x_j, X]$, левая граница которых расположена внутри области влияния ударной волны (в момент времени $T = 1$ эта область находится внутри отрезка $[4, 9]$, а в момент времени $T = 2,5$ заполняет всю расчётную область). Методы DG1A1 и DG1A2, полученные путём монотонизации DG1-метода, по-

добно конечно-разностным NFC-схемам снижают скорость этой сходимости до первого порядка, что приводит к заметному снижению их точности (по сравнению с DG1-методом) при вычислении инвариантов в области влияния ударной волны (рис. 3 и 4).

Из рис. 1 видно, что при $T = 1$ методы DG1 и DG1A2, в отличие от метода DG1A1, имеют третий порядок интегральной сходимости на интервалах $[x_j, X]$, левая граница которых лежит вне области влияния ударной волны; метод DG1A1 имеет на этих интервалах второй порядок интегральной сходимости. Объясняется это тем, что DG1-метод обеспечивает третий порядок локальной аппроксимации на гладких решениях и коррекция потоков в методе DG1A2 этот порядок сохраняет, в то время как более

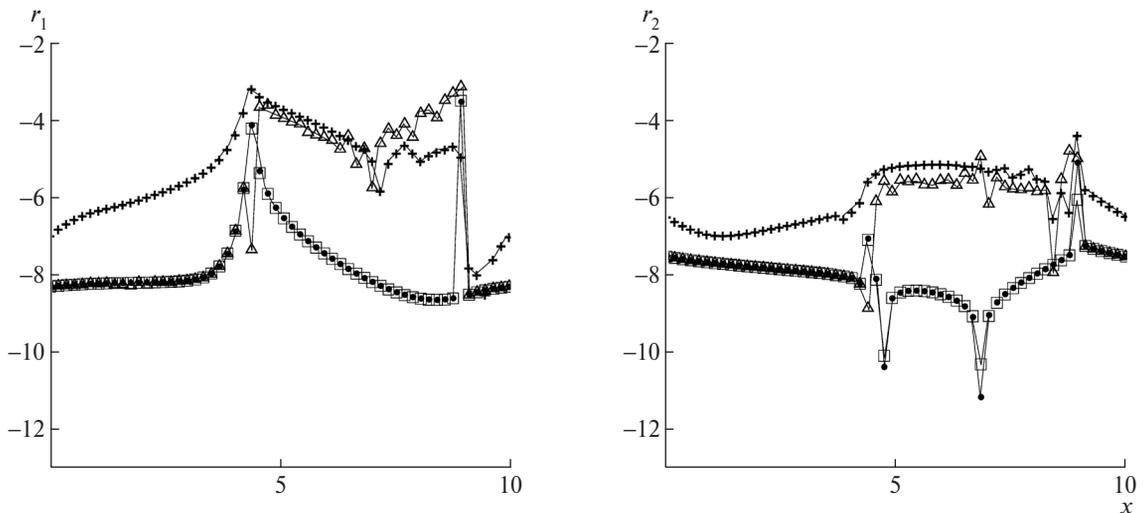


Рис. 3. Графики сеточных функций (r_j), получаемые в момент времени $T = 1$ по комбинированной схеме (●), по методу DG1 (□), по методу DG1A1 (+) и по методу DG1A2 (▲).

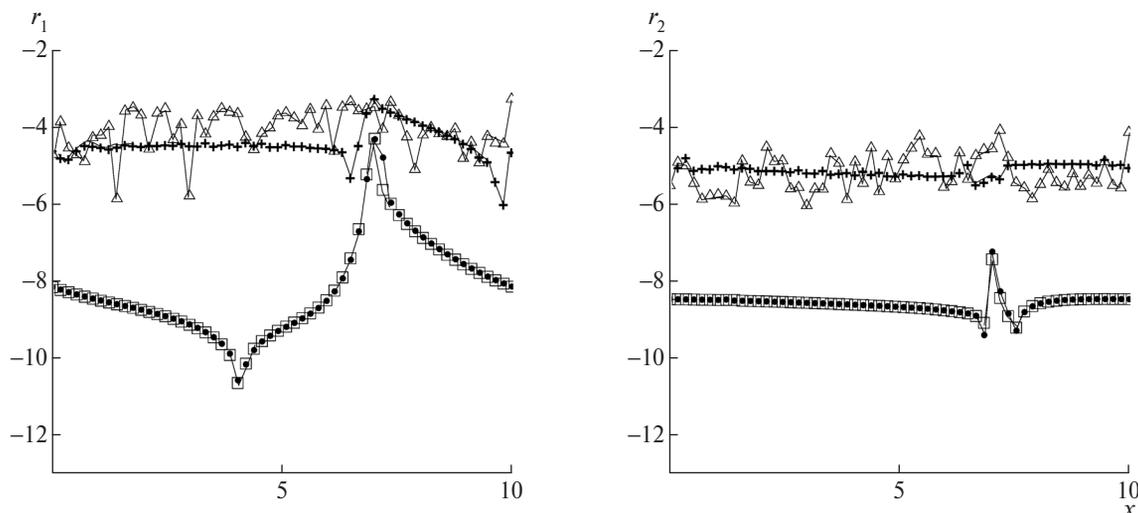


Рис. 4. Графики сеточных функций (r_i), получаемые в момент времени $T=2,5$ по комбинированной схеме (\bullet), по методу DG1 (\square), по методу DG1A1 ($+$) и по методу DG1A2 (\blacktriangle).

сильная коррекция потоков в методе DG1A1 снижает точность этой аппроксимации до второго порядка. В результате вне области влияния ударной волны инварианты вычисляются по методу DG1A1 с существенно более низкой точностью, чем по методам DG1 и DG1A2 (рис. 3).

Проведённый анализ точности методов DG1 и DG1A1 позволяет использовать их для построения комбинированной схемы разрывного метода Галёркина, которая одновременно монотонно локализует фронты ударных волн и сохраняет повышенную точность в областях их влияния. Для построения такой комбинированной схемы используем технику, развитую в [1, 2]. При этом в качестве базисной схемы, применяемой во всей расчётной области, возьмём DG1-метод, сохраняющий повышенную точность в области влияния ударной волн, а в качестве внутренней схемы, используемой в некоторой сеточной окрестности фронта ударной волны, выберем метод DG1A1, который этот фронт монотонно локализует. В результате получаемая комбинированная DG-схема сочетает в себе достоинства обоих методов и в то же время свободна от присущих им недостатков, что иллюстрируется результатами расчёта по этой схеме профиля ударной волны (кружки на рис. 1 и 2), порядками её интегральной сходимости (точки на рис. 1 и 2) и точностью вычисления по ней инвариантов аппроксимируемого решения (точки на рис. 3 и 4).

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 16–11–10033).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковыркина О.А., Остапенко В.В. О построении комбинированных разностных схем повышенной точности // ДАН. 2018. Т. 478. № 5. С. 517–522.
2. Зюзина Н.А., Ковыркина О.А., Остапенко В.В. Монотонная разностная схема, сохраняющая повышенную точность в областях влияния ударных волн // ДАН. 2018. Т. 482. № 6. С. 639–643.
3. Van Leer B. Toward the Ultimate Conservative Difference Scheme. V. A Second-Order Sequel to Godunov's Method // J. Comput. Phys. 1979. V. 32. № 1. P. 101–136.
4. Harten A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws // J. Comput. Phys. 1983. V. 49. P. 357–393.
5. Jiang G.S., Shu C.W. Efficient Implementation of Weighted ENO Schemes // J. Comput. Phys. 1996. V. 126. P. 202–228.
6. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection — Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Non-linear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics. 1998. V. 1697. P. 151–268.
7. Karabasov S.A., Goloviznin V.M. Compact Accurately Boundary-Adjusting High-Resolution Technique for Fluid Dynamics // J. Comput. Phys. 2009. V. 228. P. 7426–7451.
8. Остапенко В.В. О построении разностных схем повышенной точности для сквозного расчета нестационарных ударных волн // ЖВМиМФ. 2000. Т. 40. № 12. С. 1857–1874.
9. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // ДАН СССР. 1968. Т. 180. № 6. С. 1303–1305.

10. *Burstein S.Z., Mirin A.A.* Third Order Difference Methods for Hyperbolic Equations // *J. Comp. Phys.* 1970. V. 5. P. 547–571.
11. *Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Остапенко В.В., Тишкин В.Ф.* О точности разрывного метода Галеркина при расчете ударных волн // *ЖВМиМФ.* 2018. Т. 58. № 8. С. 148–156.
12. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О сходимости разностных схем сквозного счета // *ДАН.* 2010. Т. 433. № 5. С. 599–603.

COMBINED DG SCHEME THAT MAINTAINS INCREASED ACCURACY IN AREAS OF SHOCK WAVES

**М. Е. Ladonkina^{1,2}, О. А. Nekliudova^{1,2}, V. V. Ostapenko^{2,3},
Corresponding Member of the RAS V. F. Tishkin^{1,2}**

¹*Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of the Sciences,
Moscow, Russian Federation*

²*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
Novosibirsk, Russian Federation*

³*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

Received May 27, 2019

A combined scheme of the discontinuous Galerkin method is proposed. This scheme monotonously localizes the fronts of shock waves and simultaneously maintains increased accuracy in the regions of smoothness of the calculated solutions. In this scheme, a non-monotonic version of the third-order DG method is used as the baseline and a monotonic version of this method is used as the internal one, in which a nonlinear correction of numerical flows is used. Tests demonstrating the advantages of the new scheme compared to the standard monotonized variants of the DG method are provided.

Keywords: discontinuous Galerkin method, combined scheme, shock wave, integral and local convergence.