ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, *2019*, *том 489*, *№ 2*, *с. 125–130*

МАТЕМАТИКА

УДК 517.954

ПОЛНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА–КИПРИЯНОВА. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

Л. Н. Ляхов[1,2,*], М. Г. Лапшина[2,], С. А. Рощупкин[3,***]**

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 15.05.2019 г.

Поступило 17.05.2019 г.

Чётное преобразование Радона—Киприянова (K_γ-преобразование) приспособлено для исследования задач с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\gamma_i > 0$. В этой работе вводятся нечётное преобразование Радона—Киприянова и полное преобразование Радона—Киприянова для исследования более общих уравнений, содержащих нечётные B-производные $\frac{\partial}{\partial x_i} B^k_{\gamma_i}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (в частности, градиенты функций). Приведены формулы K_γ-преобразования сингулярных дифференциальных операторов. На основе преобразований Бесселя, введённых Б.М. Левитаном, и "нечётного" преобразования Бесселя, введённого И.А. Киприяновым и В.В. Катраховым, получена связь полного преобразования Радона—Киприянова с преобразованием Фурье и смешанным преобразованием Фурье—Левитана—Киприянова—Катрахова. Приведены аналог теоремы Хелгасона о носителе и аналог теоремы Пэли—Винера.

Ключевые слова: оператор Пуассона (чётного и нечётного вида), сингулярный дифференциальный оператор Бесселя, j-функции Бесселя, интегральные преобразования Бесселя (Левитана и Киприянова—Катрахова), Фурье, Радона, Радона—Киприянова.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524892125-130

ВВЕДЕНИЕ

Классическое преобразование Радона — это интеграл по плоскости $p = \langle x, \xi\rangle = \sum_i x_i\xi_i$ от функции f (см., например, [1, с. 16]). Введённое в [2, 3] преобразование Радона—Киприянова K_γ (сокращённо K_γ-преобразование) — это интеграл по плоскости, "подправленной" оператором Пуассона [4] размерности γ. При этом K_γ-преобразование совпадает с преобразованием Радона функции f, но только в случае, когда эта функция является радиальной или частично радиальной по m переменным её аргумента, а $\gamma = m - 1$. Отметим, что оператор Пуассона появился в определении K_γ преобразования в [2] без связи со сферическими координатами точки. Эта связь выяснилась позднее. И подчеркнём одну особенность K_γ-преобразования. Если дробная часть $\{\gamma\}$ числа γ не равна нулю и $m - 1 < \gamma < m$, то при $\{\gamma\} \to 0$ K_γ-преобразование стремится к преобразованию Радона функции, радиальной по m переменным, а при $\{\gamma\} \to 1$ — к преобразованию Радона радиальной функции по $m + 1$ переменной (некоторые подробности см. в работе [5]). Таким образом, преобразование Радона—Киприянова может трактоваться как преобразование Радона функции от сферически симметричного дробно-мерного аргумента. И тогда интересно, что будет исследовать томограф с компьютерной основой на базе преобразования Радона—Киприянова?

Через $\mathbb{R}_N$ будем обозначать евклидово пространство точек $x = (x', x'')$, $x' = (x_1, \ldots, x_n)$, $x'' = (x_n+1, \ldots, x_N)$, $n \le N$. Пусть

$$D^{\alpha'}_{B_\gamma} = D^{\alpha_1}_{B_{\gamma_1}} \ldots D^{\alpha_n}_{B_{\gamma_n}}, \quad D^{\alpha''}_{x''} = D^{\alpha_{n+1}}_{x_{n+1}} \ldots D^{\alpha_N}_{x_N},$$

$$D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad D^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}} = \begin{cases} B^{\alpha_i}_{\gamma_i}, \ \alpha_i = 2k, \\ D_{x_i} B^k_{\gamma_i}, \ \alpha_i = 2k + 1. \end{cases}$$

Сингулярный дифференциальный оператор $D^{\alpha_i}_{B_{\gamma_i}}$ условимся называть D_B-производной порядка α_i, а оператор $D_{x_i} B^k_{\gamma_i}$ — D_B-оператором Бесселя нечётного порядка $2k + 1$.

Чётный оператор Пуассона $P^\gamma_{ev,x'}$ размерности γ, действующий по каждой координате вектора x', имеет вид

[1] *Воронежский государственный университет*

[2] *Липецкий государственный педагогический университет им. П.П. Семенова-Тян-Шанского*

[3] *Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, Елец Липецкой обл.*

*E-mail: levnlya@mail.ru

**E-mail: marina.lapsh@yandex.ru

***E-mail: roshupkinsa@mail.ru

$$\mathcal{P}^{\gamma}_{ev,x'} f(x', x'') = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times$$
$$\times \int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi} f(x_1 \cos\alpha_1, \ldots, x_n \cos\alpha_n, x'') \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i d\alpha_1 \ldots d\alpha_n. \qquad (1)$$

Заметим, что этот интегральный оператор в одномерном случае изучен как “оператор преобразования” (вместе с оператором Сонина в качестве обратного) в работе [4].

Функция от скалярного произведения называется плоской волной (см. [6]), а выражение $\mathcal{P}^{\gamma}_{ev,x'} f(\langle x, \xi\rangle)$ — весовой плоской волной (описание можно найти в книге [7, с. 123]). Идея использования подобных конструкций плоских волн для работы с дифференциальными уравнениями, содержащими сингулярный дифференциальный оператор Бесселя B_{γ_i}, принадлежит И.А. Киприянову (60—70-е годы прошлого века). Такие конструкции определены как действие оператора Пуассона на “плоскую волну”:

$$\varphi(x, \xi) = \mathcal{P}^{\gamma}_{x'} f(\langle x, \xi\rangle), \quad \langle x, \xi\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i \xi_i.$$

Здесь роль функции f может выполнять и распределение (регулярное или сингулярное).

Скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве обозначим символом $\langle x, \xi\rangle$, и пусть $p - \langle x, \xi\rangle = 0$ — уравнение плоскости в $\mathbb{R}_N$ с нормальным вектором ξ, $|\xi| = 1$, проходящей на расстоянии $|p|$ от начала координат. Через $\delta(p - \langle x, \xi\rangle)$ обозначим δ-функцию, сосредоточенную на $(N-1)$-мерной плоскости $p - \langle x, \xi\rangle = 0$.

Чётное преобразование Радона—Киприянова введено в [2] и определено формулой

$$\mathcal{K}_{\gamma,ev}[f](\xi; p) = \int_{\mathbb{R}_n} f(x) \mathcal{P}^{\nu}_{x'} \delta(p - \langle x, \xi\rangle)(x')^{\gamma} dx,$$
$$(x')^{\gamma} = \prod_{i=1}^{n} |x_i|^{\gamma_i}. \qquad (2)$$

Свойства этого преобразования приведены в работах [2, 3]. Одно из этих свойств заключается в следующем: для однородного линейного дифференциального многочлена первого порядка от операторов Бесселя разной, вообще говоря, размерности $\gamma_i > 0$ имеет место равенство

$$\mathcal{K}_{\gamma,ev}[L_{\gamma}(B_{\gamma})f](\xi, p) = \mathcal{K}_{\gamma,ev}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i B_{\gamma_i} f\right](\xi, p) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \xi_i^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} \mathcal{K}_{\gamma,ev}[f](\xi, p). \qquad (3)$$

В этой работе вводятся нечётное преобразование Радона—Киприянова $\mathcal{K}_{\gamma,od}$ и полное преобразование Радона—Киприянова $\mathbf{K}_{\gamma}$, позволившие написать аналог формулы (3) для D_B-операторов Бесселя и, в частности, для операторов, содержащих кроме сингулярных дифференциальных операторов Бесселя по переменным x' и градиенты функций. Используемые в этой работе подходы и методы исследований заложены при построении алгебры сингулярных псевдодифференциальных операторов Киприянова в работах [8, 9].

1. НЕЧЁТНЫЙ ОПЕРАТОР ПУАССОНА И ПОЛНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА—КИПРИЯНОВА

Особенность действия чётного оператора Пуассона (1) заключается в том, что он уничтожает нечётные функции: если $f = f_{ev} + f_{od}$, то $\mathcal{P}^{\gamma}_{x} f = \mathcal{P}^{\gamma}_{x} f_{ev}$. В частности,

$$\mathcal{P}^{\gamma}_{ev,x'} \langle x, \xi\rangle = \sum_{i=n+1}^{N} x_i \xi_i = \langle x'', \xi''\rangle.$$

Поэтому далее мы предполагаем, что скалярное произведение N-мерных векторов определено в n-полупространстве, а рассматриваемые функции допускают чётное продолжение по тем переменным, по которым действует чётный оператор Пуассона. Это приводит к следующему определению чётности функций (см. [7, с. 21]): функция $f = f(x', x'')$, определённая в n-полупространстве

$$\mathbb{R}^+_N = \mathbb{R}^+_N \times \mathbb{R}_{N-n},$$
$$x' \in \mathbb{R}^+_n = \{x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\},$$
$$x'' \in \mathbb{R}_{N-n}, \quad n < N,$$

называется x'-чётной по Киприянову в $\mathbb{R}^+_N$, если возможно её чётное продолжение на $\mathbb{R}_N$ с сохранением класса принадлежности функции f. Для классов дифференцируемых функций это требование заключается в равенстве $f^{(l)}_{x_i}(0, x^i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, для всех (существующих) производных нечётного порядка $l = 2k + 1$ (используем обозначение $x = (x_i, x^i)$, $x^i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x^n)$).

Одномерные операторы Пуассона изучались в [4].

Так как

$$P^{\gamma}_{ev,x_1} f(-x_1, x') = P^{\gamma}_{ev,x_1} f(x_1, x'),$$

то конструкция интегральных преобразований, использующих чётные пуассоновские операторы, приспособлена лишь для работы с x'-чётными функциями.

Нечётный оператор Пуассона определим выражением

$$\mathcal{P}^{\gamma}_{od,x'} f(x', x'') = \prod_{i=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \times$$
$$\times \int_0^{\pi} \ldots \int_0^{\pi} f(x_1 \cos\alpha_1, \ldots, x_n \cos\alpha_n) \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \sin^{\gamma_i - 1}\alpha_i d\alpha_i.$$

Нетрудно убедиться, что оператор $\mathcal{P}^{\gamma}_{od,x'}$ любую функцию переводит в нечётную:

$$\mathcal{P}^{\nu}_{od,x_1} f(-x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\mathcal{P}^{\nu}_{od,x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

и уничтожает чётные составляющие функции: если $f = f_{ev} + f_{od}$, то $\mathcal{P}^{\nu}_{od,x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathcal{P}^{\nu}_{od,x_1} f_{od}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Чётными и нечётными j-функциями Бесселя будем называть соответственно следующие цилиндрические функции

$$j_{\nu,ev}(x) = \frac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{x^{\nu}} J_{\nu}(x),$$
$$j_{\nu,od}(x) = -\frac{x}{\gamma+1} j_{\frac{\gamma+1}{2}}(x), \quad \nu = \frac{\gamma-1}{2}. \tag{4}$$

Первую из этих функций обычно называют j-функцией Бесселя (термин введён Б.М. Левитаном, общепринятое обозначение для неё j_{ν} или $j_{\frac{\gamma-1}{2}}$, если важно подчеркнуть связь с оператором B_{γ}). Справедливы формулы

$$j_{\nu,ev}(x) = \mathcal{P}^{\gamma}_{ev,x'} e^{ix},$$
$$j_{\nu,od} = -\frac{x}{\gamma+1} j_{\frac{\gamma+1}{2}}(x) = i\mathcal{P}^{\gamma}_{od,x} e^{ix}, \tag{5}$$

представляющие собой аналоги интеграла Пуассона функций Бесселя первого рода J_{ν}.

Оператор Пуассона полного вида определим как сумму чётного и нечётного операторов Пуассона:

$$\Pi^{\gamma}_{x_1} f(x', x'') = [\mathcal{P}^{\gamma}_{x'} + \mathcal{P}^{\gamma}_{od,x_1}] f(x_1, x'').$$

При этом обобщением равенств (5) служит равенство

$$\Pi^{\gamma}_{x'} e^{-i\langle x,\xi\rangle} = \left[\prod_{i=1}^{n} j_{\nu,ev}(x_i\xi_i) + ij_{\nu,od}(x_i\xi_i)\right] e^{-i\langle x'',\xi''\rangle},$$

представляющее собой связь ядра преобразования Фурье с ядром смешанного преобразования Фурье—Бесселя (под преобразованием Бесселя здесь понимаются преобразования Левитана с ядром $j_{\nu,ev}$ и Киприянова—Катрахова с ядром $j_{\nu,od}$).

Соответствующее x'-нечётное и полное преобразование Радона—Киприянова — это следующие интегральные преобразования:

$$\mathcal{K}_{\gamma,od}[f](\xi; p) = \int_{\mathbb{R}^+_n} f(x)\mathcal{P}^{\gamma}_{od,x'} \delta(p - \langle x, \xi\rangle)(x')^{\gamma} dx, \tag{6}$$

$$\mathbf{K}_{\gamma}[f](\xi; p) = \int_{\mathbb{R}_n} f(x)\Pi^{\gamma}_{x'} \delta(p - \langle x, \xi\rangle)(x'^2)^{2\gamma/2} dx =$$
$$= (\mathcal{K}_{\gamma,ev} + \mathcal{K}_{\gamma,od})[f](\xi; p). \tag{7}$$

Пусть $n = 1$. Для функции f, чётной по x_1, преобразование (7) примет вид (2), а для нечётной — (6).

Интегральное преобразование $\mathbf{K}_{\gamma}$ будем рассматривать на классе функций, определённых в области $\mathbb{R}^+_N$, бесконечно дифференцируемых, x'-чётных и быстро убывающих в следующем смысле:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+_N} |(x')^{\beta'}(x'')^{\beta''} D^{\alpha'}_{B_{\gamma}} D^{\alpha''}_{x''} f(x', x'')| < \infty,$$
$$\forall\alpha = (\alpha', \alpha''), \ \beta = (\beta', \beta''), \tag{8}$$

где α и β — целочисленные мультииндексы, $D^{\alpha'}_{B_{\gamma}} = D^{\alpha_1}_{B_{\gamma_1}} \ldots D^{\alpha_n}_{B_{\gamma_n}}$, B_{γ_i} — оператор Бесселя, $D^{\alpha''}_{x''} = D^{\alpha_{n+1}}_{x_{n+1}} \ldots D^{\alpha_N}_{x_N}$, $D_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$. Класс x'-чётных функций не является инвариантным относительно D_B-производных Бесселя. Для функций, удовлетворяющих условию (8), введём обозначение $S_{ev+} = S_{ev+}(\mathbb{R}^+_N)$.

2. СВЯЗЬ $\mathbf{K}_{\gamma}$-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ И СО СМЕШАННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ФУРЬЕ—ЛЕВИТАНА—КИПРИЯНОВА—КАТРАХОВА

Преобразование Бесселя, введённое Б.М. Левитаном в [4], имеет вид

$$\mathbf{F}_B[f](\xi) = \mathcal{F}_{B,ev}[f](\xi) = \int_0^{\infty} j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x\xi) f(x) x^{\gamma} dx,$$

и j-функция Бесселя $j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x) = j_{\nu,ev}(x)$ удовлетворяет сингулярному уравнению Бесселя при $\nu = \frac{\gamma-1}{2}$, где фиксированное положительное число γ — размерность оператора Бесселя.

Для исследования дифференциальных операций, включающих первую производную, И.А. Киприяновым и В.В. Катраховым в [8] введено “нечётное” преобразование Бесселя

$$\mathcal{F}_{B,od}[f](\xi) = \int\limits_0^\infty \frac{x\xi}{\gamma+1} j_{\frac{\gamma+1}{2}}(x\xi) f(x) x^\gamma dx,$$

ядром которого является нечётная j-функция $j_{\nu,od}$ Бесселя в (5). Рассматриваемое в этой работе многомерное смешанное преобразование Фурье—Левитана—Киприянова—Катрахова определено в [9] выражением

$$\mathbf{F}_B[f](\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}_N} \prod_{i=1}^n \left[j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i\xi_i) - \frac{ix_i\xi_i}{\gamma_i+1} j_{\frac{\gamma_i+1}{2}}(x_i\xi_i) \right] \times \\ \times e^{-i\langle x'', \xi''\rangle} f(x)(x'^2)^{\gamma/2} dx.$$

x'-Чётная составляющая этого преобразования $\mathcal{F}_{B,ev}$ (т.е. смешанное преобразование Фурье—Левитана) имеет общепринятое обозначение F_B (см. [7, с. 27]).

В данных исследованиях получены следующие формулы связи $\mathbf{K}_\gamma$-преобразования (7) с преобразованием Фурье и $\mathbf{F}_B$-преобразованием.

Теорема 1. *Пусть $f \in S_{ev+}$. Тогда*

$$\mathbf{K}_\gamma[f](\Theta; p) = \int\limits_{-\infty}^\infty e^{-ip|\xi|} \mathbf{F}_B[f](|\xi|\Theta) dp,$$

$$\mathbf{F}_B[f](|\xi|\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^\infty e^{ip|\xi|} \mathbf{K}_\gamma[f](\Theta; p) d\rho.$$

При $n = N = 1$ преобразование Радона—Киприянова применимо к функции одного переменного. В этом случае, используя процедуру вращения $x \to \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$ и полагая $z_1 = p$, можем записать

$$\mathcal{F}_{B,ev}[f](\xi) = 2C(\gamma) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} dp \times \\ \times \int\limits_0^\infty f(\sqrt{p^2 + z_2^2}\,) z_2^{\gamma-1} dz_2 = \\ = 2C(\gamma) F_{p\to\xi}[R_{\gamma,ev}[f](p)](\xi),$$

где $C(\gamma)$ — константа, нормирующая действие оператора Пуассона (чётного, нечётного), а внутренний интеграл по полуоси $0 < z_2 < \infty$ от чётной по z_2 функции представляет собой специальное чётное преобразование Радона в двухмерном евклидовом полупространстве:

$$R_{\gamma,ev}[f](p) = \int\limits_0^\infty f(\sqrt{p^2 + z_2^2}) z_2^{\gamma-1} dz_2.$$

Если чётная функция f принадлежит классу основных функций S_{ev+}, то

$$R_{\gamma,ev}[f](p) = \frac{2C(\gamma)}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\langle p,\xi\rangle} F_B[f](p) dp = \\ = C(\gamma) F^{-1}_{\xi\to p}[F_{B,x\to\xi}[f](p)).$$

Аналогично для x_1-нечётной функции f справедлива формула

$$\mathbf{F}_B[f](\xi) = -2i\mathcal{F}_{B,od}[f](\xi) = \\ = -2\int\limits_0^\infty (\mathcal{P}^\gamma_{x,od} e^{-ix\xi}) f(x) x^\gamma dx = 2C(\gamma) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} dp \times \\ \times \int\limits_0^\infty f(\sqrt{p^2 + z_2^2}) \frac{p}{\sqrt{p^2 + z_2^2}} z_2^{\gamma-1} dz_2 dp = \\ = 2C(\gamma) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ip\xi} [R_{\gamma,od}[f]](p) dp = \\ = 2C(\gamma) F_{p\to\xi}[R_{\gamma,od}[f](p)](\xi),$$

где интеграл по прямой $0 < z_2 < \infty$ (от нечётной по p функции) представляет собой специальное нечётное преобразование Радона в двухмерном евклидовом полупространстве

$$R_{\gamma,od}[f](p) = \int\limits_0^\infty f(\sqrt{p^2 + z_2^2}) \frac{p}{\sqrt{p^2 + z_2^2}} z_2^{\gamma-1} dz_2.$$

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ D_B-ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ

В случае $n = 1$ справедливо равенство

$$K_{\gamma,ev}[f'_{x_1}](\Theta; p) = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}_N} f(x) \Theta_1 \left(\frac{\partial}{\partial p} \mathcal{P}^\gamma_{x_1} \delta(p - \langle x, \xi\rangle) \right) (x_1^2)^{\gamma/2} dx = \\ = 2\Theta_1 \frac{\partial}{\partial p} K_{\gamma,ev}[f](\Theta; p).$$

Отсюда вытекает формула

$$\mathbf{K}_\gamma[\langle a, \triangledown\rangle f](\xi, p) = \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial \mathbf{K}_\gamma[f](xi, p)}{\partial p},$$

где $a = (a_1, \ldots, a_N)$ — произвольный числовой вектор (ср. [1, с. 21, свойство в)]).

В общем случае справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть*

$$L^m(D_{B_{\gamma,x'}}, D_{x''}) = \sum_{|\alpha'|=m} A_{\alpha'} D^{\alpha'}_{B_\gamma} + \sum_{|\alpha''|=m} A_\alpha D^{\alpha''}_{x''},$$

$$D^{\alpha}_{B_{\gamma_i}} = \begin{cases} B^k_{\gamma_i}, \ \alpha = 2k, \\ D_{x_i} B^k_{\gamma_i}, \ \alpha = 2k+1, \end{cases}$$

есть линейный однородный сингулярный дифференциальный оператор порядка m с постоянными коэффициентами и $f \in S_{ev,od}$. *Имеет место формула*

$$\mathbf{K}_\gamma[L^m(D_B)f](\Theta; p) = 2^n L^m(\Theta) \frac{d^m}{dp^m} K_{\gamma,ev}[f](\Theta; p).$$

В частности, для действия оператора Лапласа—Бесселя $\Delta_B = (B_\gamma)_{x'} + \Delta_{x''}$, учитывая равенство $|\Theta| = 1$, получим

$$\mathbf{K}_\gamma[\Delta_B f](\Theta; p) = 2^n \frac{d^2}{dp^2} K_{\gamma,ev}[f](\Theta; p).$$

4. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА

$\mathbf{K}_\gamma$-Преобразование функций $f \in S_{en,od}$ обладает следующими свойствами:

1) свойство однородности

$$K_\gamma[f](\lambda\xi, \lambda p) = |\lambda|^{-1} K_\gamma[f](\xi, p);$$

2) функция $K_\gamma[f](\xi, p)$ бесконечно дифференцируема по ξ и по p при $\xi \neq 0$;

3) при $|p| \to \infty$ для любого $k > 0$ справедлива равномерная по ξ оценка $|K_\gamma[f](\xi, p)| = O(|p|^{-k})$, когда ξ пробегает ограниченную замкнутую область, не содержащую точки $\xi = 0$;

4) для любого $k > 0$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[f](\xi; p) p^k dp$ является однородным многочленом по ξ порядка k.

Имеют место следующие теоремы типа теорем Хелгасона (о носителе) и Пэли—Винера.

Теорема 3. *Пусть числа* $\gamma_i > 0$, *а функция* $f \in C(\mathbb{R}^+_N)$ *и для любого целого* $k > 0$ *функция* $|x|^k f(x)$ *ограничена и существует такая постоянная* $A > 0$, *что* $K_\gamma[f](\xi; p) = 0, \forall p > A$. *Тогда* $f(x) = 0, \forall |x| > A$.

Теорема 4. *Всякая функция, удовлетворяющая условиям* 1)—4), *является преобразованием Радона—Киприянова* $\mathbf{K}_\gamma$ *функции* $f(x) \in S_{ev,od}$.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность академику РАН Е.И. Моисееву за внимание к этим исследованиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: ГИФМЛ, 1962. 656 с.
2. *Киприянов И.А., Ляхов Л.Н.* О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона // ДАН. 1998. Т. 360. № 2. С. 157–160.
3. *Ляхов Л.Н.* Преобразование Киприянова—Радона // Тр. МИАН. 2005. Т. 248. С. 144–152.
4. *Левитан Б.М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // УМН. 1951. Т. 6. В. 2 (42). С. 102–143.
5. *Ляхов Л.Н.* Преобразование Радона—Киприянова сферических средних значений функции // Мат. заметки. 2015. Т. 100. № 1. С. 117–131.
6. *Йон Ф.* Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М.: Мир, 1958. 156 с.
7. *Киприянов И.А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука, 1997. 200 с.
8. *Киприянов И.А., Катрахов В.В.* Об одном классе одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Мат. сб. 1977. Т. 104. № 1. С. 49–68.
9. *Катрахов В.В., Ляхов Л.Н.* Полное преобразование Фурье—Бесселя и алгебра сингулярных псевдодифференциальных операторов // Дифф. уравнения. 2012. Т. 47. № 5. С. 681–695.
10. *Киприянов И.А., Кононенко В.И.* О фундаментальных решениях некоторых сингулярных уравнений в частных производных // Дифф. уравнения. 1969. Т. V. № 8. С. 1471–1483.

COMPLETE TRANSFORMATION OF RADON—KIPRIYANOV. SOME PROPERTIES

L. N. Lyakhov[1,2], M. G. Lapshina[2], S. A. Roshchupkin[3]

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
[2] *Lipetsk State Pedagogical University named after P.P. Semenov-Tyan-Shan, Lipetsk, Russian Federation*
[3] *Bunin Yelets State University, Yelets, Lipetsk Region, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.I. Moiseev May 15, 2019

Received May 17, 2019

The even Radon—Kipriyanov transform (K_γ-transform) is suitable for investigating problems with the Bessel singular differential operator $B_{\gamma_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\gamma_i}{x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}, \gamma_i > 0$. In this paper, we introduce the odd Radon—Kipriyanov transform and complete Radon—Kipriyanov transform to investigation more general equations containing odd B-derivatives $\frac{\partial}{\partial x_i} B_{\gamma_i}^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ (in particular, gradients of functions). Formulas of K_γ-transforms of singular differential operators are given. Based on the Bessel transforms introduced by B.M. Levitan and the "odd" Bessel transform introduced by I.A. Kipriyanov and V.V. Katrakhov, a connection was obtained between the complete Radon—Kipriyanov transform with the Fourier transform and the mixed Fourier—Levitan—Kipriyanov—Katrakhov transform. An analogue of Helgason's support theorem and an analogue of the Paley—Wiener theorem are presented.

Keywords: Poisson operator (even and odd type), Bessel singular differential operator, Bessel j-functions, Bessel (Levitan and Kipriyanov—Katrakhov), Fourier, Radon, Radon—Kipriyanov integral transforms.