

УДК 519.676, 519.245

ПОСТРОЕНИЕ ЧИСЛЕННО-СТАТИСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ С ЗАДАННЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИНТЕГРАЛА ПО ОДНОЙ ИЗ ФАЗОВЫХ КООРДИНАТ

Член-корреспондент РАН Г. А. Михайлов^{1,2,*}, Е. Г. Каблукова^{1,**},
В. А. Огородников^{1,2}, С. М. Пригарин^{1,2}

Поступило 07.06.2019 г.

Решена задача построения численно реализуемой модели трёхмерного однородного случайного поля в “горизонтальном” слое $0 < z < H$ с заданными безгранично делимым одномерным распределением и корреляционной функцией интеграла по “вертикальной” переменной z . В качестве базовой модели рассматривается совокупность n независимых элементарных “горизонтальных” слоёв толщины $h = H/n$, сдвинутых по вертикали на случайную величину, равномерно распределённую в интервале $(0, h)$.

Ключевые слова: случайное поле, рандомизация, гамма-распределение, корреляционная функция.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524892131-135>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе решается задача алгоритмического построения численно реализуемой модели однородного случайного поля $\zeta(x, y, z)$ в слое $\Delta = \{(x, y, z): 0 \leq z \leq H\}$ в предположении, что заданы нормированная корреляционная функция $K_0(x, y)$ и безгранично делимое одномерное маргинальное распределение для интеграла от случайного поля $\zeta(x, y, z)$ по “вертикальной” координате z :

$$\xi(x, y) = \int_0^H \zeta(x, y, z) dz, \quad (1)$$

$$E\xi(x, y) = m_\xi, \quad V\xi(x, y) = \sigma^2.$$

Для определённости в качестве одномерного будет рассматриваться гамма-распределение $\Gamma(v, \theta)$ с параметрами формы v , масштаба θ и плотностью распределения $g_{v,\theta}(t) = \frac{t^{v-1} \exp(-t/\theta)}{\theta^v \Gamma(v)}$, $t > 0$, для которого $E\xi = v\theta$, $V\xi = v\theta^2$.

2. АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ОДНОРОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

2.1. Простейшей моделью трёхмерного случайного поля $\zeta(x, y, z)$ из (1) является “детерминиро-

ванная” модель $\zeta^{(d)}(x, y, z)$. Для построения данной модели используется

Алгоритм 1. 1. Слой Δ разбивается на n элементарных “горизонтальных” слоёв Δ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, толщины $h = H/n$ и дополняется аналогичными слоями до пространства R^3 .

2. Для каждого из слоёв Δ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, независимо моделируется двумерное однородное случайное поле $\xi_k(x, y)$ соответствующего интеграла по z с нормированной корреляционной функцией $K_0(x, y)$ и одномерным распределением $\Gamma(v_d, \theta_d)$, где $v_d = v/n$, $\theta_d = \theta$. При этом $\zeta^{(d)}(x, y, z) = \xi_k(x, y)h^{-1}$, если $(x, y, z) \in \Delta_k$.

Будем предполагать, что существует алгоритм построения двумерного “горизонтального” случайного поля $\xi_k(x, y)$ с заданными корреляционной функцией и одномерным распределением. Расчёты показали, что в этом случае целесообразно использовать методы обратной функции распределения [1], двумерной авторегрессии [2, 3] и метод условных математических ожиданий [3].

Случайные поля $\xi_k(x, y)$ взаимно независимы по построению, поэтому нормированная корреляционная функция поля $\xi^{(d)}(x, y)$ вида (1) совпадает с $K_0(x, y)$, а одномерное распределение совпадает с $\Gamma(v, \theta)$. Математическое ожидание и дисперсия одномерного распределения поля $\xi^{(d)}(x, y)$ равны соответственно $E\xi^{(d)} = nE\xi_k = v\theta$ и $V\xi^{(d)} = nV\xi_k = v\theta^2$.

Недостатком данной модели является неоднородность вдоль “вертикальной” оси. Нормированная

¹Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской Академии наук, Новосибирск

²Новосибирский национальный исследовательский государственный университет

*E-mail: gam@osmf.sccc.ru

**E-mail: kablukovae@sccc.ru

корреляционная функция поля $\zeta^{(d)}(x, y, z)$ по координате z равна

$$K_z^{(d)}(z_1, z_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } z_1, z_2 \in \Delta_i, i = 1, 2, \dots, n, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

2.2. Достигнуть однородности поля позволяет дополнительная рандомизация модели по “вертикальной” оси. В этом случае алгоритм 1 далее дополняется третьим пунктом.

Алгоритм 2. 1, 2. Повторяются пункты 1, 2 из алгоритма 1.

3. Однородная модель $\zeta^{(h)}(x, y, z)$ случайного поля в слое Δ получается сдвигом случайной функции $\zeta^{(d)}(x, y, z)$ вдоль оси z на величину αh , где α — случайное число, равномерно распределённое в интервале $(0, 1)$.

Соответственно интеграл (1) для модели $\zeta^{(h)}(x, y, z)$ определяется формулой

$$\begin{aligned} \xi^{(h)}(x, y) &= \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k(x, y) + \eta(x, y), \\ \eta(x, y) &= \alpha \xi_0(x, y) + (1 - \alpha) \xi_n(x, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где α определено в алгоритме 2, $\xi_0(x, y)$ определяется аналогично полям $\xi_k(x, y)$ для $k = 1, 2, \dots, n$. Отметим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\eta &= \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}(\eta | \alpha) = \mathbf{E}\xi_k = \frac{v\theta}{n}, \\ \mathbf{V}\eta &= \mathbf{V}_\alpha \mathbf{E}(\eta | \alpha) + \mathbf{E}_\alpha \mathbf{V}(\eta | \alpha) = \mathbf{E}_\alpha \mathbf{V}(\eta | \alpha) = \\ &= \mathbf{E}_\alpha [(\alpha^2 + (1 - \alpha)^2) \mathbf{V}\xi_k] = \frac{2}{3} \mathbf{V}\xi_k = \frac{2v\theta^2}{3n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Проведём исследование свойств случайного поля $\xi^{(h)}(x, y)$ вида (1) для модели $\zeta^{(h)}(x, y, z)$. Согласно формулам (2), (3) $\mathbf{E}\xi^{(h)} = n\mathbf{E}\xi_k = v\theta$, $\mathbf{V}\xi^{(h)} = \frac{\mathbf{V}\xi_k(3n - 1)}{3} = \frac{\mathbf{V}\xi^{(d)}(3n - 1)}{3n}$. Таким образом, если параметры одномерного распределения двумерного поля $\xi_k(x, y)$ выбираются согласно пункту 2 алгоритма 1, то дисперсия одномерного распределения поля $\xi^{(h)}(x, y)$ асимптотически стремится к требуемому значению дисперсии. Следующее утверждение позволяет улучшить построенное модельное поле $\zeta^{(h)}(x, y, z)$.

Теорема 1. Пусть параметры одномерного гамма-распределения полей $\xi_k(x, y)$, $k = 1, 2, \dots, n$, определяются формулами

$$\theta_0 = \frac{3n}{3n - 1} \theta, \quad v_0 = \frac{v}{n} \frac{3n - 1}{3n}, \quad (4)$$

а нормированные корреляционные функции совпадают с $K_0(x, y)$. Тогда для поля $\xi^{(h)}(x, y)$:

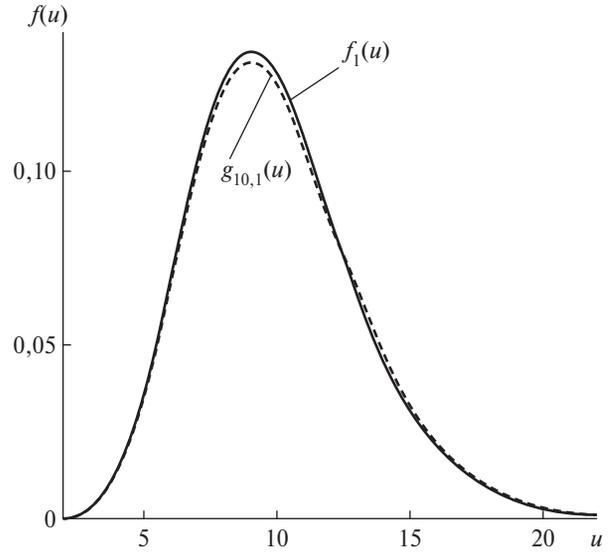


Рис. 1. Плотность гамма-распределения $g_{10,1}(u)$ и плотность $f_1(u)$ распределения случайной величины $\eta(x, y) = \alpha \xi_0(x, y) + (1 - \alpha) \xi_n(x, y) = \xi^{(h)}(x, y)$ из соотношения (2) для $n = 1$. Параметры распределения $\xi_k(x, y)$ выбраны по формуле (4): $\xi_k \sim \Gamma\left(\frac{20}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $k = 0, 1$.

1. Выполняются равенства $\mathbf{E}\xi^{(h)} = v\theta$, $\mathbf{V}\xi^{(h)} = v\theta^2$, а соответствующая нормированная корреляционная функция совпадает с $K_0(x, y)$.

2. Одномерное распределение приближается к гамма-распределению $\Gamma(v, \theta)$ асимптотически при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. Утверждения из пункта 1 получаются с помощью прямых выкладок. Утверждение из пункта 2 следует из соотношения (2) и может быть проверено численно для конкретных значений v и θ .

Были вычислены расстояния Кульбака—Лейблера [4]

$$I(n) = - \int_0^\infty g_{v,\theta}(u) \ln(f_n(u)/g_{v,\theta}(u)) du$$

между одномерным распределением поля $\xi^{(h)}(x, y)$ с плотностью $f_n(u)$, построенного с параметрами (4), и гамма-распределением $\Gamma(v, \theta)$ для различных значений n . В табл. 1 даны значения $I(n)$ в случае, когда параметры гамма-распределения равны $v = 10, \theta = 1$. Такие параметры являются характерными для одномерных распределений случайных полей оптической толщины слоистой облачности [3, 5]. Эти рас-

Таблица 1. Значения расстояний Кульбака—Лейблера $I(n)$ между одномерным распределением поля $\xi^{(h)}(x, y)$ и $\Gamma(10, 1)$ для различных n

| n | 1 | 2 | 5 | 10 |
|--------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $I(n)$ | $4,198 \cdot 10^{-4}$ | $1,862 \cdot 10^{-4}$ | $4,024 \cdot 10^{-5}$ | $1,228 \cdot 10^{-5}$ |

четыре показывают, что одномерное распределение поля $\xi^{(h)}(x, y)$ близко к $\Gamma(v, \theta)$ даже для малых значений n , включая $n = 1$.

Лемма 1. *Нормированная корреляционная функция случайного поля $\zeta^{(h)}(x, y, z)$ определяется выражением*

$$K^{(h)}(x, y, z) = K_0(x, y)K_1^{(h)}(z),$$

где

$$K_1^{(h)}(z) = \begin{cases} 1 - \frac{|z|}{h}, & \text{если } |z| \leq h, \\ 0, & \text{если } |z| \geq h. \end{cases}$$

Соответствующая корреляционная длина по оси z равна $\rho_z = \int_0^\infty K_1^{(h)}(z) dz = \frac{1}{2}h$.

Класс случайных полей, моделируемых по алгоритму 2, можно расширить, выбирая в нём значение n случайно, соответственно некоторым вероятностям $p_n, n = 1, 2, \dots$; при этом значение $h = H/n$ также случайно. Для этого потребуется следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $\zeta_1(\xi, \eta), \zeta_2(\xi, \eta)$ — некоторые скалярные функции случайного вектора ξ, η произвольного типа, $\mathbf{k}(\zeta_1, \zeta_2)$ — ковариация случайных величин ζ_i и $\tilde{\zeta}_i = \mathbf{E}(\zeta_i | \eta), i = 1, 2$. Тогда*

$$\mathbf{k}(\zeta_1, \zeta_2) = \mathbf{E}_\eta[\mathbf{k}(\zeta_1, \zeta_2 | \eta)] + \mathbf{k}(\tilde{\zeta}_1, \tilde{\zeta}_2). \quad (5)$$

Доказательство следует из равенства

$$\mathbf{k}(\zeta_1, \zeta_2) = \mathbf{E}_\eta \mathbf{E}(\zeta_1 \zeta_2 | \eta) - \mathbf{E}_\eta(\tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}_2) + \mathbf{E}_\eta(\tilde{\zeta}_1 \tilde{\zeta}_2) - \mathbf{E}(\zeta_1) \mathbf{E}(\zeta_2).$$

Для случайных значений $\eta = h$ с учётом однородности рандомизированного поля $\zeta^{(h)}(x, y, z)$ на основе леммы 2 получается равенство

$$K_1(z) = \frac{\mathbf{E}[K_1^{(h)}(z)v\theta^2/h^2] + \mathbf{V}(v\theta/h)}{\mathbf{E}[v\theta^2/h^2] + \mathbf{V}(v\theta/h)}, \quad (6)$$

где $v = v(h), \theta = \theta(h)$. Если параметры случайных полей $\xi_k, k = 1, 2, \dots, n$, выбраны соответственно (4) и $h = H/n$, то согласно (5), (6) выполняются равенства

$$\tilde{\zeta}^{(h)} = \frac{v\theta}{H}, \quad \mathbf{V}(\zeta^{(h)} | n) = \frac{3n^2 v\theta^2}{H^2(3n-1)}, \quad (7)$$

$$K_1(z) = \frac{\mathbf{E}[K_1^{(h)}(z)n^2/(3n-1)]}{\mathbf{E}[n^2/(3n-1)]}.$$

В частности, здесь можно использовать сдвинутое пуассоновское распределение $P(n = k) = p_k = \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!}, k = 1, 2, \dots$ Приравнявая соответствующее

значение ρ_z к заданному априори значению, можно численно оценить значение λ , вероятности p_k и функцию $K_1(z)$. Пункт 1 утверждения теоремы 1 при этом выполняется точно, а одномерное распределение случайного поля $\xi^{(h)}$ аппроксимирует $\Gamma(v, \theta)$ (см. замечание 1).

2.3. Далее строится более широкий класс модельных полей на основе использования непрерывного распределения параметра h . Для произвольного значения h рассмотрим минимальное целое k такое, что $kh = H^* > H$, и случайное поле $\zeta^{(h)}(x, y, z), z \in [0, H^*]$, построенное по алгоритму 2. В качестве требуемого случайного поля рассмотрим сужение поля $\zeta^{(h)}(x, y, z)$ на интервал $[0, H]$. При этом $m_\xi = H\mathbf{E}\zeta^{(h)}(x, y, z)$, а $\sigma^2 = h\left(H - \frac{h}{3}\right)\mathbf{V}\zeta^{(h)}(x, y, z)$ при $h < H$ и $\sigma^2 = H^2\left(1 - \frac{H}{3h}\right)\mathbf{V}\zeta^{(h)}(x, y, z)$ при $h > H$, где m_ξ и σ^2 определены в (1). Если параметры одномерного гамма-распределения элементарных случайных полей $\xi_k(x, y)$ равны

$$v_* = \begin{cases} v \frac{h(3H-h)}{3H^2}, & \text{если } h \leq H, \\ v \frac{3h-H}{3h}, & \text{если } h > H, \end{cases} \quad (8)$$

$$\theta_* = \begin{cases} \theta \frac{3H}{3H-h}, & \text{если } h \leq H, \\ \theta \frac{3h^2}{H(3h-H)}, & \text{если } h > H, \end{cases}$$

то математическое ожидание и дисперсия одномерного распределения поля $\xi_*^{(h)}(x, y) = \int_0^H \zeta^{(h)}(x, y, z) dz$ совпадают с соответствующими значениями требуемого распределения:

$$m_\xi = \mathbf{E}\xi_*^{(h)} = H\mathbf{E}\xi_k/h = v\theta, \quad (9)$$

$$\sigma^2 = \mathbf{V}\xi_*^{(h)} = \begin{cases} \frac{3H-h}{3h}\mathbf{V}\xi_k = v\theta^2, & \text{если } h \leq H, \\ \frac{H^2(3h-H)}{3h^3}\mathbf{V}\xi_k = v\theta^2, & \text{если } h \geq H. \end{cases}$$

Рандомизация по значению h таким образом модифицированного алгоритма 2 позволяет расширить класс корреляционных функций моделируемого поля.

Алгоритм 3.1. Моделируется случайная величина $h > 0$ согласно заданной функции распределения $G(h)$, такой, что $G(0) = 0$.

2. На отрезке $[0, H^*]$ моделируется случайное поле $\zeta^{(h)}(x, y, z)$ по алгоритму 2, в котором параметры

элементарного поля ξ_k выбираются согласно формулам (8).

3. Требуемое случайное поле реализуется по формуле $\zeta_G(x, y, z) = \zeta^{(h)}(x, y, z), \forall(x, y, z) \in \Delta$.

Теорема 2. Для случайного поля $\zeta_G(x, y, z)$ в алгоритме 3:

а) выполняются равенства (9);

б) нормированная корреляционная функция соответственно лемме 2 равна $K_0(x, y)K_1(z)$, где функция $K_1(z)$ определяется соотношением (6):

$$K_1(z) = \frac{E_h[K_1^{(h)}V(\zeta_G | h)]}{E_h[V(\zeta_G | h)]}, \quad (10)$$

$$V(\zeta_G | h) = \begin{cases} \frac{3v\theta^2}{h(3H-h)}, & \text{если } h \leq H, \\ \frac{3v\theta^2 h}{H^2(3h-H)}, & \text{если } h \geq H. \end{cases}$$

Алгоритм 3 позволяет моделировать однородные случайные поля для функций K_1 класса Пойа, т.е. для функций, удовлетворяющих условиям $K_1(0) = 1$, $K_1(z) = K_1(-z)$, $K_1(z)$ выпукла при $z > 0$, $K_1(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Известно, что всякую функцию класса Пойа можно представить в виде [6]

$$K_1(z) = \int_0^\infty K_1^{(h)}(z) dG_1(h), \quad (11)$$

где $G_1(h)$ — функция распределения такая, что $G_1(0) = 0$. Для простоты рассмотрим случай, когда существует плотность распределения $g_1(h) = G_1'(h)$. Чтобы выполнялось соотношение (11) с учётом (5), (6), в алгоритме 3 в качестве плотности распределения $g(h) = G'(h)$ следует брать

$$g(h) = \frac{g_1(h)/V(\zeta_G | h)}{\int_0^\infty \frac{g_1(\tau)}{V(\zeta_G | \tau)} d\tau}.$$

В частности, если $g_1(h) = l^2 h e^{-lh}$ — плотность распределение Эрланга, то $K_1(z) = e^{-lz}$.

Замечание 1. Функция одномерного распределения поля $\xi(x, y)$ определяется равенством $\int_0^\infty F_h(u) dG(h)$, где $F_h(u)$ — функция одномерного распределения поля $\xi^{(h)}(x, y)$. Изложенное выше позволяет предположить, что такое распределение близко к $\Gamma(v, \theta)$. Это предположение можно прове-

рить для конкретных вариантов задачи с помощью численного статистического моделирования.

Замечание 2. Предполагая достаточно “однородную” связь вертикального и горизонтального корреляционных масштабов, можно априори положить $\rho_z \approx \frac{\rho_x + \rho_y}{2}$, определяя тем самым распределение значений h соответственно $K_0(x, y)$ и соотношениям (6), (10) с учётом равенства $\int K_1^{(h)}(z) dz = \frac{h}{2}$. Более общей является оценка вида $\rho_z \approx C_x \rho_x + C_y \rho_y$, где C_x, C_y — константы.

Замечание 3. Свойства реализаций сформулированных моделей можно существенно улучшить путём суммирования m независимых реализаций полей такого же типа с параметрами $v_0/m, \theta_0$. Такой подход был представлен в [2].

В заключение отметим, что полученные результаты позволяют, используя статистические данные о случайном поле оптической толщины слоистого облака [5], смоделировать соответствующее трёхмерное случайное поле коэффициента ослабления оптического излучения.

Источники финансирования. Работа выполнена в рамках госзадания 0315-2019-0002, частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (гранты 18-01-00149, 18-01-00356, 18-01-00609).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пиранашвили З.А.* Некоторые вопросы статистико-вероятностного моделирования случайных процессов. В кн.: Вопросы исследования операций. Тбилиси: Мицниереба, 1966. С. 53–91.
2. *Михайлов Г.А., Войтушек А.В.* Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Академия, 2006.
3. *Ogorodnikov V.A., Kablukova E.G., Prigarin S.M.* Stochastic Models of Atmospheric Clouds Structure // Statistical Paper. 2018. V. 59. № 4. P. 1521–1532.
4. *Боровков А.А.* Математическая статистика. Новосибирск: Наука; изд-во Ин-та математики СО РАН, 1997.
5. *Schafer M., Bierwirth E., Ehrlich A., et al.* Directional Horizontal Inhomogeneities of Cloud Optical Thickness Fields Retrieved from Ground-Based and Airborne Spectral Imaging // Atmos. Chem. Phys. 2017. V. 17. P. 2359–2372.
6. *Лукач Е.* Характеристические функции. М.: Наука, 1979.

CONSTRUCTING A NUMERICALLY STATISTICAL MODEL OF A HOMOGENEOUS RANDOM FIELD WITH THE GIVEN DISTRIBUTION OF THE INTEGRAL OVER ONE OF THE PHASE COORDINATES

Corresponding Member of the RAS **G. A. Mikhailov**^{1,2}, **E. G. Kablukova**¹,
V. A. Ogorodnikov^{1,2}, **S. M. Prigarin**^{1,2}

¹*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russian Federation*

²*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation*

Received June 7, 2019

The problem of constructing a numerically realizable model of a three-dimensional homogeneous random field in a “horizontal” layer $0 < z < H$ with given one-dimensional distribution and correlation function of the integral over “vertical” coordinate z is solved. An aggregate of n independent elementary horizontal layers of thickness $h = H/n$, vertically shifted by a random value uniformly distributed in the interval $(0, h)$ is considered as a basic model.

Keywords: random field, randomization, gamma distribution, correlation function.