ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 489, № 2, с. 136–141

МАТЕМАТИКА

УДК 519.17

ОЦЕНКА ДЕФЕКТА СТАБИЛЬНОСТИ МНОЖЕСТВ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ О СБЛИЖЕНИИ В ФИКСИРОВАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

Член-корреспондент РАН В. Н. Ушаков*, А. Г. Малёв**

Поступило 20.06.2019 г.

Изучается игровая задача о сближении управляемой системы с целевым множеством в фиксированный момент времени. Обсуждается вопрос об оценке снизу дефекта стабильности множества в пространстве позиций, слабо инвариантного относительно конечного набора унификационных дифференциальных включений.

Ключевые слова: управление, конфликтно управляемая система, игровая задача о сближении, стабильность, дефект стабильности, дифференциальное включение, целевое множество.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524892136-141

Изучается игровая задача о сближении конфликтно управляемой системы в конечномерном евклидовом пространстве с компактным множеством в конечный момент времени [1–8]. Предметом изучения является введённое в работах [9, 10] понятие дефекта стабильности множеств в пространстве позиций системы. Это понятие введено в целях расширения концепции стабильности для изучения множеств, не обладающих, вообще говоря, свойством стабильности.

Наборы дифференциальных включений, индуцированных динамикой системы, участвующие в определении стабильности, могут принимать различные формы, выделяя при этом одни и те же множества — стабильные мосты. В этом смысле различные формулировки свойства стабильности эквивалентны по существу. Для расширения концепции стабильности оказалось удобным применение унификационных определений стабильности [11, 12], базирующихся на унификационных наборах. Эти наборы являются бесконечными, т.е. состоящими из бесконечного числа дифференциальных включений. В силу этого проверить то или иное множество в пространстве позиций на наличие свойства стабильности невозможно. Такую проверку можно осуществить для некоторых довольно простых конфликтно управляемых систем благодаря тому, что унификационный набор можно подменить эквивалентным ему с точки зрения стабильности конечным набором дифференциальных включений.

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской Академии наук, Екатеринбург

**E-mail*: *ushak@imm.uran.ru*

***E-mail*: *malevag@mail.ru*

Для других конфликтно управляемых систем актуальна следующая задача. Пусть выбран некоторый конечный поднабор из унификационного набора дифференциальных включений и выделено в пространстве позиций системы множество, слабо инвариантное относительно поднабора. Требуется оценить, в какой мере это множество близко к обладанию свойством стабильности. Иными словами, требуется оценить сверху дефект стабильности этого множества. В настоящей работе обсуждается вопрос о выводе одной из таких оценок дефекта стабильности.

1. ИГРОВАЯ ЗАДАЧА О СБЛИЖЕНИИ В ФИКСИРОВАННЫЙ МОМЕНТ ВРЕМЕНИ

На промежутке времени $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$, задана конфликтно управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x^{(0)}, \quad u \in P, \quad v \in Q, \quad (1)$$

где x — m-мерный фазовый вектор системы из $\mathbf{R}^m$, u и v — соответственно управления первого и второго игроков, P и Q — компакты в евклидовых пространствах $\mathbf{R}^p$ и $\mathbf{R}^q$.

Правая часть системы (1) удовлетворяет условиям:

A. Функция $f(t, x, u, v)$ определена и непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbf{R}^m \times P \times Q$ и для любой ограниченной замкнутой области $\Omega \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbf{R}^m$ существует такая постоянная $L = L(\Omega) \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x^{(1)}, u, v) - f(t, x^{(2)}, u, v)\| \le L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|,$$
$$(t, x^{(i)}, u, v) \in \Omega \times P \times Q, \quad i = 1, 2;$$

здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

B. Существует такая постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, что

$$\|f(t, x, u, v)\| \le \gamma(1 + \|x\|),$$
$$(t, x, u, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbf{R}^m \times P \times Q.$$

В игровой задаче о сближении в фиксированный момент времени первому игроку требуется обеспечить попадание на заданный компакт $M \subset \mathbf{R}^m$ фазового вектора $x(\vartheta)$ системы (1) при любых допустимых управлениях $v = v(t, x)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ второго игрока. Решение задачи о сближении требуется обеспечить в классе позиционных процедур управления первого игрока [1].

В задаче об уклонении, дуальной к задаче о сближении, второму игроку требуется обеспечить уклонение фазового вектора $x(\vartheta)$ системы (1) от некоторой ε-окрестности M_ε множества M. Решение задачи об уклонении требуется обеспечить в классе контрпозиционных процедур управления с поводырём второго игрока [1].

Для складывающейся из задач о сближении и об уклонении дифференциальной игры справедлива альтернатива: существует такое замкнутое множество $W^0 \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbf{R}^m$, что для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \in W^0$ разрешима задача о сближении и для всех исходных позиций $(t_*, x_*) \notin W^0$ разрешима задача об уклонении [1].

Множество W^0 играет ключевую роль при решении задачи о сближении. Разрешающая позиционная процедура первого игрока может быть реализована для исходных позиций $(t_*, x_*) \in W^0$ как позиционная процедура управления с поводырём, нацеливающая фазовый вектор $x(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, системы (1) на поводыря, эволюционирующего в W^0. Множество W^0, как известно (см. [1]), обладает важным свойством: W^0 есть максимальный u-стабильный мост. Это свойство лежит в основе алгоритмов приближённого вычисления W^0. В работах [11, 12] для приближённого вычисления W^0 используются алгоритмы, основу которых составляют унификационные конструкции или их модификации.

Опишем свойство u-стабильности множеств, содержащихся в $[t_0, \vartheta] \times \mathbf{R}^m$, в терминах некоторого унификационного набора из $\mathbf{R}^m$. Аналогичные наборы рассматривались ранее в [11, 12]. Этому набору сопоставим ниже набор дифференциальных включений (д.в.), с помощью которого дадим инфинитезимальное описание свойства u-стабильности. Для определения унификационного набора введём скалярные функции на $[t_0, \vartheta] \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m$:

$H(t, x, l) = \max\limits_{u \in P} \min\limits_{v \in Q} \langle (l, x, u, v) \rangle$ — гамильтониан системы (1),

$$H^*(t, x, l) = \max_{(u,v) \in P \times Q} \langle l, f(t, x, u, v) \rangle,$$

где $\langle l, f \rangle$ — скалярное произведение векторов l и f из $\mathbf{R}^m$.

Принимая во внимание условие **B** и компактность M, заключаем, что можно указать такую большую ограниченную замкнутую область Ω в $[t_0, \vartheta] \times \mathbf{R}^m$, которая содержит W^0 и все движения $x(t)$ системы (1), приходящие в момент ϑ в некоторую заданную ε-окрестность множества M.

Полагаем

$$r = \max_{(t,x,l) \in \Omega \times S} |H(t, x, l)| < \infty,$$
$$K = \max_{(t,x,l) \in \Omega \times S} |H^*(t, x, l)| =$$
$$= \max_{(t,x,u,v) \in \Omega \times P \times Q} \|f(t, x, u, v)\| < \infty;$$

здесь $S = \{l \in \mathbf{R}^m : \|l\| = 1\}$.

Имеем $r \le K$ согласно определению r и K.

В дополнение к условиям **A** и **B** предполагаем, что выполняется следующее условие

C. Справедливо $r < K$.

Введём в рассмотрение множество $G = B(0; K) = \{b \in \mathbf{R}^m : \|b\| \le K\} \subset \mathbf{R}^m$. При таком задании шара G получаем, что вектограммы $\mathcal{F}(t, x) = \{f(t, x, u, v) : (u, v) \in P \times Q\}$, $(t, x) \in \Omega$, и их выпуклые оболочки $F(t, x) = \mathrm{co}\mathcal{F}(t, x)$ содержатся в G.

Пусть заданы некоторое конечное множество $\Psi = \{\psi\}$ элементов ψ и набор $\{F_\psi : \psi \in \Psi\}$ отображений $F_\psi : (t, x) \mapsto F_\psi(t, x) \subset \mathbf{R}^m$, $(t, x, \psi) \in \Omega \times \Psi$, удовлетворяющих условиям:

A.1. Для любых $(t, x, \psi) \in \Omega \times \Psi$ множество $F_\psi(t, x)$ выпукло и замкнуто в $\mathbf{R}^m$, $F_\psi(t, x) \subset G$, а также:

а) отображение $(t, x) \mapsto F_\psi(t, x)$ непрерывно на Ω (в хаусдорфовой метрике) равностепенно относительно ψ из Ψ;

б) для некоторого $\lambda = \lambda(L) \in (0, \infty)$ $(L = L(\Omega))$ и всех $\psi \in \Psi$ справедливо

$$d(F_\psi(t, x_*), F_\psi(t, x^*)) \le \lambda \|x_* - x^*\|,$$
$$(t, x_*) \text{ и } (t, x^*) \text{ из } \Omega.$$

A.2. Для любых $(t, x, l) \in \Omega \times S$ справедливо

$$\min_{\psi \in \Psi} h_{F_\psi(t,x)}(l) = H(t, x, l);$$

здесь $h_F(l) = \max\limits_{f \in F}\langle l, f\rangle$ — опорная функция компакта $F \subset \mathbf{R}^m$, $d(F_*, F^*)$ — хаусдорфово расстояние между компактами F_* и F^* из $\mathbf{R}^m$.

Введённые с помощью аксиом А.1, А.2 множества $F_\psi(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, $\psi \in \Psi$, содержащиеся в шаре G при каждом $(t, x) \in \Omega$, уместно назвать ядрами в G. Этот набор ядер в G определяется структурой гамильтониана $H(t, x, l)$ и связан с ним условием А.2. Для некоторых конфликтно управляемых систем может оказаться, что структура гамильтониана $H(t, x, l)$ не очень сложна, вследствие чего в шаре G при каждом $(t, x) \in \Omega$ содержится конечное и не очень большое количество ядер, не зависящее от $(t, x) \in \Omega$. В этих случаях задание набора $\{F_\psi: \psi \in \Psi\}$ позволяет достаточно эффективно осуществлять разработку алгоритмов приближённого вычисления множества W^0, по крайней мере для систем (1) невысокого порядка. В этих случаях алгоритмы приближённого вычисления W^0 сводятся к некоторым наборам алгоритмов вычислительной геометрии.

Известно несколько таких конечных наборов $\{F_\psi: \psi \in \Psi\}$. Представим один из них, соответствующий достаточно широкому классу систем (1). Именно пусть система (1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f^{(1)}(t, x, u) + f^{(2)}(t, x, v), \quad u \in P,\ v \in Q,$$

где $f^{(2)}(t, x, v) = f^*(t, x) + C(t, x)v$, Q — выпуклый многогранник в $\mathbf{R}^2$ с конечным набором $\Psi = \{v^{(i)}\}$ вершин $v^{(i)}$.

Для такой конфликтно управляемой системы можно задать в качестве конечного набора $\{F_\psi: \psi \in \Psi\}$ набор отображений $(t, x) \mapsto F_{v^{(i)}}(t, x) = F^{(1)}(t, x) + f^{(2)}(t, x, v^{(i)})$, $v^{(i)} \in \Psi$; здесь $F^{(1)}(t, x) = \mathrm{co}\{f^{(1)}(t, x, u): u \in P\}$.

Однако для многих систем вида (1) структура гамильтониана $H(t, x, l)$ не настолько проста, что ей можно сопоставить конечный набор $\{F_\psi: \psi \in \Psi\}$, удовлетворяющий А.1, А.2, где Ψ состоит из небольшого числа элементов.

При изучении таких систем имеет смысл обратиться к несчётному унификационному набору $\mathcal{I} = \{F_l: l \in S\}$, удовлетворяющему А.1, А.2 (см. [2, 10, 11]). Он определяется соотношениями при $(t, x, l) \in \Omega \times S$

$$F_l(t, x) = G \cap \Pi_l(t, x),$$
$$\Pi_l(t, x) = \{f \in \mathbf{R}^m: \langle l, f\rangle \le H(t, x, l)\}.$$

Множества $F_l(t, x)$ есть шаровые сегменты в $\mathbf{R}^m$, удовлетворяющие А.1, А.2, где $\Psi = S$, $\psi = l \in S$.

Опишем свойство u стабильности с помощью набора $\{F_l: l \in S\}$.

Для многозначного отображения $t \mapsto W(t)$ полагаем

$$\vec{D}W(t_*, x_*) = \{d \in \mathbf{R}^m: d = \lim_{k\to\infty}(t_k - t_*)^{-1}(w_k - x_*),$$
$$\{(t_k, w_k)\} \text{ из } W, \text{ где } t_k \downarrow t_* \text{ при } k \to \infty,$$
$$\lim_{k\to\infty} w_k = x_*\}$$

есть производное множество отображения $t \mapsto W(t)$ в точке $(t_*, x_*) \in W$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$ (см. [14]).

Определение 1 [14]. Множество W называется u-стабильным мостом в задаче о сближении системы (1) с M, если:

1) $W(\vartheta) \subset M$;

2) $\vec{D}W(t_*, x_*) \cap F_l(t_*, x_*) \ne \varnothing$ при $(t_*, x_*, l) \in [t_0, \vartheta) \times \partial W(t_*) \times S$.

Определение 1 представляет собой фактически инфинитезимальную формулировку свойства u-стабильности множества $W \subset \Omega$. Оно есть элемент внедрения конструкций в духе производных в теорию дифференциальных игр. Это определение оказалось весьма полезным при выявлении различных свойств u-стабильных мостов.

2. ДЕФЕКТ СТАБИЛЬНОСТИ МНОЖЕСТВ В $[t_0, \vartheta] \times \mathbf{R}^m$

Для приближённого вычисления W^0 в конкретных игровых задачах о сближении должны применяться алгоритмы, в основе которых лежат конечные наборы отображений $(t, x) \mapsto F_\psi(t, x)$, $\psi \in \Psi$. В этом разделе мы проредим набор $\{F_l: l \in S\}$ — перейдём к конечному набору отображений. Этот конечный набор уже не выделяет в Ω максимальный u-стабильный мост W^0, но выделяет некоторое замкнутое множество $\mathcal{W}^0$ ($\mathcal{W}^0(\vartheta) = M$, $W^0 \subset \mathcal{W}^0$). Для $\mathcal{W}^0$ свойство u-стабильности выполняется с некоторой погрешностью, которую мы назовём дефектом.

Приведём определение дефекта стабильности замкнутого множества $\mathcal{W} \subset \Omega$, такого что $\mathcal{W}(\vartheta) = M$ и из $t_0 \le t_* < t^* \le \vartheta$ и $\mathcal{W}(t_*) \ne \varnothing$ следует $\mathcal{W}(t^*) \ne \varnothing$.

Предполагаем также, что относительно $\mathcal{W}$ выполнено условие

D. Справедливо неравенство

$$(t^* - t_*)^{-1} d(\mathcal{W}(t_*), \mathcal{W}(t^*)) \le K, \quad t_0 \le t_* < t^* \le \vartheta.$$

Из условия **D** следует

$$\vec{D}\mathcal{W}(t_*, x_*) \cap G \neq \varnothing, \quad (t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta) \times \partial\mathcal{W}(t_*),$$

и этому условию удовлетворяет, в частности, u-стабильный мост W^0.

Сопоставим каждой точке (t_*, x_*), $(t_* \in [t_0, \vartheta)$, $x_* \in \partial\mathcal{W}(t_*))$ число (см. [9, 10])

$$\varepsilon(t_*, x_*) = \sup_{l\in S}\rho(\vec{D}\mathcal{W}(t_*, x_*),\ F_l(t_*, x_*));$$

здесь $\rho(F_*, F^*) = \inf\{\|f_* - f^*\|: (f_*, f^*) \in F_* \times F^*\}$, где F_* и F^* — компакты в $\mathbf{R}^m$.

Величина $\varepsilon(t_*, x_*) \geq 0$ называется дефектом стабильности множества $\mathcal{W}$ в точке (t_*, x_*). Её можно трактовать как локальную характеристику степени нестабильности множества $\mathcal{W} \subset \Omega$ в точке $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta) \times \partial\mathcal{W}(t_*)$ — меру того, насколько сильно несогласованы динамика системы (1) и эволюция многозначного отображения $t \mapsto \mathcal{W}(t) = \{x \in \mathbf{R}^m: (t, x) \in \mathcal{W}\}$ вблизи (t_*, x_*) (справа по времени t) с точки зрения свойства u-стабильности. Большое значение величины $\varepsilon(t_*, x_*)$ означает их сильную несогласованность, равенство $\varepsilon(t_*, x_*) = 0$ означает наличие u-стабильности множества $\mathcal{W}$ в точке (t_*, x_*).

Полагаем при $t_* \in [t_0, \vartheta)$ (см. [9, 10])

$$\varepsilon(t_*) = \sup_{(t_*,x_*)\in\Lambda(t_*)} \varepsilon(t_*, x_*),$$
$$\Lambda(t_*) = \{(t_*, x_*): x_* \in \partial\mathcal{W}(t_*)\};$$
$$\varepsilon(t_*) = 0 \text{ при } t_* = \vartheta.$$

Величину $\varepsilon(t_*)$, $t_* \in [t_0, \vartheta)$, назовём дефектом стабильности множества $\mathcal{W}$ в момент t_*.

Известное правило экстремального прицеливания на $\mathcal{W}$ ($\mathcal{W}(\vartheta) = M$) Н.Н. Красовского, или правило прицеливания на поводыря, эволюционирующего в $\mathcal{W}$, гарантирует для исходных позиций $(t_*, x_*) \in \mathcal{W}$ попадание фазового вектора $x(\vartheta)$ системы (1) на M в случае, когда $\mathcal{W}$ — u-стабильный мост (т.е. $\varepsilon(t) \equiv 0$ на $[t_0, \vartheta]$).

Отображение $(t, x, l) \mapsto F_l(t, x)$ непрерывно (в хаусдорфовой метрике) на $\Omega \times S$ в силу условий A.1, A.2, **C**.

Из результатов работы [11, с. 168] следует, что $\lambda = \lambda(L)$ в условии A.1 можно задать равенством $\lambda = \lambda(L) = \dfrac{KL}{\sqrt{K^2 - r^2}} < \infty$.

В дополнение к условию **D** примем, что множество $\mathcal{W}$ и функция $\varepsilon(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$, стеснены ещё двумя условиями:

H. Существует такая функция $\varphi^*(\delta) \downarrow 0$ при $\delta \downarrow 0$, $\delta \in (0, \vartheta - t_0)$, что

$$h\left(\vec{D}\mathcal{W}(t_*, x_*) \cap B(0,3K),\ \frac{\mathcal{W}(t_* + \delta) - x_*}{\delta}\right) \leq \varphi^*(\delta),$$
$$(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta) \times \partial\mathcal{W}(t_*),\ \delta \in (0, \vartheta - t_0);$$

здесь $B(0,3K) = \{b \in \mathbf{R}^m: \|b\| \leq 3K\}$; $\dfrac{\mathcal{W}(t_* + \delta) - x_*}{\delta} = \left\{h^{(\delta)}: h^{(\delta)} = \dfrac{w^{(\delta)} - x_*}{\delta},\ w^{(\delta)} \in \mathcal{W}(t_* + \delta)\right\}$; $\partial\mathcal{W}(t_*)$ — граница множества $\mathcal{W}(t_*)$ в $\mathbf{R}^m$; $h(W_*, W^*)$ — хаусдорфово отклонение W_* от W^*, W_* и W^* — компакты в $\mathbf{R}^m$.

E. Функция $\varepsilon(t)$ измерима по Лебегу на $[t_0, \vartheta]$.

Полагаем $\mathcal{W}^* = \bigcup_{t\in[t_0,\vartheta]} (t, \mathcal{W}^*(t))$, где $\mathcal{W}^*(t) = \mathcal{W}(t)_{æ(t)}$,

$æ(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\lambda(t-\tau)}\varepsilon(\tau)d\tau$ — интеграл Лебега; здесь $\mathcal{W}(t)_{æ(t)}$ — $æ(t)$-окрестность множества $\mathcal{W}(t)$ в $\mathbf{R}^m$.

Справедливо $\mathcal{W}^*(t_0) = \mathcal{W}(t_0)$ и величина $æ(t)$ возрастает с ростом t на $[t_0, \vartheta]$.

Теорема 1 [10]. *Множество $\mathcal{W}^*$ есть u-стабильный мост в задаче о сближении системы* (1) *с множеством $M_{æ(\vartheta)}$ в момент ϑ.*

Число $\varepsilon_{\mathcal{W}} = æ(\vartheta)$ называется дефектом стабильности множества $\mathcal{W}$ [10].

Из теоремы 1 вытекает, что если позиция $(t_0, x^{(0)}) \in \mathcal{W}$, то правило экстремального прицеливания на $\mathcal{W}^*$ (см. [10]) гарантирует первому игроку попадание фазового вектора $x(\vartheta)$ $(x(t_0) = x^{(0)})$ системы (1) на $M_{\varepsilon_{\mathcal{W}}}$. Если при этом $\varepsilon_{\mathcal{W}}$ мало, то это означает, что мы решили задачу о сближении с M с некоторой малой погрешностью.

3. ОЦЕНКА СВЕРХУ ДЕФЕКТА СТАБИЛЬНОСТИ МНОЖЕСТВ В Ω

Если в конкретной задаче о сближении с M для какого-либо множества $\mathcal{W} \subset \Omega$ дефект стабильности $\varepsilon_{\mathcal{W}}$ оказывается мал, то имеет смысл вместо этой задачи изучать задачу о сближении с M в мягкой постановке как задачу о сближении системы (1) с множеством $M_{\varepsilon_{\mathcal{W}}}$.

В игровых задачах о сближении с M имеет смысл рассматривать различные примечательные множества $\mathcal{W} \subset \Omega \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbf{R}^m$, $\mathcal{W}(\vartheta) = M$. Значительный интерес представляет выяснение того, в какой мере эти множества $\mathcal{W}$ близки к выполнению свойства u-стабильности в игровой задаче о сближении системы (1) с M в момент ϑ. Такими множествами являются, например, множество программного поглощения в игровой задаче о сближении с M в момент ϑ

и множество позиционного поглощения в игровой задаче о сближении с M к моменту ϑ (см. [1]).

В этой работе рассмотрим одно из замкнутых множеств $\mathcal{W} \subset \Omega$, для которого получим оценку сверху дефекта стабильности $\varepsilon_{\mathcal{W}}$.

А именно считаем, что в наборе $\mathcal{I}$ многозначных отображений $(t, x) \mapsto F_l(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, $l \in S$, выбран некоторый конечный поднабор $\mathcal{I}^* = \{(t, x) \mapsto F_{l_\rho}(t, x): \rho = 1, 2, \ldots, N\}$.

Считаем также, что в Ω выделено максимальное (по включению) множество $\mathcal{W}^0$ ($\mathcal{W}^0(\vartheta) = M$), слабо инвариантное относительно набора $\mathcal{I}^*$ дифференциальных включений

$$\frac{dx}{dt} \in F_{l_\rho}(t, x), \quad \rho = 1, 2, \ldots, N, \quad t \in [t_0, \vartheta], \qquad (2)$$

отвечающих отображениям из $\mathcal{I}^*$.

Замкнутое множество $\mathcal{W}^0$ удовлетворяет включению $W^0 \subseteq \mathcal{W}^0$ наряду с равенством $\mathcal{W}^0(\vartheta) = M$. В конкретных игровых задачах, как правило, $\mathcal{W}^0 \neq W^0$, и, значит, в них $\mathcal{W}^0$ не обладает свойством u-стабильности. При этом встаёт вопрос о том, в какой мере $\mathcal{W}^0$, определённое с помощью набора $\mathcal{I}^*$, не удовлетворяет свойству u-стабильности.

Для ответа на этот вопрос приведём две оценки, используемые при доказательстве основного утверждения этой работы.

1. Функция $l \mapsto H(t, x, l)$, $l \in S$, удовлетворяет неравенству

$$|H(t, x, l_*) - H(t, x, l^*)| \le K\|l_* - l^*\|,$$
$$(t, x) \in \Omega, \ l_* \text{ и } l^* \text{ из } S.$$

2. Справедливо неравенство

$$d(F_{l_*}(t, x), F_{l^*}(t, x)) \le \frac{2K}{\sqrt{K^2 - r^2}}\|l_* - l^*\|$$

при $(t, x) \in \Omega$, l_* и l^* из S и $\|l_* - l^*\| \le \delta$, где $\delta \in \left(0, 1 - \dfrac{r}{K}\right)$.

Приведём основное утверждение.

Теорема 2. *Пусть конечный набор* $S^{(\delta)} = \{l_\rho \in S: \rho = 1, 2, \ldots, N\}$ *есть* δ-*сеть в сфере* $S \subset \mathbf{R}^m$, *где* $\delta \in \left(0, 1 - \dfrac{r}{K}\right)$. *Тогда* $\varepsilon_{\mathcal{W}^0}$ — *дефект стабильности множества* $\mathcal{W}^0 \subset \Omega$, *определённого с помощью набора* $\{F_{l_\rho}: l_\rho \in S^{(\delta)}\}$, *удовлетворяет неравенству*

$$\varepsilon_{\mathcal{W}^0} \le \frac{2K}{L}\left(e^{\frac{KL}{\sqrt{K^2-r^2}}(\vartheta - t_0)} - 1\right) \cdot \delta. \qquad (3)$$

Из оценки (3) следует, что множество $\mathcal{W}^0$ ($\mathcal{W}^0(\vartheta) = M$), в достаточно большой мере удовлетворяющее свойству u-стабильности, можно сконструировать с помощью набора $\{F_{l_\rho}: l_\rho \in S^{(\delta)}\}$, отвечающего малому $\delta > 0$, представляет также интерес выявление спектра параметров K, L, r, $(\vartheta - t_0)$, при которых

$$\frac{2K}{L}\left(e^{\frac{KL}{\sqrt{K^2-r^2}}(\vartheta - t_0)} - 1\right) \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon \in (0, \infty)$ — некоторое малое число.

Очевидно, что решение этого вопроса сводится к изучению неравенства

$$e^{\gamma_1 L} \le 1 + \gamma_2 L, \quad L \in (0, \infty), \qquad (4)$$

где $\gamma_1 = \dfrac{KL}{\sqrt{K^2 - r^2}}(\vartheta - t_0)$, $\gamma_2 = \dfrac{\varepsilon}{2K}$.

Дальнейшее изучение неравенства (4) сводится к сравнению коэффициентов γ_1 и γ_2.

Источник финансирования. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 19–11–00105.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красовский Н.Н.*, *Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.
2. *Красовский Н.Н.* К задаче унификации дифференциальных игр // ДАН СССР. 1976. Т. 226. № 6. С. 1260–1263.
3. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. II // ДАН. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.
4. *Понтрягин Л.С.* Математическая теория оптимальных процессов и дифференциальные игры // Тр. МИАН. 1985. Т. 169. С. 119–158.
5. *Кряжимский А.В.*, *Осипов Ю.С.* Об одном алгоритмическом критерии разрешимости игровых задач для линейных управляемых систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2000. Т. 6. № 1. С. 131–140.
6. *Куржанский А.Б.* Альтернированный интеграл Понтрягина в теории синтеза управлений // Тр. МИАН. 1999. Т. 224. С. 234–248.
7. *Никольский М.С.* Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Мат. сб. 1981. Т. 116. № 1. С. 136–144.
8. *Половинкин Е.С.* Стабильность терминального множества и оптимальность времени преследования в дифференциальных играх // Диф. уравнения. 1984. Т. 20. № 3. С. 433–446.
9. *Ушаков В.Н.*, *Латушкин Я.А.* Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Тр. Ин-

та математики и механики УрО РАН. 2006. Т. 12. № 2. С. 178–194.
10. *Ушаков В.Н.*, *Малёв А.Г.* К вопросу о дефекте стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16. № 1. С. 199–222.
11. *Ушаков В.Н.* Теория минимаксных дифференциальных игр (часть I): деп. рукопись. Свердловск: ИММ УНЦ АН СССР, 1980. № 4425-80. 187 с.
12. *Тарасьев А.М.*, *Ушаков В.Н.*, *Хрипунов А.П.* Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикл. математика и механика. 1987. Т. 51. В. 2. С. 216–222.
13. *Малёв А.Г.* К вопросу об оценке дефекта стабильности множеств в игровой задаче о сближении // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2013. Т. 19. № 1. С. 205–216.
14. *Guseinov H.G.*, *Subbotin A.I.*, *Ushakov V.N.* Derivatives for Multivalued Mappings with Applications to Game–Theoretical Problems of Control // Problems Control Inform. Theory. 1985. V. 14. № 6. P. 405–419.

STABILITY DEFECT ESTIMATION FOR SETS IN A GAME APPROACH PROBLEM IN A FIXED MOMENT

Corresponding Member of the RAS V. N. Ushakov, A. G. Malev

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, *Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, *Ekaterinburg*, *Russian Federation*

Received June 20, 2019

We study the game problem of approaching a control system with a target set at a fixed point in time. The question of estimating from below the stability defect of a set in the position space weakly invariant with respect to a finite set of unification differential inclusions is discussed.

Keywords: control, conflict-controlled system, game approach problem, stability, defect stability, differential inclusion, target set.