УДК 517.955.4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ
В КВАНТОВЫХ ВОЛНОВОДАХ

Б. А. Пламеневский*, А. С. Порецкий**, О. В. Сарафанов

Представлено академиком РАН Н. Ф. Морозовым 29.05.2019 г.

Поступило 17.06.2019 г.

Волновод занимает область G с несколькими цилиндрическими выходами на бесконечность. Волновод описывается нестационарным уравнением вида $i\partial_t f = \mathcal{A}f$, где $\mathcal{A}$ — самосопряжённый эллиптический оператор второго порядка с переменными коэффициентами (в частности, при $\mathcal{A} = -\Delta$, где Δ — оператор Лапласа, уравнение совпадает с уравнением Шрёдингера). Для соответствующей стационарной задачи со спектральным параметром определяются собственные функции непрерывного спектра и матрица рассеяния. С помощью принципа предельного поглощения устанавливается разложение по собственным функциям непрерывного спектра. Вычисляются волновые операторы, и доказывается их полнота. Определяется оператор рассеяния, и описывается его связь с матрицей рассеяния.

Ключевые слова: волновод, матрица рассеяния, принцип предельного поглощения, волновые операторы, оператор рассеяния.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524892142-146>

1. ВОЛНОВОД И ОПЕРАТОРЫ

Пусть G — область в $\mathbb{R}^d$, совпадающая вне большого шара с объединением конечного числа попарно непересекающихся полуцилиндров $\Pi_+^q = \{(y, z): y \in \Omega^q, z \in \mathbb{R}_+\}$, $q = 1, 2, \dots, T$; граница ∂G гладкая. Рассматривается начально-краевая задача

$$i\partial_t \Psi(x, t) = \mathcal{A}(x, D_x) \Psi(x, t), \quad x \in G,$$

$$\Psi(x, t) = 0, \quad x \in \partial G,$$

$$\Psi(x, 0) = \Psi_0(x), \quad x \in G,$$

где $\mathcal{A}(x, D_x) = \sum_{j,l=1}^d D_j a_{j,l}(x) D_l + a_0(x)$, а $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Предполагается, что матрица $a(\cdot)$ с элементами $a_{j,l}(\cdot) \in C^1(\bar{G})$ является положительно определённой, т.е. $\langle a(x)\xi, \xi \rangle \geq c \langle \xi, \xi \rangle$ при $\xi \in \mathbb{C}^d$, где $c > 0$, а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^d$; $a_0(\cdot) \in C^1(\bar{G})$. Кроме того, при некотором $\delta > 0$ в каждом цилиндрическом выходе $G \cap \Pi_+^q$ выполняются условия стабилизации

$$|a_{j,l}(y, z) - a_{j,l}^q(y)| + |\nabla(a_{j,l}(y, z) - a_{j,l}^q(y))| = O(e^{-\delta z}),$$

$$|a_0(y, z) - a_0^q(y)| + |\nabla(a_0(y, z) - a_0^q(y))| = O(e^{-\delta z}), \quad (1)$$

$$z \rightarrow +\infty.$$

Здесь (y, z) — локальные координаты в $G \cap \Pi_+^q$. Оператор $\mathcal{A}$ в $L_2(G)$, заданный дифференциальным вы-

ражением $\mathcal{A}(x, D_x)$ на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H^2(G) \cap H_0^1(G)$, является самосопряжённым, где, как обычно, $H^2(G)$ и $H_0^1(G)$ — пространства Соболева.

2. ТОЧЕЧНЫЙ
И НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТРЫ

Число μ называется собственным значением (принадлежит точечному спектру $\sigma_p(\mathcal{A})$), если существует решение $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ уравнения $\mathcal{A}u = \mu u$; такое решение называется собственной функцией. Собственные значения оператора $\mathcal{A}$ имеют конечную кратность и могут сгущаться разве лишь на бесконечности.

Говорят, что число μ принадлежит непрерывному спектру $\sigma_c(\mathcal{A})$, если образ оператора $\mathcal{A} - \mu$ не замкнут в $L_2(G)$. Это происходит в том и только в том случае, если существует решение $u \notin L_2(G)$ задачи

$$\mathcal{A}(x, D_x)u(x) - \mu u(x) = 0, \quad x \in G,$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial G, \quad (2)$$

причём $|u(x)| \leq C(|x| + 1)^N$, $N < \infty$ (см. [1]). Такое решение называется собственной функцией непрерывного спектра. При всех μ , за исключением множества изолированных значений, собственные функции непрерывного спектра являются ограниченными. Эти изолированные значения называются порогами и накапливаются только на $+\infty$. Полуось $[\tau_1, +\infty)$ совпадает с непрерывным спектром опера-

Санкт-Петербургский государственный университет

*E-mail: b.plamenevskii@spbu.ru

**E-mail: st036768@student.spbu.ru

тора A ; здесь $\tau_1 > 0$ — наименьший из порогов. Обозначим через $\mathcal{E}_c(\mu)$ линейную оболочку собственных функций непрерывного спектра, отвечающих числу μ ; $\dim \mathcal{E}_c(\mu) < \infty$ при всех μ . Если μ не является собственным числом, то $\kappa(\mu) := \dim \mathcal{E}_c(\mu)$ называется кратностью непрерывного спектра в точке μ . Если же μ есть точка непрерывного спектра и собственное значение, то положим

$$\kappa(\mu) := \dim(\mathcal{E}_c(\mu)/\mathcal{E}_p(\mu)),$$

где $\mathcal{E}_c(\mu)/\mathcal{E}_p(\mu)$ — фактор-пространство, $\mathcal{E}_p(\mu)$ — подпространство собственных функций, отвечающих числу μ . Функция $\mu \mapsto \kappa(\mu)$ остаётся постоянной между соседними порогами.

3. ВОЛНЫ. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ

В каждом цилиндре $\Pi^q = \Omega^q \times \mathbb{R}$, $q = 1, \dots, T$, рассмотрим задачу вида (2) с заменой $a_{j,l}(y, z)$ на $a_{j,l}^q(y)$. Если искать решения этой модельной задачи в виде $(y, z) \mapsto \exp(i\lambda z)\varphi(y)$ с вещественными λ , то оказывается, что на интервале $\mu \in (\tau', \tau'')$ между соседними порогами τ', τ'' существует конечное число линейно независимых решений

$$u_j^\pm(y, z; \mu) = N_j^\pm(\mu) \exp(i\lambda_j^\pm(\mu)z) \varphi_j^\pm(y, \mu), \quad (3)$$

где $y \in \Omega^q$, $z \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, \kappa^q$. При этом функции $\mu \mapsto N_j^\pm(\mu)$, $\lambda_j^\pm(\mu)$, $\varphi_j^\pm(\cdot, \mu)$ являются вещественно-аналитическими на интервале $\mu \in (\tau', \tau'')$ и $\mp(\lambda_j^\pm)'(\mu) > 0$ (см. [7, п. 2.5]). Поток энергии, переносимый функцией u_j^+ (u_j^-) через сечение Ω^q в направлении оси z , отрицательный (положительный). Поэтому волна u_j^+ (u_j^-) называется приходящей из $+\infty$ (уходящей в $+\infty$). Нормировочный коэффициент $N_j^\pm(\mu)$ выбирается так, чтобы плотность потока, переносимого каждой волной, была равна единице.

Вернёмся к задаче (2) в области G . На интервале (τ', τ'') между соседними порогами τ' и τ'' существует базис в пространстве собственных функций непрерывного спектра $\mathcal{E}_c(\mu)/\mathcal{E}_p(\mu)$, состоящий из вещественно-аналитических функций $\mu \mapsto Y_j^+(\cdot, \mu)$, $j = 1, \dots, \kappa$, с асимптотикой

$$Y_j^+(x, \mu) = u_j^+(x, \mu) + \sum_{l=1}^{\kappa} S_{jl}(\mu) u_l^-(x, \mu) + O(e^{-\alpha|x|}), \quad (4)$$

$$j = 1, \dots, \kappa,$$

при $|x| \rightarrow \infty$. Здесь $\alpha = \alpha(\mu) > 0$ — достаточно малое число, которое ограничивается скоростью стабили-

зации коэффициентов ($\alpha < \delta$ из (1)) и расстоянием от μ до порога; на любом отрезке $[\mu', \mu''] \subset (\tau', \tau'')$ число α можно выбрать не зависящим от μ . Через u_j^+ и u_j^- обозначены приходящие и уходящие волны, введённые в цилиндрах $\Pi^1, \dots, \Pi^T$ и пронумерованные сквозным индексом $j = 1, \dots, \kappa$, $\kappa = \kappa^1 + \dots + \kappa^T$. При этом считается, что каждая из этих волн даётся выражением (3) в Π_+^q для некоторого q и равна нулю в Π_+^r при $r \neq q$. При переходе через порог набор волн и их нумерация меняются.

Матрица $S(\mu) = \|S_{jl}(\mu)\|$ является унитарной и называется матрицей рассеяния. Матрица-функция $\mu \mapsto S(\mu)$ определена на всём непрерывном спектре, за исключением порогов, и является вещественно-аналитической на каждом интервале между соседними порогами.

4. ПРИНЦИП ПРЕДЕЛЬНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ. СПЕКТРАЛЬНАЯ МЕРА

Обозначим через ρ_α гладкую положительную функцию в G , в каждом цилиндрическом выходе совпадающую с $e^{\alpha|x|}$, где α — число из (4), не зависящее от μ . Введём пространство $L_{2,\alpha}(G) = \{f: \rho_\alpha f \in L_2(G)\}$. Как обычно, $R(\mu)$ обозначает резольвенту $(A - \mu)^{-1}$, $\sigma_c(A)$ — непрерывный спектр, $\mathcal{H}_c$ — непрерывное подпространство оператора A (ортогональное дополнение в $L_2(G)$ к линейной оболочке собственных функций оператора A), $E(X)$ — спектральный проектор.

Лемма 1. Для любой функции $f \in L_{2,\alpha}(G) \cap \mathcal{H}_c$ и любого $\mu \in \sigma_c(A)$, отличного от порогов, существуют пределы $R(\mu \pm i0)f$, причём

$$R(\mu \pm i0)f(x) = \sum_{j=1}^{\kappa(\mu)} c_j^\mp(\mu) u_j^\mp(x; \mu) + O(e^{-\alpha(\mu)|x|}), \quad (5)$$

$$|x| \rightarrow \infty,$$

а коэффициенты в асимптотике вычисляются по формулам

$$c_j^\pm(\mu) = \mp i(f, Y_j^\pm), \quad (6)$$

где $Y_j^- = \sum_{k=1}^{\kappa(\mu)} S_{jk}^* Y_k^+$. Справедлива формула

$$R(\mu + i0)f - R(\mu - i0)f = -\sum_{j=1}^{\kappa} c_j^+(\mu) Y_j^+(\cdot, \mu). \quad (7)$$

Доказательство. Поясним основную идею. Выражение справа в (5) задаёт естественные условия излучения. Корректная постановка задачи

$$\begin{aligned} A(x, D_x)u(x) - \mu u(x) &= f(x), \quad x \in G, \\ u(x) &= 0, \quad x \in \partial G, \end{aligned} \quad (8)$$

с такими условиями излучения была обоснована в [1]. Соответствующие решения $u^\mp(x; \mu)$ допускают аналитическое продолжение в комплексную окрестность точки μ [2]. В силу (3) функции $u_j^\mp(x; \mu \pm i\epsilon)$ экспоненциально убывают при $\epsilon > 0$ и $|x| \rightarrow \infty$. Поэтому решения $u^\mp(x; \mu \pm i\epsilon)$ принадлежат $L_2(G)$ и совпадают с $R(\mu \pm i\epsilon)f$. Формулу (7) достаточно проверить при больших $|x|$.

Лемма 2. Пусть отрезок $[\mu', \mu''] \subset \sigma_c(A)$ свободен от порогов, $[\mu', \mu''] \supset X$ — произвольный интервал и $f, g \in L_{2,\alpha}(G) \cap \mathcal{H}_c$. Тогда

$$(E(X)f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_X \sum_{j=1}^k (f, Y_j^+)(Y_j^+, g) d\mu \quad (9)$$

и мера $X \mapsto (E(X)f, g)$ абсолютно непрерывна.

Доказательство. Согласно формуле Стоуна

$$(E(X)f, g) = \frac{1}{2\pi i} \int_X (R(\mu + i0)f - R(\mu - i0)f, g) d\mu.$$

Принимая во внимание (7) и (6), приходим к формуле (9). Отсюда следует, что мера $X \mapsto (E(X)f, g)$ абсолютно непрерывна. Действительно, равенство (9) распространяется на произвольные борелевские $X \subset [\mu', \mu'']$ и для таких X приводит к оценке $|(E(X)f, g)| \leq c|X|$, где постоянная

$$c = \frac{1}{2\pi} \sup_{\mu \in [\mu', \mu'']} \sum_{j=1}^k |(f, Y_j^+)(Y_j^+, g)|$$

конечна вследствие аналитичности функций $\mu \mapsto Y_j^+(\cdot; \mu)$ и не зависит от X .

Следствие 1. Абсолютно непрерывный спектр $\sigma_{ac}(A)$ оператора A совпадает с отрезком $[\tau_1, +\infty)$, сингулярно непрерывный спектр отсутствует.

5. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА A

Пусть $\{\tau_j\}_{j=1}^\infty$ — последовательность порогов оператора A в G , пронумерованных в порядке возрастания, κ_j — кратность непрерывного спектра на (τ_j, τ_{j+1}) , а $\{Y_{jk}^+\}_{k=1}^{\kappa_j}$ и $\{Y_{jk}^-\}_{k=1}^{\kappa_j}$ — базисы собственных функций непрерывного спектра. Для $f \in L_{2,\alpha}(G) \cap \mathcal{H}_c$ и $\mu \in (\tau_j, \tau_{j+1})$ введём вектор-столбец

$$(\Phi^\pm f)(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{(f, Y_{jk}^\pm(\cdot, \mu))\}_{k=1}^{\kappa_j}.$$

Функция $\mu \mapsto (\Phi^\pm f)(\mu)$ задана на $\sigma_{ac}(A)$, за исключением порогов. Пусть ещё $\mathfrak{h}$ — гильбертово пространство вектор-функций $g \in \bigoplus_{j=1}^\infty L_2((\tau_j, \tau_{j+1}); \mathbb{C}^{\kappa_j})$ со скалярным произведением

$$(g, h)_\mathfrak{h} = \sum_{j=1}^\infty \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \sum_{k=1}^{\kappa_j} g_{jk}(\mu) \overline{h_{jk}(\mu)} d\mu.$$

По определению абсолютно непрерывное подпространство $\mathcal{H}_{ac}$ оператора A состоит из таких элементов $f \in \mathcal{H}_c$, что функция $\mu \mapsto (E(-\infty, \mu)f, f)$ абсолютно непрерывна. Согласно следствию 1 имеем $\mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}_c$. Через P_{ac} обозначается ортогональный проектор на $\mathcal{H}_{ac}$.

Лемма 3. Для любых $f, g \in L_{2,\alpha}(G) \cap \mathcal{H}_{ac}$ справедлива формула

$$(\Phi^\pm f, \Phi^\pm g)_\mathfrak{h} = (f, g)_{L_2(G)}.$$

Доказательство. Пусть τ_j, τ_{j+1} — какая-нибудь пара соседних порогов. Из абсолютной непрерывности функции $\mu \mapsto (E(\tau_1, \mu)f, f)$ следует, что её производная суммируема на всём отрезке (τ_j, τ_{j+1}) . Из (9) при $g=f$ вытекает формула

$$\frac{d}{d\mu} (E(\tau_1, \mu)f, f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\kappa_j} |(f, Y_{jk}^+(\cdot, \mu))|^2.$$

Суммируемость левой части на (τ_j, τ_{j+1}) означает, что функция $\mu \mapsto (f, Y_{jk}^+(\cdot, \mu))$ может иметь на порогах разве лишь квадратично интегрируемую особенность.

Положим в (9) $X = (\tau_j, \tau_{j+1})$ и просуммируем полученные равенства по j от 1 до J , тогда

$$(E(\tau_1, \tau_{J+1})f, g) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^J \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \sum_{k=1}^{\kappa_j} (f, Y_{jk}^+)(Y_{jk}^+, g) d\mu.$$

Так как $E(\tau_1, +\infty)P_{ac} = P_{ac}$ и $f, g \in \mathcal{H}_{ac}$, то существует предел при $J \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} (f, g) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^\infty \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \sum_{k=1}^{\kappa_j} (f, Y_{jk}^+)(Y_{jk}^+, g) d\mu = \\ &= (\Phi^\pm f, \Phi^\pm g)_\mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Отображения $\Phi^\pm$ продолжаются по непрерывности на всё подпространство $\mathcal{H}_{ac}$. Так как собственные функции непрерывного спектра $Y_{jk}^\pm$ ортогональны любой собственной функции, то $\Phi^\pm$ определены на подпространстве $\mathcal{H}_p$, причём $\Phi^\pm|_{\mathcal{H}_p} = 0$.

Лемма 4. *Справедливы соотношения*

$$(\Phi^\pm)^* \Phi^\pm = P_{ac}, \quad \Phi^\pm (\Phi^\pm)^* = I, \quad \Phi^\pm A = \mu \Phi^\pm.$$

6. ВОЛНОВОЙ ОПЕРАТОР ОПЕРАТОР РАССЕЯНИЯ

Пусть $G_0^q \subset G \cap \Pi_+^q$ — область с гладкой границей, на достаточно большом расстоянии совпадающая с $G \cap \Pi_+^q$. Положим $G_0 := \cup_q G_0^q$. Через A_0 обозначим оператор в $L_2(G_0)$, заданный дифференциальным выражением $\mathcal{A}(x, D_x)$ на области определения $\mathcal{D}(A_0) = H^2(G_0) \cap H_0^1(G_0)$, ниже он играет роль невозмущённого оператора. Множества порогов, кратность непрерывного спектра и наборы приходящих и уходящих волн для волноводов G и G_0 совпадают. Собственные функции непрерывного спектра в волноводе G_0 обозначим через $Y_{0jk}^\pm$, а соответствующие спектральные преобразования — через $\Phi_0^\pm$.

Пусть χ — срезка в G_0 , равная единице при $|x| \geq t_0$ и нулю при $|x| \leq t_0 - 1$, где t_0 — достаточно большое положительное число. Оператор отождествления $J: L_2(G_0) \rightarrow L_2(G)$ действует как композиция оператора умножения на χ и оператора продолжения нулём на G . Волновые операторы $W^\pm$ определяются соотношением $W^\pm f := \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iAt} J e^{-iA_0 t} f$.

Теорема 1. *Справедливо равенство $W^\pm f = (\Phi^\mp)^* \Phi_0^\mp f$.*

Вычислим оператор рассеяния

$$S = (W^+)^* W^- = ((\Phi^-)^* \Phi_0^-)^* (\Phi^+)^* \Phi_0^+ = (\Phi_0^-)^* S' \Phi_0^+;$$

здесь учтены соотношения $(\Phi^- f)(\mu) = S'(\mu)(\Phi^+ f)(\mu)$ и $\Phi^+ (\Phi^+)^* = I$. Отметим, что $S'(\mu) = S(\mu)$, если коэффициенты оператора $\mathcal{A}(x, D_x)$ вещественные. Так как

$$(\Phi_0^-)^* g = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \sum_{k=1}^{\kappa_j} Y_{0jk}^-(\cdot, \mu) g_{jk}(\mu) d\mu,$$

то S — интегральный оператор с ядром

$$G(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \sum_{k,l=1}^{\kappa_j} S_{lk}(\mu) Y_{0jk}^-(x, \mu) \overline{Y_{0jl}^+(y, \mu)} d\mu.$$

Из леммы 4 следуют полнота волновых операторов и унитарность оператора рассеяния на абсолютно непрерывном подпространстве оператора A_0 .

Работы Лайфорда [3, 4] посвящены теории рассеяния для волнового уравнения в волноводах с несколькими цилиндрическими выходами. В статье [5] был отмечен пробел в рассуждениях Лайфорда и предложен способ его устранения. В нашей работе развивается другой подход к спектральному анализу стационарной задачи в волноводе, не использующий специфики оператора Лапласа и методов теории возмущений, в частности уравнения Липпмана—Швингера. Это позволяет ввести в рассмотрение операторы с переменными коэффициентами.

Источник финансирования. Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 17–11–01126.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nazarov S.A., Plamenevskii B.A. Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundaries. B.: Walter de Gruyter, 1994.
2. Plamenevskii B.A., Poretskii A.S. Behavior of Waveguide Scattering Matrices in a Neighborhood of Thresholds // Saint Petersburg Mathematical Journal. 2019. V. 30. № 2. P. 285–319. DOI: 10.1090/spmj/1543.
3. Lyford W.C. Spectral Analysis of the Laplacian in Domains with Cylinders // Math Ann. 1975. V. 218. № 3. P. 229–251. DOI: 10.1007/BF01349697.
4. Lyford W.C. A Two Hilbert Space Scattering Theorem // Math. Ann. 1975. V. 217. № 3. P. 257–261. DOI: 10.1007/BF01436177.
5. Picard R., Seidler S. A Remark on Two-Hilbert-Space Scattering Theory // Math. Ann. 1984. V. 269. № 3. P. 411–415. DOI: 10.1007/BF01450702.

MATHEMATICAL SCATTERING THEORY IN QUANTUM WAVEGUIDES**B. A. Plamenevskii, A. S. Poretskii, O. V. Sarafanov***Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS N. F. Morozov May 29, 2019

Received June 17, 2019

A waveguide occupies a domain G with several cylindrical ends. The waveguide is described by a nonstationary equation of the form $i\partial_t f = \mathcal{A}f$, where $\mathcal{A}$ is a selfadjoint second order elliptic operator with variable coefficients (in particular, for $\mathcal{A} = -\Delta$, where Δ stands for the Laplace operator, the equation coincides with the Schrodinger equation). For the corresponding stationary problem with spectral parameter, we define continuous spectrum eigenfunctions and a scattering matrix. The limiting absorption principle provides expansion in the continuous spectrum eigenfunctions. We also calculate wave operators and prove their completeness. Then we define a scattering operator and describe its connections with the scattering matrix.

Keywords: waveguide, scattering matrix, limiting absorption principle, wave operators, scattering operator.