ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, *2019*, *том 489*, *№ 2*, *с. 147–151*

МЕХАНИКА

УДК 62-50

ОСУЩЕСТВЛЕНИЕ ЗАДАННОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА ОТНОСИТЕЛЬНО СВОЕГО ЦЕНТРА МАСС ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

А. М. Шматков

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноусько 21.05.2019 г.

Поступило 22.05.2019 г.

При отсутствии внешних сил для механической системы, состоящей из взаимодействующих твёрдого тела и материальной точки, построен закон перемещения точки, реализующий заданное движение тела в системе координат Кёнига. Найдены условия, которым должно удовлетворять это движение. Результат может быть использован как при создании капсульных роботов, так и при управлении космическими аппаратами. Приведён пример применения полученной формулы.

Ключевые слова: управление с помощью подвижной массы, оси Кёнига, осуществление заданного движения.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524892147-151

1. В робототехнике при необходимости функционирования устройства в агрессивной среде целесообразно применять герметический корпус. Это затрудняет использование обычных движителей: колёс, гусениц, ног и т.п. Использование движущейся внутренней массы позволяет избежать указанных сложностей [1–3]. Помимо этого движущуюся массу можно использовать и для управления ориентацией космических аппаратов. Тогда материальная точка не обязана быть внутренней.

Возьмём механическую систему, состоящую только из твёрдого тела и материальной точки, причём в начальный момент времени оба объекта покоятся. Пусть тело имеет массу M и тензор инерции $\mathbf{J}$ относительно своего центра масс, а масса точки равна m. Предположим, что внешние силы отсутствуют и тем самым точка может взаимодействовать с телом только с помощью внутренних сил. Рассмотрим задачу осуществления с помощью перемещения точечной массы предписанного движения твёрдого тела в кёниговых осях [4], т.е. в поступательно перемещающейся системе координат с началом в центре масс тела.

Из того что центр масс всей системы O покоится, а также из законов сохранения количества движения и углового момента для системы в целом, вытекают три соотношения в неподвижной системе координат с началом в точке O. Для радиус-вектора центра масс тела получено [5]

$$\mathbf{R}_C = -\mu r, \quad \mu = \frac{m}{m+M}, \tag{1}$$

где $\mathbf{R}_C$ — радиус-вектор точки C; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор материальной точки относительно точки C, так что радиус-вектор материальной точки относительно точки O равен сумме $\mathbf{R}_C + \mathbf{r}$. Для абсолютной скорости центра масс тела получено [5]

$$\mathbf{v}_C = -\mu(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}), \tag{2}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость тела, $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки относительно жёстко связанной с телом подвижной системы координат с началом в центре масс C тела, $\times$ означает векторное произведение. Основное же соотношение имеет вид [5]

$$c\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}) = 0, \quad c = \frac{M+m}{Mm}. \tag{3}$$

2. Как известно [6], движение твёрдого тела относительно центра масс как функцию времени можно задать по-разному: с помощью ортогональных матриц, углов Крылова, параметров Эйлера и т.д. Все эти способы позволяют найти функцию $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(t)$ в неподвижной системе координат. Цель данной работы — построить движение материальной точки, реализующее эту функцию. Из соотношения (1) следует, что вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, задающий положение точечной массы, однозначно определён, если известен радиус-вектор центра масс тела $\mathbf{R}_C = \mathbf{R}_C(t)$. Следовательно, вместо движения материальной точки можно искать движение центра масс C.

Перед тем как сформулировать математическую задачу, преобразуем основное соотношение (3). Под-

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, *Москва*
E-mail: *shmatkov@ipmnet.ru*

ставим в него выражение для $\mathbf{r}$ из (1) и выражение для $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}$ из (2). Получим

$$c\mu^2 \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}_C \times \mathbf{v}_C = 0. \tag{4}$$

Будем обозначать точкой над символом полную производную соответствующей функции по времени в неподвижной системе координат. Тогда (4) можно записать в форме

$$c\mu^2 \xi + \mathbf{R}_C \times \dot{\mathbf{R}}_C = 0, \quad \xi = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \tag{5}$$

Таким образом, задача состоит в том, чтобы по известному вектору $\xi = \xi(t)$, заданному своими компонентами в неподвижной системе координат с началом в центре масс системы O, найти вектор $\mathbf{R}_C = \mathbf{R}_C(t)$, удовлетворяющий уравнению (5).

Условия, которым должно удовлетворять предписанное движение для того, чтобы его можно было реализовать перемещением материальной точки, сформулируем позднее.

Заметим, что при невырожденной матрице $\mathbf{J}$ с помощью вектора $\xi = \xi(t)$, заданного своими компонентами в неподвижной системе координат, можно однозначно найти ориентацию тела в любой момент времени, если она известна в начальный. Например, можно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений для соответствующей [6] ортогональной матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t)$ с начальным значением $\mathbf{A}_0$:

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{A}^{\top}\xi, \quad \mathbf{A}(0) = \mathbf{A}_0,$$

где тензор $\mathbf{J}$ и вектор $\boldsymbol{\omega}$ заданы в жёстко связанной с телом системе координат, образованной главными центральными осями инерции тела, а кососимметрическая матрица $\boldsymbol{\Omega}$ состоит из компонентов вектора $\boldsymbol{\omega}$.

3. При $\xi = 0$ из (5) следует, что вектор $\mathbf{R}_C$ коллинеарен вектору $\dot{\mathbf{R}}_C$. Тогда центр масс тела должен двигаться по прямой, проходящей через точку O, а в остальном $\mathbf{R}_C = \mathbf{R}_C(t)$ — произвольная дифференцируемая функция. В дальнейшем будем предполагать, что $\xi \neq 0$.

4. Рассмотрим случай, когда векторы ξ и $\dot{\xi}$ неколлинеарны. Из (5) следует тождественное по времени равенство нулю двух выражений

$$(\xi, \mathbf{R}_C) = 0, \quad (\xi, \dot{\mathbf{R}}_C) = 0, \tag{6}$$

где через $(\cdot, \ \cdot)$ обозначено скалярное произведение. Тогда из первого соотношения в (6) имеем

$$\frac{d}{dt}(\xi, \mathbf{R}_C) = (\dot{\xi}, \mathbf{R}_C) + (\xi, \dot{\mathbf{R}}_C) = (\dot{\xi}, \mathbf{R}_C) = 0,$$

где использовано последнее соотношение из (6). Следовательно, вектор $\mathbf{R}_C$ во все моменты времени должен быть ортогонален векторам ξ и $\dot{\xi}$. Поэтому будем искать $\mathbf{R}_C$ в форме

$$\mathbf{R}_C = \zeta(t)\xi \times \dot{\xi}, \tag{7}$$

где $\zeta(t)$ — неизвестная дифференцируемая функция. Из (7) следует

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}}_C &= \dot{\zeta}\xi \times \dot{\xi} + \zeta\frac{d}{dt}(\xi \times \dot{\xi}) = \\ &= \dot{\zeta}\xi \times \dot{\xi} + \zeta\dot{\xi} \times \dot{\xi} + \zeta\xi \times \ddot{\xi} = \dot{\zeta}\xi \times \dot{\xi} + \zeta\xi \times \ddot{\xi}.\end{aligned} \tag{8}$$

Из (8) имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_C \times \dot{\mathbf{R}}_C &= (\zeta\xi \times \dot{\xi}) \times (\dot{\zeta}\xi \times \dot{\xi} + \zeta\xi \times \ddot{\xi}) = \\ &= \zeta^2(\xi \times \dot{\xi}) \times (\xi \times \ddot{\xi}).\end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим через $(\cdot, \cdot, \cdot)$ смешанное произведение и получим

$$\begin{aligned}(\xi \times \dot{\xi}) \times (\xi \times \ddot{\xi}) &= \xi(\xi \times \dot{\xi}, \ddot{\xi}) - \ddot{\xi}(\xi \times \dot{\xi}, \xi) = \\ &= \xi(\ddot{\xi}, \xi \times \dot{\xi}) = \xi(\ddot{\xi}, \xi, \dot{\xi}).\end{aligned} \tag{10}$$

Подставим (9) в (5) с учётом (10). Имеем

$$c\mu^2\xi + \zeta^2(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi})\xi = 0. \tag{11}$$

Поскольку $\xi \neq 0$, из (11) следует

$$\zeta^2 = \frac{-c\mu^2}{(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi})}. \tag{12}$$

Подстановка (12) в (7) даёт ответ для рассматриваемого случая:

$$\mathbf{R}_C = \pm\mu\sqrt{\frac{c}{-(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi})}}\xi \times \dot{\xi}. \tag{13}$$

Из формулы (13) вытекает, что вектор ξ должен иметь третью производную по времени (для существования вектора $\dot{\mathbf{R}}_C$) и, кроме того, должно выполняться неравенство $(\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}) < 0$.

Заметим, что (13) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{gathered}\mathbf{R}_C = \pm\mu\sqrt{\frac{c}{-\kappa}}\mathbf{b}, \quad \mathbf{b} = \frac{\dot{\chi} \times \ddot{\chi}}{|\dot{\chi} \times \ddot{\chi}|}, \\ \kappa = \frac{(\dot{\chi}, \ddot{\chi}, \dddot{\chi})}{|\dot{\chi} \times \ddot{\chi}|^2}, \quad \chi(t) = \int_0^t \xi(\tau)d\tau,\end{gathered} \tag{14}$$

где единичный вектор $\mathbf{b}$ — бинормаль, а величина κ — кручение кривой, задаваемой вектором χ.

5. Поскольку вектор бинормали неопределён в точках распрямления кривой [7], то для случая, когда векторы ξ и $\dot{\xi}$ коллинеарны, решение следует найти отдельно. Предположим, что искомый вектор имеет вид

$$\mathbf{R}_C^{\parallel} = \zeta_\eta(t)\xi \times \eta, \tag{15}$$

где $\zeta_\eta(t)$ — неизвестная дифференцируемая функция, а условия на вектор η сформулируем позже. Из (15) следует

$$\dot{\mathbf{R}}_C^{\parallel} = \dot{\zeta}_\eta \xi \times \eta + \zeta_\eta \frac{d}{dt}(\xi \times \eta) = \\ = \dot{\zeta}_\eta \xi \times \eta + \zeta_\eta \dot{\xi} \times \eta + \zeta_\eta \xi \times \dot{\eta}. \tag{16}$$

Из (15) и (16) получаем

$$\mathbf{R}_C^{\parallel} \times \dot{\mathbf{R}}_C^{\parallel} = (\zeta_\eta \xi \times \eta) \times \\ \times (\dot{\zeta}_\eta \xi \times \eta + \zeta_\eta \dot{\xi} \times \eta + \zeta_\eta \xi \times \dot{\eta}) = \\ = \zeta_\eta^2 (\xi \times \eta) \times (\dot{\xi} \times \eta + \xi \times \dot{\eta}). \tag{17}$$

Выполним преобразование

$$(\xi \times \eta) \times (\dot{\xi} \times \eta) = \dot{\xi}(\xi \times \eta, \eta) - \eta(\xi \times \eta, \dot{\xi}). \tag{18}$$

Оба слагаемых в правой части (18) равны нулю, причём второе — из-за коллинеарности векторов ξ и $\dot{\xi}$. Кроме того, получим

$$(\xi \times \eta) \times (\xi \times \dot{\eta}) = \xi(\xi \times \eta, \dot{\eta}) - \dot{\eta}(\xi \times \eta, \xi) = \\ = \xi(\dot{\eta}, \xi \times \eta) = \xi(\dot{\eta}, \xi, \eta). \tag{19}$$

Подставим (17) в (4) с учётом (18) и (19). Тогда

$$c\mu^2 \xi + \zeta_\eta^2 (\xi, \eta, \dot{\eta})\xi = 0. \tag{20}$$

Так как $\xi \neq 0$, то из (20) имеем

$$\zeta_\eta^2 = \frac{-c\mu^2}{(\xi, \eta, \dot{\eta})}. \tag{21}$$

Подстановка (21) в (15) даёт искомый вектор

$$\mathbf{R}_C^{\parallel} = \pm\mu\sqrt{\frac{c}{-(\xi, \eta, \dot{\eta})}}\xi \times \eta. \tag{22}$$

Покажем, что вектор $\eta \neq 0$ в (22) можно без ограничения общности выбирать единичным. Запишем его в форме

$$\eta = \varrho\rho, \quad |\rho| = 1, \quad \varrho = |\eta| > 0, \tag{23}$$

где ρ — произвольный единичный вектор, имеющий вторую производную по времени, причём $(\xi, \rho, \dot{\rho}) < 0$. С учётом (23) имеем

$$(\xi, \eta, \dot{\eta}) = \left(\xi, \varrho\rho, \frac{d(\varrho\rho)}{dt}\right) = (\xi, \varrho\rho, \dot{\varrho}\rho + \varrho\dot{\rho}) = \\ = (\xi, \varrho\rho, \varrho\dot{\rho}) + (\xi, \varrho\rho, \dot{\varrho}\rho). \tag{24}$$

Второе слагаемое в правой части (24) равно нулю, а потому

$$(\xi, \eta, \dot{\eta}) = \varrho^2(\xi, \rho, \dot{\rho}). \tag{25}$$

После подстановки (23) и (25) в (22) получаем

$$\mathbf{R}_C^{\parallel} = \pm\mu\sqrt{\frac{c}{-\varrho^2(\xi, \rho, \dot{\rho})}}\xi \times (\varrho\rho) = \\ = \pm\mu\sqrt{\frac{c}{-(\xi, \rho, \dot{\rho})}}\xi \times \rho.$$

Следовательно, вектор $\mathbf{R}_C^{\parallel}$, определяемый (22), зависит от двух произвольных скалярных функций времени, в качестве которых могут выступать, например, два угла при записи единичного вектора η в сферических координатах, причём должен существовать вектор $\ddot{\eta}$ и $(\xi, \eta, \dot{\eta}) < 0$. Заметим, что при неколлинеарных векторах ξ и $\dot{\xi}$ искомый вектор определён однозначно формулой (14).

Вектор $\mathbf{R}_C^{\parallel}$ всегда лежит в одной и той же плоскости, ортогональной вектору ξ, поскольку из (22) и (16) видно, что векторы $\mathbf{R}_C^{\parallel}$ и $\dot{\mathbf{R}}_C^{\parallel}$ ортогональны вектору ξ, который всегда лежит на одной и той же прямой из-за коллинеарности с вектором $\dot{\xi}$. Вектор ω при этом может по-разному зависеть от времени. В частности, для динамически симметричного тела при $\dot{\xi} \equiv 0$ и ненулевом начальном угле между вектором ξ и осью динамической симметрии будет реализована регулярная прецессия в кёниговой системе координат, аналогичная прецессии, имеющей место в случае Эйлера [4].

4. Рассмотрим пример использования общей формулы (13), основанный на известной задаче о качении конуса по плоскости. Для определённости возьмём вариант из [4], где плоскость неподвижна и горизонтальна, а качение происходит без проскальзывания. На рис. 1 показано сечение $U_1U_2U_3$ вертикальной плоскостью в начальный момент времени $t_0 = 0$ однородного кругового конуса массой M, высотой h и углом 2α при закреплённой вершине U_1. В [4] центру его основания сообщена горизонтальная скорость v и конус осуществляет регулярную прецессию под действием момента внешних сил. Мгновенная ось вращения содержит отрезок U_1U_2, лежащий на плоскости качения, а мгновенная угловая скорость ω может быть представлена как сумма угловой скорости собственного вращения ω_1, направленной вдоль оси симметрии конуса, и угловой скорости прецессии ω_2, направленной вертикально вниз. С телом жёстко связана подвижная система координат Cxy с центром в центре масс конуса C, ось Cz которой направлена вдоль оси симметрии конуса, а оси Cx и Cy параллельны основанию, причём ось Cx в момент времени $t_0 = 0$ перпендикулярна плоскости рисунка и направлена на читателя. Вектор

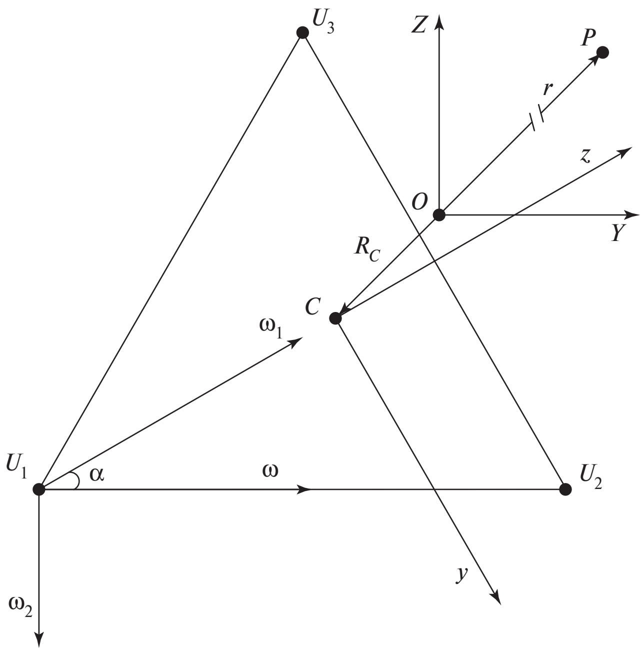

Рис. 1. Сечение конуса вертикальной плоскостью в начальный момент времени.

кинетического момента $\mathbf{K} = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}$ в этой системе имеет следующие проекции [4], выраженные через углы Эйлера:

$$\mathbf{K}_x = J_A\omega_2\sin\theta\sin\varphi,$$
$$\mathbf{K}_y = J_A\omega_2\sin\theta\cos\varphi,$$
$$\mathbf{K}_z = J_C\omega_2\cos\theta + \omega_1,$$

где J_A — экваториальный, а J_C — полярный моменты инерции конуса, $\varphi = \varphi(t)$ — угол собственного вращения, причём $\varphi(0) = 0$. Кроме того,

$$\dot{\varphi} = \omega_1 = \frac{\omega}{\cos\alpha}, \quad \omega_2 = \omega\,\mathrm{tg}\,\alpha, \quad \omega = \frac{v}{h\sin\alpha}.$$

Заметим, что угол нутации θ между векторами $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ постоянен и равен $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$.

В неподвижной системе координат OXY с вертикальной осью OZ, горизонтальной осью OY и осью OX, сонаправленной в начальный момент времени оси Cx, вектор $\mathbf{K}$ имеет проекции

$$\begin{gathered} K_X = \Phi\sigma\sin(\omega_1 t), \\ K_Y = \Phi\sin\alpha(\sigma\cos(\omega_1 t) + 2\cos^2\alpha), \\ K_Z = -\Phi\cos\alpha(\sigma\cos(\omega_1 t) - 2\sin^2\alpha), \\ \Phi = \frac{3}{20}\frac{Mhv}{\cos^2\alpha}, \end{gathered} \tag{26}$$

где $\sigma = 3\cos^2\alpha + 1$. Эти проекции и будем использовать в качестве компонент вектора $\boldsymbol{\xi}$ в (13). Смешанное произведение отрицательно:

$$\sqrt{-(\xi,\,\dot{\xi},\,\ddot{\xi})} = \frac{3\sqrt{30}}{200}\frac{\sigma v^3 M\sqrt{M}}{\sin\alpha\cos^4\alpha},$$

что позволяет реализовать движение в кёниговых осях. Из (13), учитывая (1), получаем компоненты вектора $\mathbf{r}$ в системе координат Cxy:

$$\begin{gathered} r_x = -r_{xy}\sin(\omega_1 t), \quad r_y = -r_{xy}\cos(\omega_1 t), \\ r_z = \frac{\sqrt{30}}{20}\frac{\sigma h}{\sqrt{\mu}\cos\alpha}, \end{gathered} \tag{27}$$

где $r_{xy} = \dfrac{\sqrt{30}h\sin\alpha}{10\sqrt{\mu}}$. Из (27) следует, что материальная точка должна равномерно вращаться по окружности радиуса r_{xy} вокруг оси симметрии конуса в плоскости, лежащей на расстоянии r_z от его центра масс, с частотой, равной частоте собственного вращения конуса. Заметим, что величина r_z может оказаться значительной. Например, при $m = 0{,}01$ кг, $M = 0{,}1$ кг, $h = 0{,}1$ м и $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ формулы (27) дают $r_z \approx 0{,}34$ м, в то время как $r_{xy} \approx 0{,}09$ м. Поэтому на рис. 1 радиус-вектор $\mathbf{r}$ положения материальной точки P показан с разрывом, а центр масс всей системы O существенно смещён относительно центра масс конуса C.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 18–11–00307).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schmoeckel F., Worn H.* Remotely Controllable Microrobots Acting as Nano Positioners and Intelligent Tweezers in Scanning Electron Microscopes (SEMs) // Proc. Intern. Conf. Robotics and Automation. IEEE. N.Y., 2001. V. 4. P. 3903–3913.
2. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Dynamics, Design and Simulation of a Novel Microrobotic Platform Employing Vibration Microactuators // Transactions of ASME. J. Dynamical Systems, Measurement and Control. 2006. V. 128. P. 122–133.
3. *Chernousko F.L.* Two-Dimensional Motions of a Body Containing Internal Moving Masses // Meccanica. 2016. V. 51. № 12. P. 3203–3209.
4. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
5. *Черноусько Ф.Л.* Управление ориентацией твердого тела с помощью внутренней массы // Прикладная механика и техн. физика. 2019. № 2. С. 107–112.
6. *Журавлев В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.
7. *Рашевский П.К.* Курс дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.

THE IMPLEMENTATION OF A GIVEN MOTION OF A RIGID BODY RELATIVE TO ITS CENTER OF MASS BY MOVING THE MATERIAL POINT

A. M. Shmatkov

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics, *Russian Academy of Sciences*, *Moscow*, *Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS F.L. Chernousko May 21, 2019

Received May 22, 2019

In the absence of external forces for a mechanical system consisting of an interacting solid body and a material point, a law of movement of a point is constructed that realizes a given body motion in the Koenig coordinate system. Conditions found that this movement has to satisfy. The result can be used both to create capsule robots and to control spacecraft. An example of applying the obtained formula is given.

Keywords: control using the moving mass, Koenig axes, realization of the given movement.