ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 489, № 3, с. 227–231

МАТЕМАТИКА

УДК 517+519.2

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИОННОЙ ТЕОРЕМЕ НА *a*-АДИЧЕСКИХ СОЛЕНОИДАХ

Г. М. Фельдман

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 17.06.2019 г.

Поступило 25.06.2019 г.

Согласно теореме Хейде гауссовское распределение на вещественной прямой характеризуется симметрией условного распределения одной линейной формы от независимых случайных величин при фиксированной второй. Мы доказываем аналог этой теоремы для линейных форм от двух независимых случайных величин, принимающих значения в ***a***-адическом соленоиде, не содержащем элементов порядка 2, в предположении, что характеристические функции случайных величин не обращаются в ноль, а коэффициенты линейных форм — топологические автоморфизмы ***a***-адического соленоида.

Ключевые слова: ***a***-адический соленоид, гауссовское распределение, топологический автоморфизм.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524893227-231

Хорошо известна теорема Хейде, характеризующая гауссовское распределение на вещественной прямой симметрией условного распределения одной линейной формы от независимых случайных величин при фиксированной второй ([1], см. также [2, § 13.4.1]). Для двух независимых случайных величин эта теорема может быть сформулирована следующим образом.

Теорема Хейде. *Пусть* ξ_1 *и* ξ_2 *— независимые случайные величины с распределениями* μ_1 *и* μ_2. *Предположим, что условное распределение линейной формы* $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ *при фиксированной* $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ *симметрично. Если* $\alpha \neq -1$, *то* μ_1 *и* μ_2 *— гауссовские распределения, может быть, вырожденные.*

Групповым аналогам теоремы Хейде в случае, когда независимые случайные величины принимают значения в локально компактной абелевой группе X, а коэффициентами линейных форм являются топологические автоморфизмы X, посвящены, в частности, работы [3–11] (см. также [12, гл. VI]). Отметим, что во всех цитированных работах соответствующие характеризационные теоремы доказывались при тех или иных ограничениях на коэффициенты линейных форм. В настоящей работе мы докажем аналог теоремы Хейде для двух независимых случайных величин, принимающих значения в произвольном ***a***-адическом соленоиде $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$, не содержащем элементов порядка 2, в предположении, что характеристические функции рассматриваемых случайных величин не обращаются в ноль. При этом мы не налагаем никаких ограничений на коэффициенты линейных форм.

Прежде чем сформулировать основную теорему, напомним некоторые определения и условимся об обозначениях. Пусть X — локально компактная абелева группа, удовлетворяющая второй аксиоме счётности. Мы будем рассматривать только такие группы, специально не оговаривая этого. Обозначим через $\mathrm{Aut}(X)$ группу топологических автоморфизмов группы X, а через I — тождественный автоморфизм группы. Обозначим через Y группу характеров группы X. Обозначим через (x, y) значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$. Сопряжённый автоморфизм $\tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(Y)$ определяется по формуле $(\alpha x, y) = (x, \tilde{\alpha} y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Обозначим через $\mathbb{C}$ множество комплексных чисел, через $\mathbb{R}$ — группу вещественных чисел, через $\mathbb{Z}$ — группу целых чисел, через $\mathbb{Z}(m) = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ — группу вычетов по модулю m и через $\mathbb{T}$ — группу вращений окружности. Пусть n — целое число. Обозначим через $f_n\colon X \mapsto X$ эндоморфизм группы X, определяемый формулой $f_n(x) = nx$, $x \in X$. Положим $X^{(n)} = f_n(X)$, $X_{(n)} = \mathrm{Ker}\, f_n$.

Если μ — мера или заряд на группе X, то характеристическая функция (преобразование Фурье) μ определяется по формуле

$$\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y) d\mu(x), \quad y \in Y.$$

Через $\mathrm{M}^1(X)$ обозначим свёрточную полугруппу вероятностных мер (распределений) на группе X.

Физико-технический институт низких температур им. Б.И. Веркина Национальной академии наук Украины, Харьков, Украина
E-mail: *feldman@ilt.kharkov.ua*

Пусть $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$. Определим распределение $\bar{\mu} \in \mathrm{M}^1(X)$ по формуле $\bar{\mu}(B) = \mu(-B)$ для любого борелевского подмножества B в X. Тогда $\hat{\bar{\mu}}(y) = \overline{\hat{\mu}(y)}$. Если G — борелевская подгруппа в X, через $\mathrm{M}^1(G)$ будем обозначать подполугруппу в $\mathrm{M}^1(X)$, состоящую из распределений, сосредоточенных на G. Распределение $\gamma \in \mathrm{M}^1(X)$ называется гауссовским [13, гл. IV], если его характеристическая функция представима в виде

$$\hat{\gamma}(y) = (x, y)\exp\{-\varphi(y)\}, \quad y \in Y, \tag{1}$$

где $x \in X$, а $\varphi(y)$ — непрерывная неотрицательная функция на группе Y, удовлетворяющая уравнению

$$\varphi(u + v) + \varphi(u - v) = 2[\varphi(u) + \varphi(v)], \quad u, v \in Y. \tag{2}$$

В частности, вырожденные распределения являются гауссовскими. Обозначим через $\Gamma(X)$ множество гауссовских распределений на группе X. Обозначим через E_x вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $x \in X$.

Напомним определение $\boldsymbol{a}$-адического соленоида. Положим $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots)$, где все $a_j \in \mathbb{Z}$, $a_j > 1$. Обозначим через $\Delta_{\boldsymbol{a}}$ группу целых $\boldsymbol{a}$-адических чисел. Рассмотрим группу $\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}}$. Обозначим через B подгруппу группы $\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}}$ вида $B = \{(n, n\mathbf{u})\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где $\mathbf{u} = (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Фактор-группа $\Sigma_{\boldsymbol{a}} = (\mathbb{R} \times \Delta_{\boldsymbol{a}})/B$ называется $\boldsymbol{a}$-адическим соленоидом. Группа $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ компактна, связна и имеет размерность 1 [14, (10.12), (10.13), (24.28)]. Группа характеров группы $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ топологически изоморфна дискретной группе вида

$$H_{\boldsymbol{a}} = \left\{\frac{m}{a_0 a_1 \ldots a_n} : n = 0, 1, \ldots; m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Чтобы не усложнять обозначения, мы будем отождествлять $H_{\boldsymbol{a}}$ с группой характеров группы $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$. Мы будем рассматривать также $H_{\boldsymbol{a}}$ как подмножество в $\mathbb{R}$. Каждый топологический автоморфизм α группы $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ имеет вид $\alpha = f_p f_q^{-1}$ для некоторых взаимно простых p и q, где $f_p, f_q \in \mathrm{Aut}(\Sigma_{\boldsymbol{a}})$. Мы будем отождествлять $\alpha = f_p f_q^{-1}$ с вещественным числом $\frac{p}{q}$. Если $\alpha = f_p f_q^{-1}$, то $\tilde{\alpha} = f_p f_q^{-1}$, и мы также будем отождествлять $\tilde{\alpha}$ с вещественным числом $\frac{p}{q}$. Заметим также, что если $\alpha \neq -I$, то либо $\mathrm{Ker}(I + \alpha) = \{0\}$, либо $\mathrm{Ker}(I + \alpha) \cong \mathbb{Z}(m)$ при некотором m. Обозначим $G = (\Sigma_{\boldsymbol{a}})_{(2)}$. Легко проверить, что есть только две возможности для G: либо $G = \{0\}$, либо $G \cong \mathbb{Z}(2)$. Очевидно, что $G = \{0\}$ тогда и только тогда, когда $f_2 \in \mathrm{Aut}(\Sigma_{\boldsymbol{a}})$.

Из (1) и (2) следует, что характеристическая функция гауссовского распределения γ на $\boldsymbol{a}$-адическом соленоиде $\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ имеет вид

$$\hat{\gamma}(y) = (x, y)\exp\{-\sigma y^2\}, \quad y \in H_{\boldsymbol{a}},$$

где $x \in \Sigma_{\boldsymbol{a}}$, $\sigma \geq 0$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Т е о р е м а 1. *Рассмотрим $\boldsymbol{a}$-адический соленоид $X = \Sigma_{\boldsymbol{a}}$, не содержащий элементов порядка 2. Пусть α — топологический автоморфизм группы X. Положим $K = \mathrm{Ker}(I + \alpha)$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 с не обращающимися в ноль характеристическими функциями. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично. Если $\alpha \neq -I$, то каждое из распределений μ_j может быть представлено в виде $\mu_j = \gamma_j * \omega$, где $\gamma_j \in \Gamma(X)$, $\omega \in \mathrm{M}^1(K)$. Кроме того, если $\alpha > 0$, то $\mu_j = E_{x_j} * \omega$, где $x_j \in X, j = 1, 2$. Если $\alpha = -I$, то $\mu_1 = \mu_2$.*

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие леммы.

Л е м м а 1 [12, лемма 16.1]. *Пусть X — локально компактная абелева группа, Y — её группа характеров, α — топологический автоморфизм X. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2. Для того чтобы условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ было симметричным, необходимо и достаточно, чтобы характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяли функциональному уравнению Хейде*

$$\begin{aligned}&\hat{\mu}_1(u + v)\hat{\mu}_2(u + \tilde{\alpha}v) = \\ &= \hat{\mu}_1(u - v)\hat{\mu}_2(u - \tilde{\alpha}v), \quad u, v \in Y.\end{aligned} \tag{3}$$

Л е м м а 2. *Пусть $X = \mathbb{R} \times G$, где G — локально компактная абелева группа, Y и H — группы характеров групп X и G соответственно. Обозначим элементы группы X через (t, g), $t \in \mathbb{R}$, $g \in G$, а элементы группы Y через (s, h), $s \in \mathbb{R}$, $h \in H$. Пусть $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$ и предположим, что $\hat{\mu}(s, 0)$, $s \in \mathbb{C}$, — целая функция относительно s. Тогда $\hat{\mu}(s, h)$ — целая функция относительно s при любом фиксированном $h \in H$, представление*

$$\hat{\mu}(s, h) = \int_X \exp\{its\}(g, h)d\mu(t, g)$$

справедливо при любом $s \in \mathbb{C}$, $h \in H$, и выполнено неравенство

$$\max_{|s|\le r}|\hat{\mu}(s, h)| \le \max_{|s|\le r}|\hat{\mu}(s, 0)|, \quad h \in H. \qquad (4)$$

Кроме того, функция $\hat{\mu}(-iy + x, h)/\hat{\mu}(-iy, 0)$, *где* $x, y \in \mathbb{R}$, *при любом фиксированном* y *является характеристической функцией от переменной* $(s, h) \in \mathbb{R} \times H$.

Опишем схему доказательства теоремы 1. Обозначим через Y группу характеров группы X и будем рассматривать $Y = H_{\boldsymbol{a}}$ как подмножество в $\mathbb{R}$. Пусть $\alpha = f_p f_q^{-1}$ для некоторых взаимно простых p и q, где $f_p, f_q \in \mathrm{Aut}(X)$. По лемме 1 из симметрии условного распределения линейной формы L_2 при фиксированной L_1 следует, что характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ удовлетворяют функциональному уравнению Хейде (3). Положим $\nu_j = \mu_j * \bar{\mu}_j$. Тогда $\hat{\nu}_j(y) = |\hat{\mu}_j(y)|^2 > 0, y \in Y$. Очевидно, что характеристические функции $\hat{\nu}_j(y)$ также удовлетворяют функциональному уравнению Хейде (3), которое принимает вид

$$\hat{\nu}_1(u + v)\hat{\nu}_2(u + \tilde{\alpha}v) = \hat{\nu}_1(u - v)\hat{\nu}_2(u - \tilde{\alpha}v), \quad u, v \in Y. \qquad (5)$$

Вначале мы получаем некоторое представление для характеристических функций $\hat{\nu}_j(y)$. Затем по топологическому автоморфизму α мы находим натуральные числа m и n и рассматриваем группу $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}(mn)$. После этого мы строим распределения $M_j \in \mathrm{M}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}(mn))$ и непрерывный мономорфизм $\pi: \mathbb{R} \times \mathbb{Z}(mn) \mapsto X$, такие что $\nu_j = \pi(M_j)$. При этом характеристические функции распределений M_j удовлетворяют некоторому функциональному уравнению Хейде. Мы решаем полученное функциональное уравнение Хейде и находим представление для характеристических функций распределений M_j. Это даёт нам возможность найти искомое представление для распределений μ_j.

З а м е ч а н и е 1. Рассмотрим $\boldsymbol{a}$-адический соленоид $X = \Sigma_{\boldsymbol{a}}$, не содержащий элементов порядка 2. Обозначим через Y группу характеров группы X. Пусть $\alpha = f_p f_q^{-1}$ — топологический автоморфизм группы X. Положим $K = \mathrm{Ker}(I + \alpha)$. Теорема 1 не может быть усилена. Действительно, пусть γ_j — гауссовские распределения на группе X с характеристическими функциями вида

$$\hat{\gamma}_j(y) = (x_j, y)\exp\{-\sigma_j y^2\}, \quad y \in Y,$$

где $x_1 + \alpha x_2 = 0$ и $\sigma_1 + pq^{-1}\sigma_2 = 0$. Пусть $\omega \in \mathrm{M}^1(K)$. Положим $\mu_j = \gamma_j * \omega$, $j = 1, 2$. Из леммы 1 легко следует, что если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2, то условное распределение линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично. Таким образом, мы не можем сузить класс распределений в теореме 1, который характеризуется симметрией условного распределения линейной формы L_2 при фиксированной L_1.

Пусть $X = \Sigma_{\boldsymbol{a}}$. Обозначим $G = X_{(2)}$. Обсудим характеризационную теорему Хейде на $\boldsymbol{a}$-адических соленоидах, содержащих элемент порядка 2, т.е. когда $G \cong \mathbb{Z}(2)$. Пусть α — топологический автоморфизм группы X. Положим $K = \mathrm{Ker}(I + \alpha)$. Легко видеть, что для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ мы имеем $K \supset G$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 с не обращающимися в ноль характеристическими функциями. Оказывается, что теорема 1, вообще говоря, неверна, если группа X содержит элемент порядка 2. Кроме того, в случае когда $K = G$, можно полностью описать распределения, которые характеризуются симметрией условного распределения линейной формы $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$. Соответствующий класс распределений шире, чем класс $\Gamma(X) * \mathrm{M}^1(K)$.

Пусть Y — группа характеров группы X. Заметим, что разложение группы Y по подгруппе $Y^{(2)}$ состоит из двух классов смежности. Пусть $\mu \in \mathrm{M}^1(X)$. Легко видеть, что $\mu \in \Gamma(X) * \mathrm{M}^1(G)$ тогда и только тогда, когда характеристическая функция $\hat{\mu}(y)$ представима в виде

$$\hat{\mu}(y) = \begin{cases} (x, y)\exp\{-\sigma y^2\}, & y \in Y^{(2)}, \\ (x, y)\kappa\exp\{-\sigma y^2\}, & y \notin Y^{(2)}, \end{cases}$$

где $x \in X$, $\sigma \ge 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$, $|\kappa| \le 1$. Введём в рассмотрение класс распределений на группе X более широкий, чем класс $\Gamma(X) * \mathrm{M}^1(G)$.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $X = \Sigma_{\boldsymbol{a}}$, $G = X_{(2)}$. Предположим, что $G \cong \mathbb{Z}(2)$. Пусть Y — группа характеров группы X. Будем говорить, что распределение μ на группе X принадлежит классу Υ, если его характеристическая функция представима в виде

$$\hat{\mu}(y) = \begin{cases} (x, y)\exp\{-\sigma y^2 + i\beta y\}, & y \in Y^{(2)}, \\ (x, y)\kappa\exp\{-\sigma' y^2 + i\beta' y\}, & y \notin Y^{(2)}, \end{cases}$$

при некоторых $x \in X$, $\sigma \ge 0$, $\sigma' \ge 0$, κ, β, $\beta' \in \mathbb{R}$, $|\kappa| \le 1$.

Рассмотрим группу $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$. Обозначим через (t, k), $t \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}(2)$, её элементы. Группа характеров группы $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$ топологически изоморфна группе $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}(2)$. Обозначим через (s, l), $s \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{Z}(2)$, элементы группы характеров группы

$\mathbb{R}\times\mathbb{Z}(2)$. Пусть $\mu\in\Gamma(\mathbb{R})*\mathrm{M}^1(\mathbb{Z}(2))$. Легко видеть, что характеристическая функция распределения μ имеет вид

$$\hat{\mu}(s,\,l)=\begin{cases}\exp\{-\sigma s^2+i\beta s\}, & s\in\mathbb{R},\,l=0,\\ \kappa\exp\{-\sigma s^2+i\beta s\}, & s\in\mathbb{R},\,l=1,\end{cases}$$

где $\sigma\ge 0$, $\beta,\,\kappa\in\mathbb{R}$, $|\kappa|\le 1$. Мы рассмотрим сейчас более широкий класс распределений на группе $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}(2)$, чем класс $\Gamma(\mathbb{R})*\mathrm{M}^1(\mathbb{Z}(2))$. Этот класс распределений понадобится нам при изучении распределений на $\boldsymbol{a}$-адических соленоидах, содержащих элемент порядка 2, которые характеризуются симметрией условного распределения одной линейной формы от независимых случайных величин при фиксированной второй.

Л е м м а 3. *Рассмотрим группу $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}(2)$. Пусть $f(s,\,l)$ — функция на группе характеров группы $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}(2)$ вида*

$$f(s,\,l)=\begin{cases}\exp\{-\sigma s^2+i\beta s\}, & s\in\mathbb{R},\,l=0,\\ \kappa\exp\{-\sigma' s^2+i\beta' s\}, & s\in\mathbb{R},\,l=1,\end{cases}\qquad(6)$$

где $\sigma\ge 0$, $\sigma'\ge 0$, β, β', $\kappa\in\mathbb{R}$. Тогда $f(s,\,l)$ — характеристическая функция некоторого заряда μ на группе $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}(2)$. Для того чтобы заряд μ был мерой, необходимо и достаточно, чтобы либо $0<\sigma'<\sigma$ и $0<|\kappa|\le\sqrt{\dfrac{\sigma'}{\sigma}}\exp\left\{-\dfrac{(\beta-\beta')^2}{4(\sigma-\sigma')}\right\}$, либо $\sigma'=\sigma$, $\beta=\beta'$ и $|\kappa|\le 1$. В последнем случае $\mu\in\Gamma(\mathbb{R})*\mathrm{M}^1(\mathbb{Z}(2))$.

Опираясь на лемму 3, можно доказать следующее утверждение, которое означает, что теорема 1, вообще говоря, неверна, если группа $X=\Sigma_{\boldsymbol{a}}$ содержит элемент порядка 2.

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть $X=\Sigma_{\boldsymbol{a}}$, $G=X_{(2)}$. Предположим, что $G\cong\mathbb{Z}(2)$. Пусть α — топологический автоморфизм группы X, $\alpha<0$, $\alpha\ne -I$. Положим $K=\mathrm{Ker}(I+\alpha)$. Тогда существуют независимые случайные величины ξ_1 и ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями $\mu_j\in\Upsilon$, $\mu_j\notin\Gamma(X)*\mathrm{M}^1(K)$, $j=1,2$, с не обращающимися в ноль характеристическими функциями, такие что условное распределение линейной формы $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$ при фиксированной $L_1=\xi_1+\xi_2$ симметрично.*

В случае когда $K=G$ и $G\cong\mathbb{Z}(2)$, мы опишем сейчас распределения, которые характеризуются симметрией условного распределения линейной формы L_2 при фиксированной L_1.

Т е о р е м а 2. *Пусть $X=\Sigma_{\boldsymbol{a}}$, $G=X_{(2)}$. Пусть α — топологический автоморфизм группы X. Положим $K=\mathrm{Ker}(I+\alpha)$. Пусть $K=G$ и $G\cong\mathbb{Z}(2)$. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 с не обращающимися в ноль характеристическими функциями. Предположим, что условное распределение линейной формы $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$ при фиксированной $L_1=\xi_1+\xi_2$ симметрично. Тогда $\mu_j\in\Upsilon$, $k=1,2$. Кроме того, если $\alpha>0$, то носители некоторых сдвигов распределений μ_j содержатся в G.*

Доказательство теоремы 2 опирается на такие леммы.

Л е м м а 4 [9]. *Пусть X — локально компактная абелева группа, α — топологический автоморфизм X. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X. Если условное распределение линейной формы $L_2=\xi_1+\alpha\xi_2$ при фиксированной $L_1=\xi_1+\xi_2$ симметрично, то линейные формы $L_1'=(I+\alpha)\xi_1+2\alpha\xi_2$ и $L_2'=2\xi_1+(I+\alpha)\xi_2$ независимы.*

Как известно, гауссовское распределение на вещественной прямой характеризуется независимостью двух линейных форм от n независимых случайных величин. Нам понадобится групповой аналог этой теоремы при $n=2$.

Л е м м а 5 ([15], см. также [12, теорема 10.3]). *Пусть X — локально компактная абелева группа, не содержащая подгруппы, топологически изоморфной группе вращений окружности $\mathbb{T}$. Пусть α_j, β_j — топологические автоморфизмы группы X. Предположим, что ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1 и μ_2 с необращающимися в ноль характеристическими функциями. Тогда из независимости линейных форм $L_1=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2$ и $L_2=\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2$ вытекает, что $\mu_j\in\Gamma(X)$, $j=1,2$.*

В следующей лемме утверждается, что если характеристическая функция некоторого распределения на группе $\mathbb{R}\times\mathbb{Z}(2)$ не обращается в ноль и представима в виде (6), то характеристические функции его делителей также имеют аналогичное представление.

Л е м м а 6. *Пусть $N\in\mathrm{M}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}(2))$ и характеристическая функция $\hat{N}(s,\,l)=f(s,\,l)$, где функция $f(s,\,l)$ представима в виде (6). При этом либо $0<\sigma'<\sigma$ и $0<|\kappa|\le\sqrt{\dfrac{\sigma'}{\sigma}}\exp\left\{-\dfrac{(\beta-\beta')^2}{4(\sigma-\sigma')}\right\}$, либо $\sigma'=\sigma$, $\beta=\beta'$ и $0<|\kappa|\le 1$. Пусть $N=P_1*P_2$, где $P_j\in\mathrm{M}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{Z}(2))$. Тогда каждая из характеристических функций $\hat{P}_j(s,\,l)$ имеет вид*

$$\hat{P}_j(s,\,l)=\begin{cases}\exp\{-\sigma_j s^2+i\beta_j s\}, & s\in\mathbb{R},\,l=0,\\ \kappa_j\exp\{-\sigma_j' s^2+i\beta_j' s\}, & s\in\mathbb{R},\,l=1,\end{cases}$$

где либо $0 < \sigma'_j < \sigma_j$ и

$$0 < |\kappa_j| \le \sqrt{\frac{\sigma'_j}{\sigma_j}} \exp\left\{-\frac{(\beta_j - \beta'_j)^2}{4(\sigma_j - \sigma'_j)}\right\},$$

либо $\sigma'_j = \sigma_j$, $\beta_j = \beta'_j$ и $0 < |\kappa_j| \le 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Heyde C.C.* // Sankhya. Ser. A. 1970. V. 32. P. 115–118.
2. *Каган А.М.*, *Линник Ю.В.*, *Рао С.Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972. 656 с.
3. *Feldman G.M.* // J. Theoretical Probab. 2004. V. 17. P. 929–941.
4. *Миронюк М.В.*, *Фельдман Г.М.* // Сиб. мат. журнал. 2005. Т. 46. С. 403–415.
5. *Feldman G.M.* // Probab. Theory Relat. Fields. 2005. V. 133. P. 345–357.
6. *Feldman G.M.* // Studia Math. 2006. V. 177. P. 67–79.
7. *Feldman G.M.* // J. Funct. Anal. 2010. V. 258. P. 3977–3987.
8. *Feldman G.M.* // Math. Nachr. 2013. V. 286. P. 340–348.
9. *Myronyuk M.V.* // Colloquium Mathematicum. 2013. V. 132. P. 195–210.
10. *Feldman G.M.* // Publicationes Mathematicae Debrecen. 2015. V. 87. P. 147–166.
11. Фельдман Г.М. // Теор. вероятн. и ее применения. 2017. Т. 62. С. 499–517.
12. *Feldman G.M.* Functional Equations and Characterization Problems on Locally Compact Abelian Groups. EMS Tracts in Mathematics. Zurich: Europ. Math. Soc., 2008. V. 5. 268 p.
13. *Parthasarathy K.R.* Probability Measures on Metric Spaces. N.Y.; L.: Acad. Press, 1967. 276 p.
14. *Хьюитт Э.*, *Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. 1975. Т. 1. М.: Наука, 1975. 656 с.
15. *Feldman G.M.* // Probab. Theory Relat. Fields. 2003. V. 126. P. 91–102.

ON A CHARACTERIZATION THEOREM ON *a*-ADIC SOLENOIDS

G. M. Feldman

B. Verkin Institute for Low Temperature Physics and Engineering of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

Presented by Academician of the RAS I.A. Ibragimov June 17, 2019

Received June 25, 2019

According to the Heyde theorem the Gaussian distribution on the real line is characterized by the symmetry of the conditional distribution of one linear form of independent random variables given the other. We prove an analogue of this theorem for linear forms of two independent random variables taking values in an ***a***-adic solenoid containing no elements of order 2. Coefficients of the linear forms are topological automorphisms of the ***a***-adic solenoid.

Keywords: ***a***-adic solenoid, Gaussian distribution, topological automorphism.