ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, *том* 489, № 3, *с.* 235–239

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А. Д. Полянин[1,2,*], А. И. Журов[1,]**

Представлено академиком РАН Ф.Л. Черноусько 21.05.2019 г.

Поступило 21.05.2019 г.

Предлагается новый метод построения точных решений нелинейных уравнений математической физики, который основан на нелинейных преобразованиях интегрального типа в комбинации с использованием принципа расщепления. Эффективность метода иллюстрируется на нелинейных уравнениях реакционно-диффузионного типа, которые зависят от двух или трёх произвольных функций. Описаны новые точные решения с функциональным разделением переменных и решения типа обобщённой бегущей волны.

Ключевые слова: нелинейные уравнения математической физики, функциональное разделение переменных, обобщённое разделение переменных, точные решения, нелинейные реакционно-диффузионные уравнения.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524893235-239

ВВЕДЕНИЕ

Методы обобщённого и функционального разделения переменных относятся к наиболее эффективным методам построения точных решений различных классов нелинейных уравнений математической физики и механики (включая уравнения с частными производными достаточно общего вида, которые зависят от произвольных функций). В работах [1–11] путём применения этих методов было получено много точных решений уравнений теории тепло- и массопереноса, теории волн, оптики, гидродинамики и других нелинейных уравнений.

Для определённости далее будем рассматривать нелинейные уравнения математической физики с двумя независимыми переменными:

$$F(x, t, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0, \qquad (1)$$

где $u = u(x, t)$ — искомая функция.

Использование методов обобщённого и функционального разделения переменных основано на априорном задании структурного вида искомой переменной u, которая зависит от несколько свободных функций (конкретный вид этих функций определяется далее путём анализа возникающих функционально-дифференциальных уравнений). В частности, ранее авторами был описан прямой метод построения точных решений с функциональным разделением переменных, когда решение ищется в неявной форме:

$$\int h(u)du = \xi(x)\omega(t) + \eta(x), \qquad (2)$$

где $h = h(u)$, $\xi = \xi(x)$, $\eta = \eta(x)$, $\omega = \omega(t)$ — функции, которые требуется найти. Этот метод позволил получить более 40 точных решений нелинейных реакционно-диффузионных уравнений и уравнений типа Клейна—Гордона с переменными коэффициентами [11].

В данной работе для построения точных решений предлагается использовать более общий метод, позволяющий определять (а не задавать априорно) структурный вид искомой переменной в процессе решения.

1. ОПИСАНИЕ МЕТОДА

Для построения точных решений уравнения (1) на начальном этапе используем нелинейное преобразование вида

$$\vartheta = \int h(u)du, \qquad (3)$$

где $\vartheta = \vartheta(x, t)$ и $h = h(u)$ — функции, которые ищутся в ходе дальнейшего анализа. После того как эти функции будут определены, интегральное соотношение (3) будет задавать точное решение рассматриваемого уравнения в неявной форме.

[1] *Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии наук, Москва*

[2] *Национальный исследовательский ядерный университет “МИФИ”, Москва*

**E-mail*: *polyanin@ipmnet.ru*

***E-mail*: *zhurov@ipmnet.ru*

Дифференцируя (3) по независимым переменным, находим частные производные

$$u_x = \frac{\vartheta_x}{h}, \quad u_t = \frac{\vartheta_t}{h}, \quad u_{xx} = \frac{\vartheta_{xx}}{h} - \frac{\vartheta_x^2 h'_u}{h^3}, \quad \dots \tag{4}$$

Будем считать, что после подстановки выражений (4) в (1) полученное уравнение можно преобразовать к следующему виду:

$$\sum_{n=1}^{N} \Phi_n \Psi_n = 0, \tag{5}$$

где

$$\Phi_n = \Phi_n(x, t, \vartheta_x, \vartheta_t, \vartheta_{xx}, \dots), \quad \Psi_n = \Psi_n(u, h, h'_u, h''_{uu}, \dots). \tag{6}$$

Для построения точных решений уравнения (5) используем принцип расщепления, описанный ниже.

Принцип расщепления. Рассматриваем линейные комбинации двух наборов элементов $\{\Phi_j\}$ $\{\Psi_j\}$, входящих в (5), которые связаны соотношениями

$$\sum_{n=1}^{p_i} \alpha_{ni} \Phi_n = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l, \qquad \sum_{n=1}^{q_j} \beta_{nj} \Psi_n = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{7}$$

где $2 \le p_i$, $q_j \le N$, $1 \le l$, $m \le N-1$. Константы α_{ni} и β_{nj} (7) выбираются так, чтобы билинейное равенство (5) удовлетворялось тождественно (отметим, что соотношения (7) не связаны с конкретным видом дифференциальных форм (6)).

После получения соотношений (7) в них подставляются дифференциальные формы (6), что приводит к системам дифференциальных уравнений (часто переопределённым) для искомых функций $\vartheta = \vartheta(x, t)$ и $h = h(u)$, которые входят в (3).

Замечание 1. Необходимо отдельно рассмотреть также вырожденные случаи, когда помимо линейных соотношений (7) некоторые дифференциальные формы Φ_n и/или Ψ_n равны нулю.

Замечание 2. Для чётных N равенству (5) проще всего удовлетворить, если положить

$$\Phi_i - \gamma_{ij}\Phi_j = 0, \quad \gamma_{ij}\Psi_i + \Psi_j = 0 \quad (i \ne j),$$

где γ_{ij} — произвольные постоянные, а индексы i, j в совокупности принимают все значения от 1 до N.

При $N \ge 3$ равенство (5) также будет удовлетворяться тождественно, если задать линейные соотношения

$$\begin{gathered} \Phi_m - A_m\Phi_{N-1} - B_m\Phi_N = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N-2, \\ \Psi_{N-1} + A_1\Psi_1 + \dots + A_{N-2}\Psi_{N-2} = 0, \\ \Psi_N + B_1\Psi_1 + \dots + B_{N-2}\Psi_{N-2} = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

где A_i, B_i — произвольные постоянные. В формулах (8) можно сделать переобозначения символов $\Phi_n \rightleftarrows \Psi_n$, а также одновременные парные перестановки $\Phi_i \rightleftarrows \Phi_j$ и $\Psi_i \rightleftarrows \Psi_j$.

Для построения более сложных линейных комбинаций вида (7), тождественно удовлетворяющих билинейному соотношению (5), можно использовать формулы для коэффициентов α_{ni} и β_{nj}, приведённые в [1, 3].

2. РЕАКЦИОННО-ДИФФУЗИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ И ИХ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим класс нелинейных уравнений реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + b(x)g(u) + c(x). \tag{9}$$

Используя описанный в разделе 1 метод, получим некоторые точные решения уравнений вида (9), в которых по крайней мере два функциональных коэффициента $a(x)$ и $f(u)$ будут заданы произвольно (а остальные через них выражаются). Далее для краткости аргументы функций, входящих в преобразование (3) и уравнение (9), часто будут опускаться.

Сделав замену (3), подставим производные (4) в (9). После элементарных преобразований получим

$$-\vartheta_t + (a\vartheta_x)_x f + a\vartheta_x^2 \left(\frac{f}{h}\right)'_u + bgh + ch = 0. \tag{10}$$

При $h = 1$ уравнение (10) совпадает с исходным уравнением (9), где $u = \vartheta$. Поэтому на данном этапе никакие решения не теряются.

Введём обозначения:

$$\begin{gathered} \Phi_1 = -\vartheta_t, \quad \Phi_2 = (a\vartheta_x)_x, \quad \Phi_3 = a\vartheta_x^2, \\ \Phi_4 = b, \quad \Phi_5 = c, \quad \Psi_1 = 1, \quad \Psi_2 = f, \\ \Psi_3 = \left(\frac{f}{h}\right)'_u, \quad \Psi_4 = gh, \quad \Psi_5 = h. \end{gathered} \tag{11}$$

В результате уравнение (10) можно представить в билинейном виде (5) при $N = 5$:

$$\sum_{n=1}^{5} \Phi_n \Psi_n = 0. \tag{12}$$

Пример 1. Уравнению (12) можно тождественно удовлетворить, если использовать линейные соотношения

$$\begin{gathered}\Phi_1 = -\Phi_4, \quad \Phi_2 = 0, \quad k\Phi_3 = -\Phi_5, \\ \Psi_1 = \Psi_4, \quad \Psi_3 = k\Psi_5,\end{gathered} \tag{13}$$

где k — произвольная постоянная. Подставляя (11) в (13), приходим к уравнениям

$$\begin{gathered}\vartheta_t = b, \quad (a\vartheta_x)_x = 0, \quad ka\vartheta_x^2 = -c, \\ gh = 1, \quad \left(\frac{f}{h}\right)'_u = kh.\end{gathered} \tag{14}$$

Общее решение переопределённой системы, состоящей из первых трёх уравнений (14), имеет вид

$$\begin{gathered}b(x) = \beta, \quad c(x) = -\frac{k\lambda^2}{a(x)}, \\ \vartheta(x, t) = \beta t + \lambda\int\frac{dx}{a(x)} + C_1,\end{gathered} \tag{15}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, C_1, k, β, λ — произвольные постоянные. Общее решение системы, состоящей из двух последних уравнений (14), записывается так (берутся одновременно либо верхние, либо нижние знаки):

$$\begin{gathered}g = \pm\frac{\sqrt{2kF(u) + C_2}}{f}, \\ h = \pm\frac{f}{\sqrt{2kF(u) + C_2}}, \\ F(u) = \int f(u)du,\end{gathered} \tag{16}$$

где $f(u)$ — произвольная функция. Из формул (15) и (16) получим два уравнения

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x \pm \frac{\beta\sqrt{2kF(u) + C_2}}{f(u)} - \frac{k\lambda^2}{a(x)}, \tag{17}$$

которые допускают точные решения типа обобщённой бегущей волны в неявной форме:

$$\pm\int\frac{f(u)du}{\sqrt{2kF(u) + C_2}} = \beta t + \lambda\int\frac{dx}{a(x)} + C_1. \tag{18}$$

Сделав переобозначения $\beta \Rightarrow \pm\beta$, $k \Rightarrow \frac{k}{2}$, $C_1 \Rightarrow \pm C_1$ в (17) и (18), приходим к одному уравнению

$$\begin{gathered}u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{\beta}{f(u)}\sqrt{kF(u) + C_2} - \frac{k\lambda^2}{2a(x)}, \\ F(u) = \int f(u)du,\end{gathered} \tag{19}$$

которое допускает два точных решения

$$\int\frac{f(u)du}{\sqrt{kF(u) + C_2}} = \beta t \pm \lambda\int\frac{dx}{a(x)} + C_1. \tag{20}$$

Отметим, что уравнение (19) содержит две произвольные функции $a(x)$ и $f(u)$ и четыре произвольные постоянные C_2, k, β, λ.

Пример 2. Уравнению (12) можно удовлетворить, если положить

$$\begin{gathered}\Phi_1 = -\Phi_4, \quad \Phi_2 = -k\Phi_5, \\ \Psi_1 = \Psi_4, \quad k\Psi_2 = \Psi_5, \quad \Psi_3 = 0,\end{gathered} \tag{21}$$

где k — произвольная постоянная. Подставляя (11) в (21), получим

$$\begin{gathered}\vartheta_t = b, \quad (a\vartheta_x)_x = -kc, \\ gh = 1, \quad kf = h, \quad \left(\frac{f}{h}\right)'_u = 0.\end{gathered} \tag{22}$$

Общее решение переопределённой системы, состоящей из первых двух уравнений (22), имеет вид

$$\begin{gathered}b(x) = C_1\int\frac{dx}{a(x)} + C_2, \\ \vartheta(x, t) = b(x)t - k\int\frac{1}{a(x)}\left(\int c(x)dx\right)dx + \\ + C_3\int\frac{dx}{a(x)} + C_4,\end{gathered} \tag{23}$$

где $a(x)$ и $c(x)$ — произвольные функции, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Общее решение системы, состоящей из трёх последних уравнений (22), даётся формулами

$$g = \frac{1}{kf}, \quad h = kf. \tag{24}$$

Учитывая соотношения (23) и (24), получим уравнение

$$u_t = [a(x)f(u)u_x]_x + \frac{b(x)}{kf(u)} + c(x), \tag{25}$$

которое допускает точное решение в неявной форме

$$\begin{gathered}k\int f(u)du = b(x)t - k\int\frac{1}{a(x)}\left(\int c(x)dx\right)dx + \\ + C_3\int\frac{dx}{a(x)} + C_4.\end{gathered} \tag{26}$$

Здесь $a(x)$, $c(x)$, $f(u)$ — произвольные функции, а функция $b(x)$ определена в (23). Без ограничения общности в (25) и (26) можно положить $k = 1$.

3. ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ И МОДИФИКАЦИИ

Другие точные решения уравнения (1) можно получить, если вместо (5), (6) рассматривать эквивалентные дифференциальные уравнения, которые сводятся к (5), (6) на множестве функций, удовлетворяющих соотношению (3).

Пример 3. Вернёмся к классу реакционно-диффузионных уравнений вида (9). Сделав замену (3), вместо уравнения (10) рассмотрим более сложное уравнение

$$-e^{\lambda\vartheta}e^{-\lambda H}\vartheta_t + (a\vartheta_x)_x f + a\vartheta_x^2\left(\frac{f}{h}\right)'_u + \\ + bgh + ch = 0, \tag{27}$$

где $H = \int h du$ и λ — произвольная постоянная. Уравнения (10) и (27) эквивалентны, поскольку в силу преобразования (3) имеет место соотношение $\vartheta = H$.

Уравнение (27) можно представить в билинейной форме (12), где

$$\begin{gathered}\Phi_1 = -e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t, \quad \Phi_2 = (a\vartheta_x)_x, \quad \Phi_3 = a\vartheta_x^2, \\ \Phi_4 = b, \quad \Phi_5 = c, \\ \Psi_1 = e^{-\lambda H}, \quad \Psi_2 = f, \quad \Psi_3 = \left(\frac{f}{h}\right)'_u, \\ \Psi_4 = gh, \quad \Psi_5 = h.\end{gathered} \tag{28}$$

Как и ранее, уравнению (12) можно удовлетворить, используя соотношения (13). Подставляя (28) в (13), приходим к уравнениям

$$\begin{gathered}e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t = b, \quad (a\vartheta_x)_x = 0, \quad ka\vartheta_x^2 = -c, \\ gh = e^{-\lambda H}, \quad \left(\frac{f}{h}\right)'_u = kh,\end{gathered} \tag{29}$$

которые при $\lambda = 0$ совпадают с (14). Общее решение переопределённой системы, состоящей из первых трёх уравнений (29), имеет вид

$$\begin{gathered}b(x) = C_1\exp\left(C_3\lambda\int\frac{dx}{a(x)} + C_4\lambda\right), \\ c(x) = -\frac{kC_3^2}{a(x)}, \\ \vartheta(x, t) = \frac{1}{\lambda}\ln(C_1\lambda t + C_2) + C_3\int\frac{dx}{a(x)} + C_4,\end{gathered} \tag{30}$$

где $a(x)$ — произвольная функция, C_1, C_2, C_3, C_4, k, λ — произвольные постоянные. Общее решение системы, состоящей из двух последних уравнений (29), записывается так (берутся одновременно либо верхние, либо нижние знаки):

$$\begin{gathered}g = \frac{1}{h}\exp(-\lambda h), \\ h = \pm\frac{f}{\sqrt{2kF(u) + C_2}}, \\ F(u) = \int f(u)du,\end{gathered} \tag{31}$$

где $f(u)$ — произвольная функция.

Пример 4. Как и ранее, уравнению (12) можно удовлетворить с помощью соотношений (21). Подставляя (28) в (21), приходим к уравнениям

$$\begin{gathered}e^{\lambda\vartheta}\vartheta_t = b, \quad (a\vartheta_x)_x = -kc, \\ gh = e^{-\lambda H}, \quad kf = h, \quad \left(\frac{f}{h}\right)'_u = 0.\end{gathered} \tag{32}$$

Общее решение переопределённой системы, состоящей из первых двух уравнений (32), имеет вид

$$\begin{gathered}b(x) = C_1\exp\left[-k\lambda\int\frac{1}{a(x)}\left(\int c(x)dx\right)dx + \right. \\ \left. + C_3\lambda\int\frac{dx}{a(x)} + C_4\lambda\right], \\ \vartheta(x, t) = \frac{1}{\lambda}\ln(C_1\lambda t + C_2) - \\ - k\int\frac{1}{a(x)}\left(\int c(x)dx\right)dx + C_3\int\frac{dx}{a(x)} + C_4,\end{gathered} \tag{33}$$

где $a(x)$ и $c(x)$ — произвольные функции, C_1, C_2, C_3, C_4 — произвольные постоянные. Общее решение системы, состоящей из трёх последних уравнений (32), даётся формулами

$$g = \frac{1}{kf}\exp\left(-k\lambda\int f du\right), \quad h = kf. \tag{34}$$

Замечание 3. Для построения других точных решений уравнения (9) описанным методом помимо (27) можно использовать также уравнение

$$-\vartheta_t + \lambda\vartheta - \lambda H + (a\vartheta_x)_x f + \\ + a\vartheta_x^2\left(\frac{f}{h}\right)'_u + bgh + ch = 0,$$

которое в силу преобразования (3) эквивалентно уравнению (10).

ВЫВОДЫ

Описан новый метод построения точных решений нелинейных уравнений математической физики, который основан на нелинейных преобразованиях интегрального типа в комбинации с использованием принципа расщепления. Эффективность метода иллюстрируется на нелинейных уравнениях реакционно-диффузионного типа с переменными коэффициентами, которые зависят от двух или трёх произвольных функций. Получен ряд новых точных решений с функциональным разделением переменных и решений типа обобщённой бегущей волны. Важно отметить, что построенные решения являются неинвариантными (т.е. не могут быть получены с помощью классического группового анализа дифференциальных уравнений [12]).

Источники финансирования. Работа выполнена по теме государственного задания (№ госрегистрации АААА-А17-117021310385-6 и АААА-А17-117021310375-7) и при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18–29–10025).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Полянин А.Д.*, *Зайцев В.Ф.*, *Журов А.И.* Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. М.: Физматлит, 2005.
2. *Galaktionov V.A.*, *Svirshchevskii S.R.* Exact Solutions and Invariant Subspaces of Nonlinear Partial Differential Equations in Mechanics and Physics. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2007.
3. *Polyanin A.D.*, *Zaitsev V.F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. 2nd Ed. Boca Raton: CRC Press, 2012.
4. *Grundland A.M.*, *Infeld E.* // J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 2498–2503.
5. *Zhdanov R.Z.* // J. Phys. A. 1994. V. 27. P. L291–L297.
6. *Галактионов В.А.*, *Посашков С.А.*, *Свирщевский С.Р.* // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. № 2. С. 253–261.
7. *Doyle Ph.W.*, *Vassiliou P.J.* // Int. J. Non-Linear Mech. 1998. V. 33. № 2. P. 315–326.
8. *Polyanin A.D.*, *Zhurov A.I.* // Int. J. Non-Linear Mech. 2016. V. 79. P. 88–98.
9. *Polyanin A.D.* // Applied Math. Comput. 2019. V. 347. P. 282–292.
10. *Polyanin A.D.* // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2019. V. 73. P. 379–390.
11. *Polyanin A.D.* // Int. J. Non-Linear Mech. 2019. V. 111. P. 95–105; V. 114. P. 29–40.
12. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

ON ONE METHOD FOR CONSTRUCTING EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR EQUATIONS OF MATHEMATICAL PHYSICS

A. D. Polyanin[1,2], A. I. Zhurov[1]

[1] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*
[2] *National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute), Moscow, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS F.L. Chernousko May 21, 2019

Received May 21, 2019

A new method for constructing exact solutions of nonlinear equations of mathematical physics, which is based on nonlinear integral type transformations in combination with the splitting principle, is proposed. The effectiveness of the method is illustrated on nonlinear equations of the reaction-diffusion type, which depend on two or three arbitrary functions. New exact functional separable solutions and generalized traveling wave solutions are described.

Keywords: nonlinear mathematical physics equations, reaction-diffusion equations, equations with variable coefficients, functional separable solutions, exact solutions.