ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, *том 489*, *№ 3*, *с. 298–302*

ГЕОФИЗИКА

УДК 551.2+539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ УПРУГИХ ГЕОСИСТЕМ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Е. И. Рыжак*, С. В. Синюхина

Представлено академиком РАН А.О. Глико 26.06.2019 г.

Поступило 02.07.2019 г.

Аналитически исследуется устойчивость стратифицированных упругих геосистем в поле силы тяжести с учётом сдвиговой жёсткости геоматериала. Получено достаточное условие устойчивости для геомассива, закреплённого по боковым границам: при любых соотношениях размеров геомассива для устойчивости достаточно, чтобы скорость нарастания плотности с глубиной (в нагруженном равновесном состоянии) превосходила некоторое положительное значение, зависящее от сдвиговой жёсткости таким образом, что чем больше жёсткость, тем это значение меньше, и наоборот (стабилизирующее влияние сдвиговой жёсткости). При нулевой сдвиговой жёсткости упомянутое значение максимально и характеризует необходимое и достаточное условие устойчивости для объёмно-упругого геомассива. Проанализированы геофизические следствия полученного условия.

Ключевые слова: стратифицированные упругие геосистемы, устойчивость, поле силы тяжести.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524893298-302

ВВЕДЕНИЕ

Данное исследование привело к новым результатам по сравнению с работами авторов [1–5], посвящённых исследованию устойчивости стратифицированных, в частности объёмно-упругих, систем в поле силы тяжести. Объёмная упругость означает, что упругий потенциал материала зависит только от объёмных деформаций и, следовательно, не зависит от деформаций формоизменения. В смысле инкрементального отклика такой материал характеризуется ненулевым модулем объёмного сжатия и нулевыми модулями сдвига. Для объёмно-упругих систем оказалось, что их устойчивость не зависит от формы области, занимаемой средой, а полностью определяется величиной, которая была названа [1–5] приведённой скоростью нарастания плотности с глубиной в исследуемом на устойчивость равновесном состоянии. Эта величина характеризует ту часть равновесной скорости изменения плотности с глубиной, которая определяется именно физической неоднородностью среды и не зависит от скорости увеличения давления с глубиной. В [1–5] было получено, что необходимым и достаточным условием устойчивости является неотрицательность приведённой скорости нарастания плотности с глубиной. В смысле полной скорости нарастания плотности с глубиной это означает, что она должна быть не меньше некоторой положительной величины, связанной с увеличением давления с глубиной, поскольку увеличение давления в объёмно-упругой среде само по себе порождает увеличение плотности.

Предположение об объёмной упругости материала существенно ограничивает область приложений результатов исследования устойчивости. Действительно, строго говоря, чистой объёмной упругостью обладают только сжимаемые жидкости и газы; практически же к объёмно-упругим можно отнести и материалы, модуль сдвига которых много меньше их модуля объёмного сжатия (например, гели). При этом зачастую представляет интерес вопрос об условиях устойчивости и неустойчивости стратифицированных систем, обладающих заметной сдвиговой жёсткостью и находящихся под действием поля силы тяжести. Интуитивно ясно, что наличие сдвиговой жёсткости повышает устойчивость системы по сравнению со случаем нулевой сдвиговой жёсткости, однако остаётся открытым вопрос о том, в какой степени повышается устойчивость и от каких факторов это зависит.

В настоящей работе в рамках той постановки задачи, которая будет сформулирована ниже, получено некоторое не зависящее от формы области достаточное условие устойчивости, также относящееся к скорости нарастания плотности с глубиной, а именно: в среде с ненулевой сдвиговой жёсткостью достаточная для устойчивости скорость нарастания плотности с глубиной оказалась меньше, чем для объёмно-упругой среды с такой же плотностью и таким же модулем объёмного сжатия. Это уменьшение

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта
Российской Академии наук, *Москва*
**E-mail*: *E_I_Ryzhak@mail.ru*

определяется сдвиговой жёсткостью среды, причём чем больше сдвиговая жёсткость среды, тем меньшая скорость нарастания плотности с глубиной достаточна для устойчивости. Таким образом, наличие сдвиговой жёсткости оказывается фактором, повышающим запас устойчивости системы, и в этом повышении запаса устойчивости есть составляющая, которая, как и в случае объёмно-упругой среды, не зависит от формы области, занимаемой системой.

ИССЛЕДУЕМЫЙ КЛАСС МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Зададим ортонормированный базис ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$), причём орт $\mathbf{e}_3$ направлен вертикально вверх (рис. 1). Будем считать, что изучаемая механическая система находится в однородном поле силы тяжести, направленном вертикально вниз ($\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_3$), и состоит из непрерывно стратифицированного по глубине твёрдого упругого материала, занимающего в исследуемом на устойчивость равновесном состоянии область B, представляющую собой некоторую ограниченную подобласть горизонтального плоского слоя. Верхняя граница области Σ_+ (находящаяся на верхней граничной плоскости слоя) предполагается свободной, а боковые границы Σ_s (расположенные в толще слоя) считаются неподвижными. На нижней границе области Σ_- (расположенной на нижней граничной плоскости слоя) ставится силовое граничное условие, а именно предполагается, что граничные усилия представляют собой комбинацию постоянного давления (равного равновесному давлению в нижней части слоя) и усилия, порождаемого упругой заделкой некоторой конечной жёсткости (рис. 1). Силовое граничное условие на нижней границе призвано моделировать реакцию подстилающих геослоёв. Дополнительно введём вертикальную координату z (отсчётную глубину), нулевое значение которой соответствует свободной поверхности Σ_+ (рис. 1).

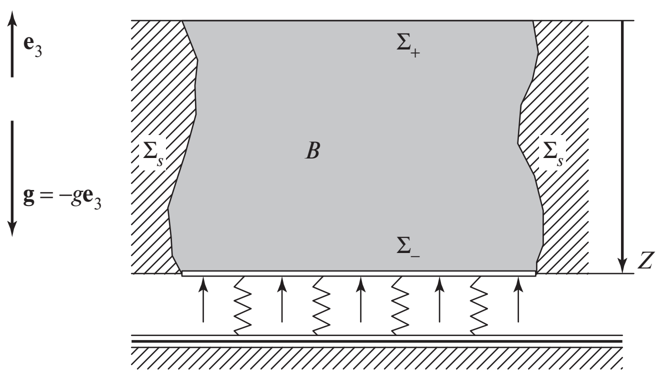

Рис. 1. Исследуемая механическая система.

Несмотря на то что геоматериал считается твёрдым (т.е. имеющим ненулевую сдвиговую жёсткость), исходное равновесное поле напряжений считается гидростатическим. Предположение о гидростатичности исходного равновесного состояния является традиционным для геосистем и основано на представлениях о длительном периоде формирования равновесного состояния, в ходе которого изначально ненулевые сдвиговые напряжения уменьшились до нуля. Современные движения, рассматриваемые как возмущающие, считаются относительно быстрыми и подчиняющимися инкрементальному упругому закону (вообще говоря, анизотропному), характеризующемуся и объёмными, и сдвиговыми упругими модулями.

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Исследование устойчивости будет основано на энергетическом критерии устойчивости в малом. Последний сводится к положительной определённости квадратичного функционала второй вариации полной потенциальной энергии (ППЭ) по отношению к исследуемому на устойчивость равновесному состоянию системы, принимаемому за отсчётную конфигурацию. При записи второй вариации, а также при выполнении всех требуемых для анализа выкладок будем использовать отсчётное описание сплошной среды с обозначениями механических величин, близкими к обозначениям книги [6]; при этом будет использоваться другая система безындексных обозначений тензорных величин, а именно модифицированная система Дж.В. Гиббса.

Пусть $\mathbf{x}$ — радиус-вектор материальной точки в отсчётной конфигурации. Запишем радиус-вектор $\mathbf{r}$ её текущего положения в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x})$.

Гидростатичность отсчётного равновесного состояния влечёт за собой стратификацию отсчётной плотности и отсчётного давления по глубине z:

$$\rho_\text{к} = \rho_\text{к}(z), \quad p_\text{к} = p_\text{к}(z), \quad \frac{dp_\text{к}}{dz} = \rho_\text{к}(z)g.$$

Будем считать, что и упругие свойства геоматериала (т.е. упругие модули, входящие в инкрементальное определяющее соотношение) также стратифицированы по глубине.

Как известно [6], инкрементальный упругий закон для напряжений Пиолы относительно гидростатического исходного состояния имеет следующий вид:

$$\delta\mathbf{T}_\text{к}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(z)\colon \delta\boldsymbol{\varepsilon} - p_\text{к}\mathbf{I}(\mathbf{I}\colon \nabla_\text{к} \otimes \delta\mathbf{r}) + p_\text{к}(z)\nabla_\text{к} \otimes \delta\mathbf{r}^T,$$
$$\delta\mathbf{r}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{r}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{x},$$

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla_\kappa \otimes \delta\mathbf{r} + \nabla_\kappa \otimes \delta\mathbf{r}^T),$$

где $\mathbf{I}$ — единичный ТР(2). Тензор упругих модулей $\mathbf{L}(z)$ (который является тензором четвёртого ранга (ТР(4)) и задаёт собственно жесткостные свойства материала) в силу существования упругого потенциала и гидростатичности начальных напряжений симметричен. Будем считать, что $\mathbf{L}(z)$ таков, что чисто объёмные инкрементальные деформации порождают гидростатические инкрементальные напряжения. Тогда девиаторные инкрементальные деформации порождают девиаторные инкрементальные напряжения, и в силу спектральной теоремы $\mathbf{L}(z)$ имеет следующий вид [7]:

$$\mathbf{L}(z) = \sum_{i=1}^{5} 2G_i(z)\boldsymbol{\Gamma}(z) \otimes \boldsymbol{\Gamma}_i(z) + K(z)\mathbf{I} \otimes \mathbf{I},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_i(z)\colon \mathbf{I} = 0, \quad \boldsymbol{\Gamma}_i(z)\colon \boldsymbol{\Gamma}_j(z) = \delta_{ij},$$

где $\boldsymbol{\Gamma}_i(z)$ — нормированные собственные девиаторы, $K(z)$ — модуль объёмного сжатия, $G_i(z)$ — модули сдвига.

Вводя симметричный положительно определённый ТР(2) $\mathbf{S}$, задающий жёсткость упругой заделки на Σ_-, запишем вторую вариацию ППЭ, которую будем обозначать $R\{\delta\mathbf{r}\}$, в виде, вытекающем из результатов работ [1–5]:

$$R\{\delta\mathbf{r}\} =$$
$$= \left\langle \delta\boldsymbol{\varepsilon}\colon \mathbf{L}\colon \delta\boldsymbol{\varepsilon} - 2\rho_\kappa g(\nabla_\kappa \cdot \delta\mathbf{r})(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3) + \frac{d\rho_\kappa}{dz} g(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3)^2 \right\rangle +$$
$$+ \langle \rho_\kappa g(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3)^2\rangle_{\Sigma_+} - \langle \rho_\kappa g(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3)^2\rangle_{\Sigma_-} + \langle \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{S}\cdot\delta\mathbf{r}\rangle_{\Sigma_-},$$

где угловые скобки обозначают интегрирование по отсчётному множеству, указанному справа внизу. Для квадратичной формы $\delta\boldsymbol{\varepsilon}\colon \mathbf{L}(z)\colon \delta\boldsymbol{\varepsilon}$ имеем

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}\colon \mathbf{L}(z)\colon \delta\boldsymbol{\varepsilon} \geq 2\underline{G}(z)\delta\boldsymbol{\varepsilon}\colon \mathbf{1}^{\mathrm{dev}}\colon \delta\boldsymbol{\varepsilon} + K(z)(\nabla_\kappa \cdot \delta\mathbf{r})^2, \quad (1)$$

где $\mathbf{1}^{\mathrm{dev}}$ — ТР(4), отображающий симметричные девиаторы в себя, а шаровые ТР(2) — в ноль, $\underline{G}(z)$ — минимум $G_i(z)$ по i.

С учётом (1) получаем следующий минорирующий функционал $\underline{R}\{\delta\mathbf{r}\} \leq R\{\delta\mathbf{r}\}$:

$$\underline{R}\{\delta\mathbf{r}\} = \Big\langle 2\underline{G}(z)\delta\boldsymbol{\varepsilon}\colon \mathbf{1}^{\mathrm{dev}}\colon \delta\boldsymbol{\varepsilon} + K(z)(\nabla_\kappa \cdot \delta\mathbf{r})^2 -$$
$$- 2\rho_\kappa(z) g(\nabla_\kappa \cdot \delta\mathbf{r})(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3) + \frac{d\rho_\kappa}{dz}(z) g(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3)^2 \Big\rangle_B +$$
$$+ \langle \rho_\kappa g(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3)^2\rangle_{\Sigma_+} - \langle \rho_\kappa g(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3)^2\rangle_{\Sigma_-} + \langle \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{S}\cdot\delta\mathbf{r}\rangle_{\Sigma_-}.$$

Дальнейшие преобразования минорирующего функционала используют метод, предложенный в работах [8, 9], и основаны на нулевых граничных условиях на боковой границе Σ_s. Такие граничные условии позволяют считать, что множество допустимых полей инкрементальных смещений является подмножеством множества непрерывных векторных полей, обращающихся в ноль на боковых гранях прямоугольного параллелепипеда $\tilde{B}$, охватывающего область B и задаваемого неравенствами

$$0 \leq \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i \leq l_i, \quad i = 1, 2; \quad 0 \leq z \leq l_3.$$

Такие поля при любом значении z являются периодичными по x_1 и x_2 с периодами l_1 и l_2 соответственно. Разложим такое поле $\delta\mathbf{r}(\mathbf{x})$ в двойной ряд Фурье в прямоугольнике $0 \leq x_i \leq l_i$, $i = 1, 2$. Как известно, в силу периодичности поля $\delta\mathbf{r}(\mathbf{x})$ ряд Фурье для его градиента равняется формально продифференцированному ряду Фурье для самого поля. Нетрудно показать, что каждый член ряда Фурье для $\nabla_\kappa \otimes \delta\mathbf{r}(\mathbf{x})$ является вырожденным ТР(2); обозначая его через $\mathbf{H}$, а вектор, который он обращает в ноль, через $\mathbf{e}$, запишем равенство для его симметричной части $\mathbf{H}^s$ и вытекающее из него неравенство:

$$\mathbf{e}\cdot\mathbf{H} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{e}\cdot\mathbf{H}^s\cdot\mathbf{e} = 0 \Rightarrow \mathbf{H}^s\colon \mathbf{1}^{\mathrm{dev}}\colon \mathbf{H}^s \geq \frac{1}{6}(\mathbf{H}^s\colon \mathbf{I})^2.$$

Применяя теорему Парсеваля для прямоугольника ($0 \leq x_i \leq l_i$, $i = 1, 2$) и интегрируя затем по z, приходим к неравенству

$$\langle 2\underline{G}(z)\delta\boldsymbol{\varepsilon}\colon \mathbf{1}^{\mathrm{dev}}\colon \delta\boldsymbol{\varepsilon}\rangle_B \geq \left\langle \frac{1}{3}\underline{G}(z)(\delta\boldsymbol{\varepsilon}\colon \mathbf{I})^2 \right\rangle_B =$$
$$= \left\langle \frac{1}{3}\underline{G}(z)(\nabla_\kappa \cdot \delta\mathbf{r})^2 \right\rangle_B. \quad (2)$$

С учётом (2) получаем второй минорирующий функционал $\underline{\underline{R}}\{\delta\mathbf{r}\} \leq \underline{R}\{\delta\mathbf{r}\} \leq R\{\delta\mathbf{r}\}$:

$$\underline{\underline{R}}\{\delta\mathbf{r}\} = \langle \rho_\kappa g(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3)^2\rangle_{\Sigma_+} +$$
$$+ \left\langle \left(K(z) + \frac{1}{3}\underline{G}(z)\right)\left(\nabla_\kappa \cdot \delta\mathbf{r} - \frac{\rho_\kappa(z) g}{K(z) + \frac{1}{3}\underline{G}(z)}(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3)\right)^2 \right\rangle_B +$$
$$+ \left\langle \left(\frac{d\rho_\kappa}{dz}(z) - \frac{(\rho_\kappa(z))^2 g}{K(z) + \frac{1}{3}\underline{G}(z)}\right) g(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3)^2 \right\rangle_B +$$
$$+ \langle \delta\mathbf{r}\cdot(\mathbf{S} - \rho_\kappa g\mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)\cdot\delta\mathbf{r}\rangle_{\Sigma_-}. \quad (3)$$

Представление (3) можно назвать каноническим видом функционала $\underline{\underline{R}}\{\delta\mathbf{r}\}$, поскольку из него очевидны условия его положительной полуопределённости, которые являются достаточными условиями устойчивости рассматриваемой системы:

$$\frac{d\rho_\kappa}{dz}(z) \geq \frac{(\rho(z))^2 g}{K(z) + \frac{1}{3}\underline{G}(z)}, \tag{4}$$
$$0 \leq z \leq l_3, \quad \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{S}\cdot\delta\mathbf{r} \geq \rho_\kappa(l_3)g(\delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_3)^2.$$

Второе неравенство в (4) означает, что упругая заделка на Σ_- должна иметь жёсткость не меньше той, которая компенсирует “провисание” нижней части слоя. Если область B не выходит на нижнюю граничную плоскость слоя (т.е. нулевые граничные условия ставятся на $\partial B \setminus \Sigma_+$), то второго условия просто нет, а если считать, что имеется подстилающий слой и на Σ_- имеется скачок плотности, то второе условие сводится к тому, что $\rho_\kappa(l_3 + 0) \geq \rho_\kappa(l_3 - 0)$ (отсутствие инверсии плотности).

Первое неравенство в (4) устанавливает диапазон значений $\frac{d\rho_\kappa}{dz}$, достаточных для устойчивости. Очевидно, что чем больше минимальный инкрементальный модуль сдвига $\underline{G}$, тем шире упомянутый диапазон. Сопоставляя (4) с полученным ранее для материала с нулевой сдвиговой жёсткостью необходимым и достаточным условием устойчивости $\left(\frac{d\rho_\kappa}{dz}\right)_* \equiv \frac{d\rho_\kappa}{dz}(z) - \frac{(\rho_\kappa(z))^2 g}{K(z)} \geq 0$ (требующим неотрицательности приведённой величины $\left(\frac{d\rho_\kappa}{dz}\right)_*$, которая получается из $\frac{d\rho_\kappa}{dz}$, если отбросить составляющую, порождаемую ростом давления с глубиной), приходим к тому, что имеется диапазон значений $\frac{d\rho_\kappa}{dz}$, а именно

$$\frac{\rho_\kappa^2 g}{K + \frac{1}{3}\underline{G}} \leq \frac{d\rho_\kappa}{dz} < \frac{\rho_\kappa^2 g}{K},$$

в котором геосистемы при наличии сдвиговой жёсткости устойчивы, а при её отсутствии — неустойчивы (стабилизирующее влияние сдвиговой жёсткости).

Особый интерес для геофизики представляет случай, когда в ходе тех или иных природных процессов значение сдвиговой жёсткости геоматериала существенно уменьшается и существующее значение $\frac{d\rho_\kappa}{dz}$ оказывается за пределами диапазона устойчивости, в результате чего происходит потеря устойчивости, сопровождаемая большими структурными изменениями вплоть до возникновения новых геоструктур.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рыжак Е.И.*, *Никитин Л.В.* Об устойчивости и собственных колебаниях системы “плита—жидкость” с инверсией плотности // Физика Земли. 2005. № 5. С. 65–75.
2. *Рыжак Е.И.*, *Мухамедиев Ш.А.*, *Синюхина С.В.* Условия и механизмы возникновения гравитационной неустойчивости слоистых объемно-упругих геомассивов // Физика Земли. 2016. № 6. С. 4–20. DOI: 10.7868/S0002333716060090.
3. *Мухамедиев Ш.А.*, *Рыжак Е.И.*, *Синюхина С.В.* Об устойчивости двуслойной системы неоднородных тяжелых сжимаемых жидкостей // Прикладная математика и механика. 2016. Т. 80. Вып. 3. С. 375–385. https://elibrary.ru/item.asp?id=27175018
4. *Ryzhak E.I.*, *Mukhamediev Sh.A.*, *Sinyukhina S.V.* Conditions of Stability and Instability for a Pair of Arbitrarily Stratified Compressible Fluids in an Arbitrary Non-Uniform Gravity Field // Int. J. Non-Linear Mechanics. 2017. V. 96C. P. 36–45. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2017.08.002.
5. *Ryzhak E.I.*, *Sinyukhina S.V.* Analytical Investigation of Free Vibrations of a Bounded Nonlinear Bulk-Elastic Medium in a Field of Mass Forces // J. Mechanics of Materials and Structures. 2019. V. 14. № 1. P. 61–95. DOI: 10.2140/jomms.2019.14.61.
6. *Truesdell C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. Baltimore, Maryland: J. Hopkins Univ., 1972.
7. *Рыхлевский Я.* О законе Гука // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48. В. 3. С. 420–435.
8. *Ryzhak E.I.* Korn’s Constant for a Parallelepiped with a Free Face or Pair of Faces // Mathematics and Mechanics of Solids. 1999. V. 4. № 1. P. 35–55.
9. *Никитин Л.В.*, *Рыжак Е.И.* Об устойчивости и неустойчивости сжатого блока, прижатого к гладкому основанию // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. № 4. С. 42–57.

ON STABILITY OF STRATIFIED ELASTIC GEOSYSTEMS IN A GRAVITY FIELD

E. I. Ryzhak, S. V. Sinyukhina

Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences, *Moscow*, *Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS A.O. Gliko June 26, 2019

Received July 2, 2019

Stability of stratified elastic geosystems in a gravity field is studied analytically with regard for the shear stiffness of geomaterial. A sufficient condition for stability of a geomass clamped at the lateral boundaries, is obtained: for any ratios of dimensions of the geomass it is sufficient for stability that the rate of density increase with depth (in the loaded equilibrium state) exceed a certain positive value which depends on shear stiffness so that the greater the stiffness, the less the value, and vice versa (the stabilizing effect of shear stiffness). At zero shear stiffness the value mentioned is maximal and characterizes the necessary and sufficient condition for stability of a bulk-elastic geomass. Geophysical consequences of obtained stability condition are analyzed.

Keywords: stratified elastic geosystems, stability, gravity field.