ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, *2019*, *том 489*, *№ 4*, *с. 344–346*

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

ВЕСОВОЕ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВО ЛЕБЕГА СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В. М. Кокилашвили

Представлено академиком РАН Б.С. Кашиным 05.07.2019 г.

Поступило 05.07.2019 г.

Вводятся весовые гранд-пространства Лебега со смешанной нормой и приводятся критерии ограниченности в этих пространствах сильных максимальных функций и преобразований Рисса.

Ключевые слова: весовые пространства, смешанные нормы, гранд-пространства, преобразования Рисса.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524894344-346

В работе строится новая шкала банаховых функциональных пространств как результат грандирования лебеговых пространств со смешанной нормой. Введение и изучение пространств Лебега со смешанной нормой было инициировано в работе [1]. Что касается гранд-пространств Лебега $L^{p)}$, то они были введены в 1990-х гг. Т. Иванецом и К. Сбордоне [2] в связи с нахождением минимальных условий интегрируемости якобиана. Несколько более общее функциональное пространство $L^{p),\vartheta}$ было рассмотрено в работе [3], где авторы исследовали неоднородное n-гармоническое уравнение $\operatorname{div} A(x, \nabla u) = \mu$.

В настоящее время интенсивное исследование гранд-пространств Лебега обусловлено тем, что они оказались именно теми пространствами, в которых успешно решаются задачи существования и единственности, а также проблемы регулярности решений широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Проблемам ограниченности интегральных операторов гармонического анализа в весовых гранд-пространствах $L_w^{p),\vartheta}$ посвящены работы [4–12] (см. также монографию [13, гл. 14]).

Положим (X, d, μ) — квазиметрическое пространство с σ-конечной полной мерой μ и квазиметрикой d. Для любого $x \in X$ и $r > 0$ множество $B(x, r) = \{y: d(x, y) < r\}$ называется шаром. Предполагается, что конечная мера μ определена на σ-алгебре подмножеств пространства X, содержащего все шары. Мы также всюду будем предполагать, что $0 < \mu B(x, r) < \infty$ и $\mu\{x\} = 0$ для всех $x \in X$ и $r > 0$. Если мера μ удовлетворяет условию удвоения

$$\mu B(x, 2r) \le c\mu B(x, r),$$

где постоянная c не зависит от $x \in X$ и $r > 0$, то (X, d, μ) называется пространством однородного типа.

Для $1 \le r < \infty$ через $L^r(X, \mu)$ будем обозначать лебегово пространство, заданное на X. Пусть w — весовая функция (т.е. положительная почти всюду в смысле меры μ, локально интегрируемая на X). Через $L_w^r(X, \mu)$ обозначим множество всех тех $F: R^1 \to X$, для которых $\|F\|_{L_w^r} = \|Fw^{1/r}\|_{L^r} < +\infty$.

По определению весовая функция w, определённая на пространстве X, принадлежит классу $A_r(X)$ $(1 < r < \infty)$, если

$$\sup\left(\frac{1}{\mu B}\int_B w(x)d\mu\right)\left(\frac{1}{\mu B}\int_B w^{1-r'}(x)d\mu\right)^{r-1} < \infty,$$

$$p' = \frac{p}{p-1},$$

где точная верхняя грань берётся по всем шарам B в X.

В дальнейшем будем предполагать, что $\mu X < \infty$, $1 < p < \infty$. Пусть положительная измеримая функция φ на интервале $(0, p-1)$ такова, что она не убывает, ограничена и $\lim\limits_{x \to 0+} \varphi(x) = 0$.

Обобщённое весовое гранд-пространство Лебега $L_w^{p),\varphi}$ определяется как множество тех $F: X \to R^1$, для которых конечна норма

$$\|F\|_{L_w^{p),\varphi}} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} (\varphi(\varepsilon))^{\frac{1}{p-\varepsilon}} \|F\|_{L_w^{p-\varepsilon}} < +\infty.$$

Математический институт им. А.М. Размадзе Тбилисского государственного университета им. Иванэ Джавахишвили, *Грузия*

E-mail: *vakhtangkokilashvili@yahoo.com*

Пространство $L_w^{p),\varphi}$ является банаховым функциональным пространством, нерефлексивным, несепарабельным и неинвариантным относительно перестановки при $w(x) \not\equiv 1$.

Теперь введём гранд-пространства Лебега со смешанной нормой. Пусть (X_i, d_i, μ_i), $i = 1, 2$, — однородные пространства, для которых X_i ограничено и $\mu_i X_i < +\infty$, $i = 1, 2$. Предположим: $1 < p_i < \infty$, w_i — весовые функции, заданные на X_i, и функции φ_i удовлетворяют тем условиям, что и функция φ в определении пространства $L_w^{p),\varphi}$. Обобщённым весовым гранд-пространством $L_{w_1}^{p_1),\varphi_1}(L_{w_2}^{p_2),\varphi_2})$ со смешанной нормой будем называть множество функций $f: X_1 \times X_2 \to R^1$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{L_{w_1}^{p_1),\varphi_1}(L_{w_2}^{p_2),\varphi_2})} = \\ = \sup_{\substack{0<\varepsilon_i<p_i-1 \\ i=1,2}} \prod_{j=1}^{2} (\varphi_j(\varepsilon_j))^{\frac{1}{p_i-\varepsilon_i}} \left\| \|f\|_{L_{w_2}^{p_2-\varepsilon_2}} \right\|_{L_{w_1}^{p_1-\varepsilon_1}}.$$

Пространство $L_{w_1}^{p_1),\varphi_1}(L_{w_2}^{p_2),\varphi_2})$ является также банаховым функциональным пространством.

При $w_i \in A_{p_i}(X_i)$, $i = 1, 2$, имеют место непрерывные вложения

$$L_{w_1}^{p_1}(L_{w_2}^{p_2}) \subset L_{w_1}^{p_1),\varphi_1}(L_{w_2}^{p_2),\varphi_2}) \subset L_{w_1}^{p_1-\varepsilon_1}(L_{w_2}^{p_2-\varepsilon_2}), \\ 0 < \varepsilon_i < p_i - 1,$$

где $L_{w_1}^{r_1 s_1}(L_{w_2}^{r_2 s_2})$ обозначает пространство Лебега со смешанной нормой.

Определим сильную максимальную функцию на $X_1 \times X_2$ с произведением мер μ_1 и μ_2:

$$M^{(s)} f(x, y) = \sup_{\substack{x \in B_1 \\ y \in B_2}} \frac{1}{\mu B_1 \mu B_2} \int_{B_1 \times B_2} |f(t, s)| d(\mu_1 \times \mu_2).$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$. *Тогда оператор* $M^{(s)}$ *ограничен в пространстве* $L_{w_1}^{p_1),\varphi_1}(L_{w_2}^{p_2),\varphi_2})$ *тогда и только тогда, когда* $w_i \in A_{p_i}$, $i = 1, 2$.

Пусть k_i $(i = 1, 2)$ — ядра Кальдерона—Зигмунда, определённые соответственно на X_i (относительно определения ядер Кальдерона—Зигмунда, см. [13, с. 503]).

Положим

$$E_{\varepsilon,\sigma}(x_1, x_2) = \\ = \{(t_1, t_2): (t_1, t_2) \in (X_1 \setminus B(x_1, \varepsilon) \times X_2 \setminus B(x_2, \sigma))\}.$$

Пусть

$$Kf(x_1, x_2) = \\ = \lim_{(\varepsilon,\sigma)\to(0,0)} \int_{E_{\varepsilon,\sigma}(x_1,x_2)} \prod_{i=1}^{2} k_i(x_i, t_i) f(t_1, t_2) d(\mu_1 \times \mu_2)$$

есть кратный сингулярный интеграл Кальдерона—Зигмунда.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p_1, p_2 < \infty$, $w_i \in A_{p_i}(X_i)$, $i = 1, 2$. *Тогда оператор* K *ограничен в пространстве* $L_{w_1}^{p_1),\varphi_1}(L_{w_2}^{p_2),\varphi_2})$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$. *Положим* $Q_1 \times Q_2$ — *произведения двух параллелепипедов*, $Q_1 \subset \mathbb{R}^m$, $Q_2 \subset \mathbb{R}^n$, *грани которых параллельны координатным плоскостям. Тогда для ограниченности преобразования Рисса*

$$(R_{i,j} f)(x, y) = p.v. \int_{Q_1 \times Q_2} f(t, \tau) \frac{(x_i - t_i)(y_j - \tau_j) dt d\tau}{|x - t|^{m+1} |y - \tau|^{n+1}}, \\ 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n, \quad x \in Q_1, \quad y \in Q_2,$$

в пространстве $L_{w_1}^{p_1),\varphi_1}(L_{w_2}^{p_2),\varphi_2})(Q_1 \times Q_2)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $w_k \in A_{p_k}$, $k = 1, 2$.

Пусть 2π-периодическая относительно каждой переменной функция f задана на торе $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$, где $\mathbb{T}$ является окружностью $\{e^{i\varphi}: \varphi \in [0, 2\pi]\}$. Положим, что для неё почти всюду существует сопряжённая функция

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} f(x_1 + s_1, x_2 + s_2) \prod_{i=1}^{2} \operatorname{ctg} \frac{s_i}{2} ds_1 ds_2.$$

Справедлива

Теорема 4. *Пусть* $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$. *Оператор* $f \to \tilde{f}$ *ограничен в* $L_{w_1}^{p_1),\varphi_1}(L_{w_2}^{p_2),\varphi_2})(\mathbb{T}^2)$ *тогда и только тогда, когда* $w_i \in A_{p_i}$, $i = 1, 2$.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Национального научного фонда Шота Руставели (проект FR-18-2499).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Benedek A.*, *Panzone R.* // Duke Math. J. 1961. V. 28. P. 301–324.
2. *Iwaniec T.*, *Sbordone C.* // Arch. Rational Mech. Anal. 1992. V. 119. № 2. P. 129–143.
3. *Greco L.*, *Iwaniec T.*, *Sbordone C.* // Manuscripta Math. 1997. V. 92. № 2. P. 249–258.
4. *Fiorenza A.*, *Gupta B.*, *Jain P.* // Studia Math. 2008. V. 188. № 2. P. 123–133.
5. *Kokilashvili V.*, *Meskhi A.* // Georgian Math. J. 2009. V. 16. № 3. P. 547–551.

6. *Fiorenza A.*, *Kokilashvili V.* // Ann. Funct. Anal. 2018. V. 9. № 3. P. 413–425.
7. *Meskhi A.* // J. Math. Sci. N.Y. 2011. V. 178. № 6. P. 622–636.
8. *Capone C.*, *Formica M.R.*, *Giova R.* // Nonlinear Anal. 2013. V. 85. P. 125–131. Zbl 1286.46030.MR3040353. DOI: 10.1016/j.na.2013.02.021.414.
9. *Anatriello G.*, *Fiorenza A.* // J. of Math. Analysis and Appl. 2015. V. 422. № 2. P. 783–797.
10. *Anatriello G.*, *Formica M.R.* // Ricerche di Mathematica. 2016. V. 65. № 1. P. 221–233.
11. *Кокилашвили В.М.*, *Месхи А.Н.* // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 167–192.
12. *Samko S.G.*, *Umarkhadzhiev S.M.* // Azerb. J. Math. 2011. V. 1. № 1. P. 67–84.
13. *Kokilashvili V.*, *Meskhi A.*, *Rafeiro H.*, *Samko S.* Integral Operators in Non-Standard Function Spaces. II: Variable Exponent Holder, Morrey-Campanato and Grand Spaces // Oper. Theory Adv. Appl. 2016. V. 249. Birkhauser, Cham. Zbl 1367.47004. MR3559401. DOI: 10.1007/978-3-319-21018-6.1.414.

WEIGHTED GRAND LEBESGUE SPACES WITH MIXED-NORMS AND INTEGRAL OPERATORS

V. M. Kokilashvili

A. Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili, Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

Presented by Academician of the RAS B.S. Kashin July 5, 2019

Received July 5, 2019

In this paper the weighted grand Lebesgue spaces with mixed-norms are introduced and boundedness criteria in these spaces of strong maximal functions and Riesz transforms are presented.

Keywords: weighted spaces, mixed-norms, grand Lebesgue spaces, Riesz transforms.