ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 489, № 4, с. 347–350

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95, 517.98

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С АФФИННЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ АРГУМЕНТА

Л. Е. Россовский[1,*], А. А. Товсултанов[2,]**

Представлено академиком РАН Е.И. Моисеевым 17.12.2018 г.

Поступило 29.03.2019 г.

В работе рассматривается задача Дирихле для эллиптического функционально-дифференциального уравнения, содержащего комбинацию сдвигов и сжатия аргумента неизвестной функции под знаком оператора Лапласа. Установлены достаточные условия однозначной разрешимости. Показано также, что задача может иметь бесконечномерное многообразие решений.

Ключевые слова: эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение, краевая задача, дифференциально-разностное уравнение, линейно преобразованный аргумент.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524894347-350

1. Функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями аргумента (т.е. с комбинациями сжатий/растяжений и сдвигов), обобщающие хорошо известное уравнение пантографа, находят применения в самых разных областях: астрофизике [1], нелинейных колебаниях [12], биологии [8], теории чисел [11], теории вероятностей [7]. Они являются модельными в классе уравнений с неограниченным запаздыванием, а изучение их многомерных аналогов имеет существенное значение при построении общей теории эллиптических краевых задач для уравнений с бесконечной неизометрической группой сдвигов. Функционально-дифференциальные уравнения с аффинными преобразованиями на прямой достаточно подробно изучались начиная с 1970-х гг. в связи с вопросами существования ограниченных решений и асимптотического поведения решений на бесконечности (см., например, [2, 9, 10], к настоящему времени опубликовано значительное число работ этих же авторов, а также ряда других математиков).

Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения, содержащего сжатие скалярного аргумента, впервые была рассмотрена в [3]. Современное состояние теории краевых задач для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений отражено в [4, 6, 13, 14] — здесь задачи изучались либо в присутствии только сдвигов (дифференциально-разностные уравнения), либо в присутствии только сжатий и растяжений. В настоящей работе рассматривается модельное (функциональный оператор под знаком лапласиана) уравнение, содержащее и сдвиг, и сжатие. Возникающие при этом трудности связаны с тем, что сжатие и сдвиг являются некоммутирующими преобразованиями. Кроме того, наличие в уравнении одновременно сжатия и сдвига приводит к появлению бесконечного числа неподвижных точек для преобразований аргументов. Задача рассматривается в предположении, что все эти неподвижные точки принадлежат замыканию рассматриваемой области.

2. Пусть K — некоторый компакт в $\mathbb{R}^n$ и $\nu \in (C(K))^*$ — регулярная (комплексная) борелевская мера, сосредоточенная на этом компакте. Для функций, заданных в $\mathbb{R}^n$, рассмотрим операцию свёртки

$$(u * \nu)(x) = \int_K u(x - h) d\nu(h).$$

Для гладкой финитной функции u свёртка также будет гладкой финитной функцией. Переходя к образам Фурье, убеждаемся с использованием теоремы Фубини, что

$$\widetilde{(u * \nu)}(\xi) = \tilde{\nu}(\xi)\tilde{u}(\xi),$$

где

$$\tilde{\nu}(\xi) = \int_K e^{-ih\xi} d\nu(h)$$

[1] *Российский университет дружбы народов, Москва*

[2] *Чеченский государственный университет, Грозный*

**E-mail*: *lrossovskii@gmail.com*

***E-mail*: *a.tovsultanov@mail.ru*

есть характеристическая функция меры ν, равномерно непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}^n$. Таким образом, свёртка однозначно продолжается до ограниченного линейного оператора в пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ и пространствах Соболева $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$.

Зафиксировав число $p > 1$, обозначим $Pu(x) = u(p^{-1}x)$. Под оператором с аффинным преобразованием аргумента мы будем понимать оператор

$$Tu(x) = P(u * \nu)(x) = \int_K u(p^{-1}x - h)d\nu(h). \qquad (1)$$

Оператор T можно записать по-другому, поменяв местами операции свёртки и сжатия:

$$Tu(x) = \int_K u(p^{-1}(x - ph))d\nu(h) =$$
$$= \int_{pK} u(p^{-1}(x - h))dP\nu(h) = (Pu * P\nu)(x).$$

Здесь $P\nu$ — мера на pK, определяемая по формуле $P\nu(B) = \nu(p^{-1}B)$.

Лемма 1. *Спектральный радиус оператора T: $L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ вычисляется по формуле*

$$\rho(T) = p^{n/2}\lim_{m\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\tilde{\nu}(\xi)\tilde{\nu}(p^{-1}\xi)\ldots\tilde{\nu}(p^{1-m}\xi)|^{1/m} =$$
$$= p^{n/2}\lim_{m\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\tilde{\nu}(\xi)\tilde{\nu}(p\xi)\ldots\tilde{\nu}(p^{m-1}\xi)|^{1/m}. \qquad (2)$$

Доказательство следует из известной формулы спектрального радиуса [5, теорема 10.13] и того факта, что

$$\widetilde{(T^m u)}(\xi) = p^{mn}\tilde{\nu}(p\xi)\tilde{\nu}(p^2\xi)\ldots\tilde{\nu}(p^m\xi)\tilde{u}(p^m\xi).$$

Пример 1. Пусть $0 \neq h^0 \in \mathbb{R}^n$, $K = \{h^0, -h^0\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, и $\nu = a\delta(h + h^0) + b\delta(h - h^0)$, δ — мера (дельта-функция) Дирака. В этом случае рассматривается оператор $Tu(x) = au(p^{-1}x + h^0) + bu(p^{-1}x - h^0)$. По формуле (2) имеем

$$\rho(T) = p^{n/2}(a^2 + b^2)^{1/2}\lim_{m\to\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}|(1 + \kappa\cos t)\times$$
$$\times(1 + \kappa\cos pt)\ldots(1 + \kappa\cos p^{m-1}t)|^{1/2m},$$
$$\kappa = 2ab/(a^2 + b^2), \quad |\kappa| \le 1.$$

Случаи $\kappa > 0$ и $\kappa < 0$ различаются. Если $\kappa > 0$ (a и b одного знака), то фигурирующая здесь верхняя грань достигается при $t = 0$, она одна и та же для всех m и равна $(1 + \kappa)^{1/2}$. Так что спектральный радиус равен норме оператора T, $\rho(T) = p^{n/2}(|a| + |b|)$. Если же $\kappa < 0$ (a и b разных знаков), то ситуация начинает существенно зависеть от p. Пусть, к примеру, $a = 1$, $b = -1$. Можем записать

$$\rho(T) = 2p^{n/2}\lim_{m\to\infty}\sup_{t\in\mathbb{R}}|\sin t\sin pt\ldots\sin p^{m-1}t|^{1/m}.$$

Когда p есть нечётное целое число,

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{p\pi}{2}\right)\ldots\sin\left(\frac{p^{m-1}\pi}{2}\right)\right| = 1.$$

В этом случае мы вновь имеем стационарную последовательность, и спектральный радиус равен $2p^{n/2}$ — норме оператора T. Если же $p = 2$, то соответствующая последовательность уже не является стационарной и $\rho(T) \ll 2p^{n/2}$. Например, $\sup|\sin t\sin 2t|^{1/2} = 2\cdot 3^{-3/4} < 1$, а $\sup|\sin t\sin 2t\sin 4t|^{1/3}$ ещё меньше. Наконец отметим, что в рассмотренном примере величина $\rho(T)$ не зависит от величины сдвига.

Будем рассматривать операторы, действующие на функции в ограниченной области Ω. Наложим на пару Ω, K ключевое условие

$$p^{-1}\Omega - K \subset \Omega. \qquad (3)$$

Оно позволяет также рассматривать T как ограниченный оператор в $L_2(\Omega)$ — этот оператор является композицией оператора свёртки, действующего из $L_2(\Omega)$ в $L_2(p^{-1}\Omega)$, и оператора сжатия P из $L_2(p^{-1}\Omega)$ в $L_2(\Omega)$. То же относится и к случаю пространства $H^s(\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть выполнено геометрическое условие* (3), *а число $\alpha \in \mathbb{C}$ таково, что $|\alpha| < 1/\rho(T)$. Тогда при всех $s \ge 0$ оператор $I + \alpha T$: $H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$ имеет ограниченный обратный. Если же для некоторого положительного числа s выполнено более сильное условие $|\alpha| < 1/(p^s\rho(T))$, то ограниченно обратимым будет и оператор $I + \alpha T$: $H^{-s}(\Omega) \to H^{-s}(\Omega)$.*

Поскольку в условиях леммы оператор $I + \alpha T$: $L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ имеет ограниченный обратный $(I + \alpha T)^{-1}v = \sum_{m=0}^{\infty}(-\alpha)^m T^m v$, доказательство сводится к оценке нормы в $H^s(\mathbb{R}^n)$ члена ряда. После этого используется геометрическое условие (3) — благодаря ему сужение функции $T^m v$ на Ω однозначно определяется сужением функции v на Ω.

3. В условиях предыдущего пункта рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta(u(x) + \alpha P(u * \nu)(x)) = f(x), \quad x \in \Omega, \qquad (4)$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (5)$$

Считая $f \in L_2(\Omega)$, под обобщённым решением задачи (4), (5) будем понимать функцию $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\sum_{j=1}^{n}((u+\alpha P(u*\nu))_{x_j},\ v_{x_j})_{L_2(\Omega)} = (f,\ v)_{L_2(\Omega)} \quad (6)$$

при любой функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$.

Теорема 1. *При выполнении условия* (3) *и неравенства*

$$|\alpha| < p^{1-n/2}\left[\lim_{m\to\infty}\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}|\tilde{\nu}(\xi)\tilde{\nu}(p\xi)\ldots\tilde{\nu}(p^{m-1}\xi)|^{1/m}\right]^{-1} \quad (7)$$

задача (4), (5) *имеет единственное обобщённое решение* $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$. *Если вдобавок* $f \in H^k(\Omega)$, *а* $\partial\Omega \in C^{k+2}$ (*k — целое неотрицательное*), *то* $u \in H^{k+2}(\Omega)$.

Доказательство. Хорошо известно, что оператор Лапласа действует как линейный гомеоморфизм между пространством $\mathring{H}^1(\Omega)$ и сопряжённым к нему пространством $(\mathring{H}^1(\Omega))^* = H^{-1}(\Omega)$. Если переписать выражение в левой части уравнения (4) в виде

$$-(\Delta u + \alpha p^{-2}P(\Delta u*\nu)) = -(I+\alpha p^{-2}T)\Delta u,$$

где $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$, то становится понятно, что вопрос об однозначной разрешимости задачи (4), (5) сводится к вопросу обратимости оператора

$$I+\alpha p^{-2}T\colon H^{-1}(\Omega)\to H^{-1}(\Omega).$$

Неравенство (7) означает, что $|\alpha|p^{-2} < 1/(p\rho(T))$. Тогда по лемме 2 данный оператор имеет ограниченный обратный

$$(I+\alpha p^{-2}T)^{-1}\colon H^{-1}(\Omega)\to H^{-1}(\Omega),$$

так что в условиях теоремы исходная задача эквивалентна задаче Дирихле для уравнения $-\Delta u = (I+\alpha p^{-2}T)^{-1}f$. Утверждение теоремы следует теперь из известных свойств решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона и ограниченности оператора $(I+\alpha p^{-2}T)^{-1}$ также в пространстве $L_2(\Omega)$ и пространствах $H^k(\Omega)$.

Пример 2. Построен пример, показывающий, что при определённых значениях α (достаточно больших по модулю) задача вида (4), (5) может иметь бесконечно много обобщённых решений. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — квадрат $\{-1 < x_1, x_2 < 1\}$ и $h = (1, 1)$. Рассмотрим в Ω задачу Дирихле для уравнения

$$-\Delta\left(u(x)+\alpha\left[u\left(\frac{x+h}{2}\right)-u\left(\frac{x-h}{2}\right)\right]\right) = f(x), \quad x\in\Omega. \quad (8)$$

Здесь $Tu(x) = u\left(\frac{x+h}{2}\right)-u\left(\frac{x-h}{2}\right)$, условие (3) выполнено (оператор представляет собой комбинацию сжатий с центрами в вершинах квадрата (1, 1) и (−1, −1)), а всё выражение под знаком лапласиана задаёт, очевидно, ограниченный оператор

$$I+\alpha T\colon \mathring{H}^1(\Omega)\to\mathring{H}^1(\Omega).$$

Можно убедиться, что уравнение $u+\alpha Tu = w$ имеет для любой функции $w\in\mathring{H}^1(\Omega)$ бесконечно много решений $u\in\mathring{H}^1(\Omega)$ (линейное многообразие решений бесконечномерно), если $|\alpha|>1$. Тогда и краевая задача (8), (5) для любой функции $f\in L_2(\Omega)$ будет иметь бесконечно много обобщённых решений. С другой стороны, теорема 1 гарантирует однозначную разрешимость задачи (8), (5) при $|\alpha|\le\frac{1}{2}$ (и даже при $|\alpha|\le\frac{3^{3/4}}{4}$, оценку можно ещё улучшить, см. пример 1).

Построение некоторых решений уравнения $u+\alpha Tu = w$ опирается на сведение к функциональному уравнению с одним оператором сжатия

$$u_{11}(x)\mapsto u_{11}(x)+\alpha u_{11}\left(\frac{x+h}{2}\right),$$

который при $|\alpha|>1$ является линейным гомеоморфизмом $\mathring{H}^1(\Omega_{11})$ на $\mathring{H}^1(\Omega_1)$ (см. [4, лемма 1.2]). Здесь $\Omega_1 = \{0 < x_1, x_2 < 1\}$, $\Omega_{11} = \left\{\frac{1}{2} < x_1, x_2 < 1\right\}$.

Источники финансирования. Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН “5–100” и грантов РФФИ № 17–01–00401, 18–41–200001р_а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян В.А.* К теории флуктуаций яркости в млечном пути // ДАН СССР. 1944. Т. 44. С. 244–247.
2. *Дерфель Г.А.*, *Молчанов С.А.* Спектральные методы в теории дифференциально-функциональных уравнений // Матем. заметки. 1990. Т. 47. С. 42–51.
3. *Кук К.*, *Россовский Л.Е.*, *Скубачевский А.Л.* Краевая задача для функционально-дифференциального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. С. 1348–1352.
4. *Россовский Л.Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // Современная математика. Фундаментальные направления. 2014. Т. 54. С. 3–138.

5. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
6. *Скубачевский А.Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Успехи матем. наук. 2016. Т. 71. 5. С. 3–112.
7. *Gaver D.P., Jr.* An Absorption Probability Problem // J. Math. Anal. Appl. 1964. V. 9. P. 384–393.
8. *Hall A.J., Wake G.C.* A Functional Differential Equation Arising in the Modeling of Cell Growth // J. Austral. Math. Soc. Ser. B. 1989. V. 30. P. 424–435.
9. *Iserles A.* On Neutral Functional-Differential Equation with Proportional Delays // J. Math. Anal. Appl. 1997. V. 207. P. 73–95.
10. *Kato T., McLeod J.B.* Functional Differential Equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. P. 891–937.
11. *Mahler K.* On a Special Functional Equation // J. London Math. Soc. 1940. V. 15. P. 115–123.
12. *Ockendon J R., Tayler A.B.* The Dynamics of a Current Collection System for an Electric Locomotive // Proc. Royal Soc. London A. 1971. V. 322. P. 447–468.
13. *Rossovskii L.E.* Elliptic Functional Differential Equations with Incommensurable Contractions // Math. Model. Nat. Phenom. 2017. V. 12. P. 226–239.
14. *Skubachevskii A.L.* Elliptic Functional-Differential Equations and Applications. Basel: Birkhäuser Verlag, 1997.

ON THE DIRICHLET PROBLEM FOR AN ELLIPTIC FUNCTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION WITH AFFINE TRANSFORMATIONS OF THE ARGUMENT

L. E. Rossovskii[1], A. A. Tovsultanov[2]

[1]*Peoples Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation*
[2]*Chechen State University, Grozny, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS E.I Moiseev December 17, 2018

Received March 29, 2019

We study the Dirichlet problem for a functional differential equation containing shifted and contracted argument under the Laplacian sign. We establish conditions for the unique solvability and demonstrate also that the problem may have an infinite dimensional solution manifold.

Keywords: elliptic functional differential equation, boundary value problem, differential-difference equation, rescaling.