ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 489, № 5, с. 445–448

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51+517.98

ДИСКРЕТНЫЕ БИЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ХАРДИ

П. Джейн[1,*], член-корреспондент РАН В. Д. Степанов[2,3,], Г. Э. Шамбилова[4,***]**

Поступило 16.08.2019 г.

Изучена задача характеризации билинейного неравенства Харди в дискретной форме.

Ключевые слова: дискретное неравенство Харди, билинейный оператор.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524895445-448

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $0 < p_1, p_2, s < \infty$, $u = \{u_n\}$, $v = \{v_n\}$, $w = \{w_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ — фиксированные последовательности неотрицательных чисел, $a = \{a_n\}$ и $b = \{b_n\}$ — произвольные последовательности неотрицательных чисел.

В работе изучается задача характеризации билинейного дискретного неравенства

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^s \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^s u_n\right]^{\frac{1}{s}} \le$$
$$\le C\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{p_1} v_n\right)^{\frac{1}{p_1}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{p_2} w_n\right)^{\frac{1}{p_2}}, \qquad (1)$$

где константа C не зависит от a и b и полагается наименьшей из возможных.

Билинейные весовые неравенства на конусах неотрицательных функций изучались в работах [1–8].

Для изучения билинейных дискретных неравенств по аналогии с интегральными применяется редукционный метод, сводящий искомое неравенство к линейным неравенствам Харди, критерии для которых представлены в работах [9–12, 13, § 1.4]. Исторический обзор развития дискретного неравенства Харди [14, теорема 326] представлен в [15].

Всюду в работе произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными нулю. Соотношение $A \lesssim B$ означает $A \le cB$ с константой c, зависящей только от параметров суммирования p_1, p_2 и s; $A \approx B$ равносильно $A \lesssim B \lesssim A$. Если $0 < p < \infty$, $p \ne 1$, то $p' := \frac{p}{p-1}$.

2. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ БИЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ ХАРДИ В ДИСКРЕТНОЙ ФОРМЕ

Область решения задачи разбивается на следующие зоны параметров суммирования p_1, p_2 и s:

I_1. $1 < \min(p_1, p_2) \le \max(p_1, p_2) \le s < \infty$,

I_2. $0 < \min(p_1, p_2) \le 1 < \max(p_1, p_2) \le s < \infty$,

I_3. $0 < \max(p_1, p_2) \le \min(1, s) < \infty$,

II_1. $1 < \min(p_1, p_2) \le s < \max(p_1, p_2) < \infty$,

II_2. $0 < \min(p_1, p_2) \le \min(1, s) \le 1 < \max(p_1, p_2) < \infty$,

II_3. $0 < \min(p_1, p_2) \le s < \max(p_1, p_2) \le 1$,

III_1. $0 < s < \min(p_1, p_2)$, $\min(p_1, p_2) > 1$,

III_2. $0 < s < \min(p_1, p_2) \le 1 < \max(p_1, p_2) < \infty$,

IV. $0 < s < \min(p_1, p_2) \le \max(p_1, p_2) \le 1$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $0 < \min(p_1, p_2) \le \max(p_1, p_2) \le s < \infty$. *Тогда неравенство* (1) *выполняется с наилучшей константой* C, *если и только если* $A_i < \infty$, *при этом* $C \approx A_i$ *в зависимости от зоны* I_i, $i = 1, 2, 3$.

I_1. $1 < \min(p_1, p_2) \le \max(p_1, p_2) \le s < \infty$, *в этом случае*

$$A_1 := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i\right)^{\frac{1}{s}} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^{1-p_1'}\right)^{\frac{1}{p_1'}} \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^{1-p_2'}\right)^{\frac{1}{p_2'}}.$$

I_2. $0 < \min(p_1, p_2) \le 1 < \max(p_1, p_2) \le s < \infty$, *тогда*:

а) $0 < p_1 \le 1 < p_2 \le s$,

[1] *Южный азиатский университет, Дели, Индия*

[2] *Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской Академии наук, Хабаровск*

[3] *Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва*

[4] *Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.*

**E-mail*: pankaj.jain@sau.ac.in

***E-mail*: stepanov@mi-ras.ru

****E-mail*: shambilova@mail.ru

$$\mathcal{A}_2 := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i^{1-p_2'}\right)^{\frac{1}{p_2'}}\sup_{1\le k\le n} v_k^{-\frac{1}{p_1}};$$

б) $0 < p_2 \le 1 < p_1 \le s$,

$$\mathcal{A}_2 := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i\right)^{\frac{1}{s}}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^{1-p_1'}\right)^{\frac{1}{p_1'}}\sup_{1\le k\le n} w_k^{-\frac{1}{p_2}}.$$

I_3. $0 < \max(p_1, p_2) \le \min(1, s) < \infty$, *здесь*

$$\mathcal{A}_3 := \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n^{-\frac{1}{p_1}}\left(\sum_{j=n}^{\infty} u_j\right)^{\frac{1}{s}}\sup_{1\le i\le n} w_i^{-\frac{1}{p_2}} + \sup_{n\in\mathbb{N}} w_n^{-\frac{1}{p_2}}\left(\sum_{j=n}^{\infty} u_j\right)^{\frac{1}{s}}\sup_{1\le i\le n} v_i^{-\frac{1}{p_1}}.$$

Теорема 2. *Для наилучшей константы C в неравенстве* (1) *выполнено соотношение* $C \approx \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, 3$, *где*:

II_1. $1 < \min(p_1, p_2) \le s < \max(p_1, p_2) < \infty$, $\dfrac{1}{r_i} = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{p_i}$, $i = 1, 2$,

а) $1 < p_1 \le s < p_2$,

$$\mathcal{A}_1 := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{l=1}^{n} v_l^{1-p_1'}\right)^{\frac{1}{p_1'}} \times \left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i\left(\sum_{k=i}^{\infty} u_k\right)^{\frac{r_2}{p_2}}\left(\sum_{j=1}^{i} w_j^{1-p_2'}\right)^{\frac{r_2}{p_2'}}\right)^{\frac{1}{r_2}};$$

б) $1 < p_2 \le s < p_1$,

$$\mathcal{A}_1 := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{l=1}^{n} w_l^{1-p_2'}\right)^{\frac{1}{p_2'}} \times \left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i\left(\sum_{k=i}^{\infty} u_k\right)^{\frac{r_1}{p_1}}\left(\sum_{j=1}^{i} v_j^{1-p_1'}\right)^{\frac{r_1}{p_1'}}\right)^{\frac{1}{r_1}}.$$

II_2. $0 < \min(p_1, p_2) \le s \le 1 < \max(p_1, p_2) < \infty$, $\dfrac{1}{r_i} := \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{p_i}$, $i = 1, 2$,

а) $0 < p_1 \le s \le 1 < p_2$,

$$\mathcal{A}_2 := \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n^{-\frac{1}{p_1}} \times \left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i\left(\sum_{k=i}^{\infty} u_k\right)^{\frac{r_2}{p_2}}\left(\sum_{j=1}^{i} w_j^{1-p_2'}\right)^{\frac{r_2}{p_2'}}\right)^{\frac{1}{r_2}};$$

б) $0 < p_2 \le s \le 1 < p_1$,

$$\mathcal{A}_2 := \sup_{n\in\mathbb{N}} w_n^{-\frac{1}{p_2}} \times \left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i\left(\sum_{k=i}^{\infty} u_k\right)^{\frac{r_1}{p_1}}\left(\sum_{j=1}^{i} v_j^{1-p_1'}\right)^{\frac{r_1}{p_1'}}\right)^{\frac{1}{r_1}}.$$

II_3. $0 < \min(p_1, p_2) \le s < \max(p_1, p_2) \le 1$, $\dfrac{1}{r_i} := \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{p_i}$, $i = 1, 2$,

а) $0 < p_1 \le s < p_2 \le 1$,

$$\mathcal{A}_3 := \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n^{-\frac{1}{p_1}}\left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i\left(\sum_{k=i}^{\infty} u_k\right)^{\frac{r_2}{p_2}}\max_{1\le j\le i} w_j^{-\frac{r_2}{p_2}}\right)^{\frac{1}{r_2}};$$

б) $0 < p_2 \le s < p_1 \le 1$,

$$\mathcal{A}_3 := \sup_{n\in\mathbb{N}} w_n^{-\frac{1}{p_2}}\left(\sum_{i=n}^{\infty} u_i\left(\sum_{k=i}^{\infty} u_k\right)^{\frac{r_1}{p_1}}\max_{1\le j\le i} v_j^{-\frac{r_1}{p_1}}\right)^{\frac{1}{r_1}}.$$

Пусть

$$\mathcal{V}_n := \max_{1\le j\le n} v_j^{-\frac{r_1}{p_1}},\ \mathcal{V}_0 := 0,\ \mathcal{W}_n := \max_{1\le j\le n} w_j^{-\frac{r_2}{p_2}},\ \mathcal{W}_0 := 0,$$

тогда

$$\mathcal{V}_n = \sum_{j=1}^{n}(\mathcal{V}_j - \mathcal{V}_{j-1}) =: \sum_{j=1}^{n}\tilde{v}_j,$$

$$\mathcal{W}_n = \sum_{j=1}^{n}(\mathcal{W}_j - \mathcal{W}_{j-1}) =: \sum_{j=1}^{n}\tilde{w}_j.$$

Также обозначим

$$V_n := v_n^{1-p_1'}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^{1-p_1'}\right)^{\frac{r_1}{s'}},$$

$$W_n := w_n^{1-p_2'}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^{1-p_2'}\right)^{\frac{r_2}{s'}},\quad \tilde{u}_n := \sum_{k=n}^{\infty} u_k.$$

Теорема 3. III_1. *Пусть* $0 < s < \min(p_1, p_2)$, $\min(p_1, p_2) > 1$, $\dfrac{1}{r_i} := \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{p_i}$, $i = 1, 2$. *Тогда для наилучшей константы C в неравенстве* (1) *выполнено соотношение* $C \approx B_1 + B_2$ *в случае* а) *и* $C \approx \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$ *в случае* б), *где*:

а) $0 < s < p_1 < p_2 < \infty$, $p_1 > 1$, $\dfrac{1}{s} \le \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$,

$$B_1 := \sup_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} W_k \tilde{u}_k^{\frac{r_2}{s}}\right)^{\frac{1}{r_2}} \left(\sum_{j=1}^{n} V_j\right)^{\frac{1}{r_1}},$$

$$B_2 := \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} W_k\right)^{\frac{1}{r_2}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \tilde{u}_j^{\frac{r_1}{s}} V_j\right)^{\frac{1}{r_1}}.$$

Если $\frac{1}{s} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, то

$$B_1 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} W_n \tilde{u}_n^{\frac{r_2}{s}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} W_k \tilde{u}_k^{\frac{r_2}{s}}\right)^{\frac{r_2}{p_1-r_2}} \times \right.$$
$$\left. \times \left(\sum_{j=1}^{n} V_j\right)^{\frac{p_1 r_2}{r_1(p_1-r_2)}}\right)^{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{p_1}},$$

$$B_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} W_n \left(\sum_{k=1}^{n} W_k\right)^{\frac{r_2}{p_1-r_2}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \tilde{u}_j^{\frac{r_1}{p_1}} V_j\right)^{\frac{p_1 r_2}{r_1(p_1-r_2)}}\right)^{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{p_1}};$$

б) $0 < s < p_2 < p_1 < \infty,\ p_2 > 1,\quad \frac{1}{s} \le \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$,

$$\mathbf{B}_1 := \sup_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} V_k \tilde{u}_k^{\frac{r_1}{s}}\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\sum_{j=1}^{n} W_j\right)^{\frac{1}{r_2}},$$

$$\mathbf{B}_2 := \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} V_k\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \tilde{u}_j^{\frac{r_2}{s}} W_j\right)^{\frac{1}{r_2}}.$$

Если $\frac{1}{s} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, то

$$\mathbf{B}_1 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n \tilde{u}_n^{\frac{r_1}{s}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} V_k \tilde{u}_k^{\frac{r_1}{s}}\right)^{\frac{r_1}{p_2-r_1}} \left(\sum_{j=1}^{n} W_j\right)^{\frac{p_2 r_1}{r_2(p_2-r_1)}}\right)^{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{p_2}},$$

$$\mathbf{B}_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n \left(\sum_{k=1}^{n} V_k\right)^{\frac{r_1}{p_2-r_1}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \tilde{u}_j^{\frac{r_2}{p_2}} W_j\right)^{\frac{p_2 r_1}{r_2(p_2-r_1)}}\right)^{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{p_2}}.$$

Теорема 4. III$_2$. *Пусть* $0 < s < \min(p_1, p_2) \le 1 < \max(p_1, p_2)$, $\frac{1}{r_i} = \frac{1}{s} - \frac{1}{p_i}$, $i = 1, 2$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (1) *выполнено соотношение* $C \approx \mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_2$ *в случае* а) *и* $C \approx \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ *в случае* б), *где*:

а) $0 < s < p_1 \le 1 < p_2 < \infty,\ \frac{1}{s} \le \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$,

$$\mathbb{B}_1 := \sup_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} W_k \tilde{u}_k^{\frac{r_2}{s}}\right)^{\frac{1}{r_2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{v}_j\right)^{\frac{1}{r_1}},$$

$$\mathbb{B}_2 := \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} W_k\right)^{\frac{1}{r_2}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \tilde{u}_k^{\frac{r_1}{s}} \tilde{v}_j\right)^{\frac{1}{r_1}}.$$

При $\frac{1}{s} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$

$$\mathbb{B}_1 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} W_n \tilde{u}_n^{\frac{r_2}{s}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} W_k \tilde{u}_k^{\frac{r_2}{s}}\right)^{\frac{r_2}{p_1-r_2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{v}_j\right)^{\frac{p_1 r_2}{r_1(p_1-r_2)}}\right)^{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{p_1}},$$

$$\mathbb{B}_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} W_n \left(\sum_{k=1}^{n} W_k\right)^{\frac{r_2}{p_1-r_2}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \tilde{u}_j^{\frac{r_1}{p_1}} \tilde{v}_j\right)^{\frac{p_1 r_2}{r_1(p_1-r_2)}}\right)^{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{p_1}};$$

б) $0 < s < p_2 \le 1 < p_1 < \infty,\ \frac{1}{s} \le \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$,

$$\mathfrak{B}_1 := \sup_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} V_k \tilde{u}_k^{\frac{r_1}{s}}\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{w}_j\right)^{\frac{1}{r_2}},$$

$$\mathfrak{B}_2 := \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} V_k\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \tilde{u}_j^{\frac{r_2}{s}} \tilde{w}_j\right)^{\frac{1}{r_2}}.$$

При $\frac{1}{s} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$

$$\mathfrak{B}_1 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n \tilde{u}_n^{\frac{r_1}{s}} \left(\sum_{k=n}^{\infty} V_k \tilde{u}_k^{\frac{r_1}{s}}\right)^{\frac{r_1}{p_2-r_1}} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{w}_j\right)^{\frac{p_2 r_1}{r_2(p_2-r_1)}}\right)^{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{p_2}},$$

$$\mathfrak{B}_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n \left(\sum_{k=1}^{n} V_k\right)^{\frac{r_1}{p_2-r_1}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \tilde{u}_j^{\frac{r_2}{p_2}} \tilde{w}_j\right)^{\frac{p_2 r_1}{r_2(p_2-r_1)}}\right)^{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{p_2}}.$$

Теорема 5. IV. *Пусть* $0 < s < \min(p_1, p_2) \le \max(p_1, p_2) \le 1$, $\frac{1}{r_i} = \frac{1}{s} - \frac{1}{p_i}$, $i = 1, 2$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (1) *выполнено соотношение* $C \approx D_1 + D_2$ *в случае* а) *и* $C \approx \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ *в случае* б), *где*:

а) $0 < s < p_1 \le p_2 \le 1,\ \frac{1}{s} \le \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$,

$$D_1 := \sup_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \tilde{u}_k^{\frac{r_2}{s}} \tilde{w}_k\right)^{\frac{1}{r_2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{v}_j\right)^{\frac{1}{r_1}},$$

$$D_2 := \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{w}_k\right)^{\frac{1}{r_2}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \tilde{u}_j^{\frac{r_1}{s}} \tilde{v}_j\right)^{\frac{1}{r_1}}.$$

Для $\frac{1}{s} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$

$$D_1 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n^{\frac{r_2}{s}} \tilde{w}_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \tilde{u}_k^{\frac{r_2}{s}} \tilde{w}_k\right)^{\frac{r_2}{p_1-r_2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{v}_j\right)^{\frac{p_1 r_2}{r_1(p_1-r_2)}}\right)^{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{p_1}},$$

$$D_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{w}_k\right)^{\frac{r_2}{p_1-r_2}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \tilde{u}_j^{\frac{r_1}{p_1}} \tilde{v}_j\right)^{\frac{p_1 r_2}{r_1(p_1-r_2)}}\right)^{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{p_1}};$$

б) $0 < s < p_2 < p_1 \le 1,\ \frac{1}{s} \le \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2},$

$$\mathcal{D}_1 := \sup_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \tilde{u}_k^{\frac{r_1}{s}} \tilde{v}_k\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{w}_j\right)^{\frac{1}{r_2}},$$

$$\mathcal{D}_2 := \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{v}_k\right)^{\frac{1}{r_1}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \tilde{u}_j^{\frac{r_2}{s}} \tilde{w}_j\right)^{\frac{1}{r_2}}.$$

Для $\frac{1}{s} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$

$$\mathcal{D}_1 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{u}_n^{\frac{r_1}{s}} \tilde{v}_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \tilde{u}_k^{\frac{r_1}{s}} \tilde{v}_k\right)^{\frac{r_1}{p_2-r_1}} \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{w}_j\right)^{\frac{p_2 r_1}{r_2(p_2-r_1)}}\right)^{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{p_2}},$$

$$\mathcal{D}_2 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{v}_n \left(\sum_{k=1}^{n} \tilde{v}_k\right)^{\frac{r_1}{p_2-r_1}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \tilde{u}_j^{\frac{r_1}{p_1}} \tilde{w}_j\right)^{\frac{p_2 r_1}{r_2(p_2-r_1)}}\right)^{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{p_2}}.$$

Источники финансирования. Результаты работы второго и третьего авторов частично поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проект 19–01–00223). Работа второго автора (теоремы 4 и 5) выполнялась в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН в рамках проекта Российского научного фонда (проект 19–11–00087).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Aguilar Cañestro M.I.*, *Ortega Salvador P.*, *Ramírez Torreblanca C.* // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 387. № 1. P. 320–334. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.08.078.
2. *Křepela M.* // Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 2017. V. 60. P. 955–971. DOI: 10.1017/S0013091516000602.
3. *Křepela M.* // Publ. Mat. 2017. V. 61. P. 3–50. DOI: 10.5565/PUBLMAT61117 01.
4. *Прохоров Д.В.* // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 280–295. https://doi.org/10.1134/S0371968516020199
5. *Степанов В.Д.*, *Шамбилова Г.Э.* // ДАН. 2017. Т. 477. № 6. С. 652–656. https://doi.org/10.7868/S0869565217360051
6. *Jain P.*, *Kanjilal S.*, *Stepanov V.D.*, *Ushakova E.P.* // Math. Notes. 2018. V. 104. № 6. P. 823–832. https://doi.org/10.4213/mzm12050
7. *Степанов В.Д.*, *Шамбилова Г.Э.* // Сибир. матем. журнал. 2018. Т. 59. № 3. С. 639–658. https://doi.org/10.17377/smzh.2018.59.313
8. *Степанов В.Д.*, *Шамбилова Г.Э.* // ДАН. 2019. Т. 486. № 4. С. 12–16. DOI: 10.1134/S1064562419030165.
9. *Bennett G.* // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1987. V. 38. P. 401–425.
10. *Bennett G.* // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1988. V. 39. P. 385–400.
11. *Bennett G.* // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1991. V. 42. P. 149–174.
12. *Braverman M.S.*, *Stepanov V.D.* // Bull. London Math. Soc. 1994. V. 26. P. 283–287.
13. *Прохоров Д.В.*, *Степанов В.Д.*, *Ушакова Е.П.* Интегральные операторы Харди—Стеклова // Совр. пробл. матем. Вып. 22. М.: МИАН, 2016. https://doi.org/10.4213/spm55
14. *Харди Г.Г.*, *Литтлвуд Дж.Е.*, *Полиа Г.* Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
15. *Kufner A.*, *Maligranda L.*, *Persson L.-E.* The Hardy inequality. About its history and some related results. Pilsen: Vydavatelsky Servis, 2007. 161 p.

DISCRETE BILINEAR HARDY INEQUALITIES

P. Jane[1], Corresponding Member of the RAS V. D. Stepanov[2,3], G. E. Shambilova[4]

[1]*South Asian University*, *Delhi*, *India*
[2]*Computing Center of Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences*, *Khabarovsk*, *Russian Federation*
[3]*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences*, *Moscow*, *Russian Federation*
[4]*Moscow Institute of Physics and Technology*, *Dolgoprudny*, *Moscow Region*, *Russian Federation*

Received August 16, 2019

The problem of characterization of bilinear inequality in discrete form is solved.

Keywords: discrete Hardy inequality, bilinear operator.