ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 489, № 5, с. 449–451

МАТЕМАТИКА

УДК 512.572

ТОЖДЕСТВА В АЛГЕБРАХ И КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА ДВОИЧНЫХ СЛОВ

М. В. Зайцев[1,2,*], Д. Д. Реповш[2]

Представлено академиком РАН Е.Е. Тыртышниковым 20.06.2019 г.

Поступило 20.06.2019 г.

Мы рассматриваем полиномиальные тождества и рост коразмерностей неассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики. Предлагается новый подход, позволяющий строить примеры неассоциативных алгебр, используя заданное бесконечное двоичное слово. Последовательность коразмерностей такой алгебры тесно связана с комбинаторной сложностью определяющего слова. Эти конструкции дают новые примеры алгебр с аномальным ростом коразмерностей. Первое важное достижение такого подхода заключается в том, что наши алгебры конечно порождены. Второе состоит в том, что асимптотическое поведение последовательностей коразмерностей сильно отличается от всех предыдущих примеров.

Ключевые слова: тождества, коразмерности, двоичные слова, комбинаторная сложность.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524895449-451

В работе изучаются числовые характеристики тождеств неассоциативных алгебр над полем нулевой характеристики. Пусть A — алгебра над полем Φ, а $\Phi\{X\}$ — абсолютно свободная алгебра над Φ с бесконечным множеством порождающих X. Совокупность $\mathrm{Id}(A)$ всех тождеств алгебры A является идеалом в $\Phi\{X\}$. Если P_n — подпространство всех полилинейных многочленов от $x_1, \ldots, x_n$ в $\Phi\{X\}$, то последовательность коразмерностей

$$c_n(A) = \mathrm{codim}(P_n\colon P_n \cap \mathrm{Id}(A)),\ n = 1, 2, \ldots,$$

является важной числовой характеристикой семейства тождеств алгебры A. Для широкого класса алгебр рост последовательности $\{c_n(A)\}$, называемой последовательностью коразмерностей A, ограничен экспоненциальной функцией. Например, если $\dim A = d < \infty$, то $c_n(A) \le d^{n+1}$ [1, 2]. Аналогичное ограничение выполняется для любой ассоциативной PI-алгебры [3]. А. Регев выдвинул предположение, что в ассоциативном случае $c_n(A) \sim Cn^t d^n$, где C — константа, t — полуцелое, а d — неотрицательное целое число. Более точно гипотеза Регева означает существование трёх пределов

$$d = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)},\quad t = \lim_{n\to\infty} \log_n \frac{c_n(A)}{d^n},$$
$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n(A)}{n^t d^n}, \tag{1}$$

которые можно назвать первым, вторым и третьим приближениями. Первое приближение известно также как гипотеза Амицура.

Существование и целочисленность 1-го из пределов (1) доказаны в [4, 5]. Во втором приближении гипотеза Регева также подтвердилась [6, 7], а вопрос о третьем приближении до сих пор открыт. В неассоциативном случае 1-й из пределов (1) может быть дробным [8], а может вообще отсутствовать [9] даже в случае экспоненциальной ограниченности роста коразмерностей. Возможен также и промежуточный рост типа n^{n^β}, $0 < \beta < 1$, как показано в [10].

Цель настоящей работы — расширение класса функций промежуточного роста, реализуемых как функции роста коразмерностей тех или иных алгебр, а также построение примера алгебры A, у которой 1-й и 2-й пределы (1) существуют, а 3-й отсутствует. Построение новых примеров базируется на результатах комбинаторной теории формальных языков.

Комбинаторные свойства двоичных слов неоднократно использовались для построения различных примеров асимптотического поведения коразмерностей (см., например, [8, 10]). В работе [11] был предложен альтернативный подход к построению алгебр по двоичным словам, которому мы и будем следовать ниже.

Пусть $w_1 w_2 \ldots$ — бесконечное двоичное слово. Комбинаторной сложностью w называется функция $\mathrm{Comp}_w\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $\mathrm{Comp}_w(n)$ — число различных подслов длины n в w. Подслово u в w будем называть

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

[2] *Люблянский университет, Словения*

**E-mail*: *zaicevmv@mail.ru*

собственным, если хотя бы одно из его вхождений в w начинается с k-й позиции, где $k \geq 3$. Разделим собственные подслова в w на две категории. Подслово u назовём подсловом 1-го типа, если оно встречается в w только после нуля либо только после единицы. Если же u встречается в w и после нуля и после единицы, то назовём его подсловом 2-го типа.

Рассмотрим алгебру $A(w)$ с базисом $\{a, b_0, b_1, ...\}$, в которой умножение задано следующим образом. Для любого $i \geq 0$ положим $b_{i+1} = ab_i$, если $w_{i+1} = 1$, и $b_{i+1} = b_i a$, если $w_{i+1} = 0$. Все остальные произведения базисных элементов положим равными нулю. Обозначим через w^* бесконечное подслово $w_3w_4...$ в w. Комбинаторная сложность w и коразмерности $A(w)$ связаны следующим соотношением.

Теорема 1. *Для алгебры $A(w)$ n-я коразмерность при $n \geq 3$ равна*

$$c_n(A(w)) = k_{n-2}^{(1)}n + k_{n-2}^{(2)}(2n-1),$$

где $k_m^{(1)}, k_m^{(2)}$ — количество подслов 1-го и 2-го типов длины m в w. В частности,

$$\mathrm{Comp}_{w^*}(n-2) \leq c_n(A(w)) \leq 2\mathrm{Comp}_{w^*}(n-2).$$

Опираясь на результаты работы [12] и теорему 1, можно получить новый широкий класс алгебр с промежуточным ростом коразмерностей.

Теорема 2. *Пусть $\varphi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — дифференцируемая на $(0; \infty)$ функция, такая, что:*

(i) $\varphi(t) \gg \log_2 t$;

(ii) $\varphi'(t) \ll t^{-\beta}$ *для некоторой константы* $\beta > 0$;

(iii) φ' — *убывающая функция.*

Тогда существует двоичное слово u, для которого $\log_2 \mathrm{Comp}_u(n) \sim \varphi(n)$. В частности, существует алгебра A, для которой $c_n(A) \sim 2^{\varphi(n)}$.

Используя результаты работы [13], можно получить примеры алгебр и с более резкими колебаниями функции коразмерностей.

Теорема 3. *Существует алгебра A, для которой можно выбрать возрастающую последовательность n_k, $k = 1, 2, ...,$ так, что:*

а) $c_{n_k}(A) < n_k + \ln\ln n_k$, *если k нечётно;*

б) $c_{n_k} > 2^{\frac{n_k}{\ln\ln n_k}}$, *если k чётно.*

Теорема 1 позволяет построить пример алгебры, для которой существуют 1-й и 2-й пределы (1), но отсутствует 3-й предел. В теории формальных языков хорошо известен язык E_0, состоящий из всех слов в двухбуквенном алфавите $\{a, b\}$, которые не содержат подслов a^2, b^4 и ab^2a. Нетрудно построить бесконечное бинарное слово w_0, для которого язык всех конечных подслов и слова w_0, и слова w_0^* совпадает с E_0. Тогда для алгебры $A(w_0)$ 1-й и 2-й пределы (1) равны соответственно

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A(w))} = \sqrt{\varphi}, \quad \lim_{n\to\infty} \log_n \frac{c_n(A(w))}{\sqrt{\varphi}^n} = 1,$$

где $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ — золотое сечение. В то же время

$$\lim_{n=2t\to\infty} \frac{c_n(A(w))}{n\sqrt{\varphi}^n} = \frac{\varphi^2+\varphi+2}{\varphi(2\varphi-1)},$$

$$\lim_{n=2t+1\to\infty} \frac{c_n(A(w))}{n\sqrt{\varphi}^n} = \frac{\varphi^3+\varphi+2}{\varphi(2\varphi-1)}.$$

Источники финансирования. Работа первого автора поддержана Российским научным фондом, грант № 16–11–10013. Работа второго автора поддержана Словенским исследовательским агентством, грант № P1-0292.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bahturin Yu.A., Drensky V.* // Linear Algebra Appl. 2002. V. 357. P. 15–34.
2. *Giambruno A., Zaicev M.* // Trans. Amer. Math. Soc. 2010. V. 362. № 6. P. 3107–3123.
3. *Regev A.* // Israel J. Math. 1972. V. 11. P. 131–152.
4. *Giambruno A., Zaicev M.* // Adv. Math. 1998. V. 140. P. 145–155.
5. *Giambruno A., Zaicev M.V.* // Adv. Math. 1999. V. 142. P. 221–243.
6. *Berele A.* // Adv. Appl. Math. 2008. V. 41. № 1. P. 52–75.
7. *Giambruno A., Zaicev M.* // Bull. Lond. Math. Soc. 2014. V. 46. № 4. P. 771–778.
8. *Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M.* // Adv. Math. 2008. V. 217. № 3. P. 1027–1052.
9. *Zaicev M.* // Electr. Res. Announc. in Math. Sci. 2014. V. 21. P. 113–119.
10. *Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M.* // Adv. Appl. Math. 2006. V. 37. № 3. P. 360–377.
11. *Мищенко С.П., Панов Н.П.* // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2017. № 6. С. 55–59.
12. *Cassaigne J.* // Lect. Notes Comp. Sci. 2003. V. 2450. P. 173–184.
13. *Balogh J., Bollobas B.* // Theor. Inform. Appl. 2005. V. 39. № 1. P. 49–65.

IDENTITIES ON ALGEBRAS AND COMBINATORIAL PROPERTIES OF BINARY WORDS

M. V. Zacicev[1,2], D. D. Repovs[2]

[1]*Lomonosov Moscow State University*, *Moscow*, *Russian Federation*
[2]*University of Ljubljana*, *Ljubljana*, *Slovenia*

Presented by Academician of the RAS E.E. Tyrtyshnikov June 20, 2019

Received June 20, 2019

We consider polynomial identities and codimension growth of nonassociative algebras over a field of characteristics zero. We offer new approach which allows to construct nonassociative algebras starting from a given infinite binary word. The sequence of codimensions of such an algebra is closeely connected with combinatorial complexity of the defining word. These constructions give new examples of algebras with abnormal codimension growth. The first important achievement is that our algebras are finitely generated. The second one is that asymptotic behavior of codimension sequences is quite different unlike all previous examples.

Keywords: identities, codimensions, binary words, combinatorial complexity.