УДК 517.962.965, 519.248.3

О ВЗАИМНО ОБРАТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ
ФУНКЦИЙ НА ПОЛУПРЯМОЙЧлен-корреспондент РАН В. Ю. Протасов^{1,2,*}, М. Е. Широков^{3,4,**}

Поступило 05.09.2019 г.

Рассматриваются два преобразования функций на полупрямой и доказывается, что их композиция даёт вогнутую мажоранту для любой неотрицательной функции. В частности, на классе неотрицательных вогнутых функций данная композиция есть тождественное преобразование. Указаны приложения этого результата в теории операторов в гильбертовом пространстве и в теории квантовых систем. Сформулирован ряд открытых задач.

Ключевые слова: преобразование функций, композиция, вогнутая мажоранта, положительный оператор, гильбертово пространство.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524895452-455>

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В задачах математической физики (см. раздел 3) естественным образом возникают следующие преобразования функций на положительной полуоси $\mathbb{R}_+$:

$$F[f](x) = \sup_{t>0} \frac{f(xt)}{t+1}, \quad G[f](x) = \inf_{t>0} f(xt) \left(1 + \frac{1}{t}\right).$$

Всегда будем предполагать, что преобразования применяются к функциям, для которых они корректно определены, т.е. что $F[f](x)$ и $G[f](x)$ конечны для любого x . Так, для $F[f]$ достаточно, чтобы функция $f(t)$ росла не быстрее линейной, т.е.

$$\sup_{t \in [0, a]} f(t) < C(a+1), \quad a > 0.$$

Суперпозицию будем обозначать $G[F[f]] = GF[f]$. Как было показано в [2] для вогнутых функций f определённого класса, композиция GF является тождественным преобразованием. Мы установим, что $GF[f] = f$ в точности, когда f — монотонная вогнутая функция, удовлетворяющая ряду дополнительных условий. Более того, для произвольной неотрицательной функции f функция $GF[f]$ является

наименьшей вогнутой мажорантой f , т.е. совпадает с функцией

$$\tilde{f}(t) = \inf\{\varphi(t) \mid \varphi \geq f, \varphi \text{ вогнутая}\}.$$

Это свойство преобразований F и G напоминает преобразование двойственности Лежандра—Юнга [1], однако никаких связей с указанным преобразованием найти не удалось.

Рассмотрим два класса вогнутых функций на $\mathbb{R}_+$. Класс $\mathcal{A}$ состоит из вогнутых неубывающих неотрицательных функций. График каждой функции $\varphi \in \mathcal{A}$ состоит из трёх частей (слева направо): отрезок от точки $(0, 0)$ до некоторой точки A_1 , дуга вогнутой функции от A_1 до A_2 и горизонтальный луч от A_2 до $+\infty$. Некоторые из этих частей могут быть вырожденными, что соответствует случаям $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = A_1$ или $A_2 = +\infty$. Например, тождественная единица принадлежит $\mathcal{A}$, для неё $A_1 = A_2 = (0, 0)$. Любая вогнутая возрастающая функция φ при условии $\varphi(0) > 0$ принадлежит $\mathcal{A}$, для неё $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = +\infty$. Класс $\mathcal{B}$ состоит из вогнутых невозрастающих неположительных функций, имеющих асимптоту $y = kt$, $t \rightarrow +\infty$. График такой функции состоит из трёх частей (слева направо): горизонтальный отрезок до некоторой точки B_1 , дуга вогнутой функции от B_1 до B_2 и луч от B_2 до $+\infty$, продолжение которого за точку B_2 проходит через ноль. Некоторые из этих частей могут вырождаться. Например, для $\varphi \equiv -1$ имеем $B_1 = B_2 = +\infty$; для функции $\varphi(t) = -\frac{1}{t+1} - t$ имеем $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = +\infty$.

Классы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выпуклы и замкнуты в топологии равномерной сходимости на каждом компакте. Они пересекаются только по нулевой функции.

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

² Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва

³ Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук, Москва

⁴ Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.

*E-mail: v-protassov@yandex.ru

**E-mail: msh@mi-ras.ru

$\mathcal{A}$ -оболочкой функции f называется наименьшая мажоранта функциями из $\mathcal{A}$, т.е.

$$f_{\mathcal{A}}(t) = \inf\{\varphi(t) \mid \varphi \geq f, \varphi \in \mathcal{A}\}.$$

Аналогично $f_{\mathcal{B}}(t) = \inf\{\varphi(t) \mid \varphi \geq f, \varphi \in \mathcal{B}\}$. Заметим, что $\mathcal{A}$ -оболочка определена для любой функции f , растущей не быстрее линейной, а $\mathcal{B}$ -оболочка — только для неположительной f .

Теорема 1. Если функция f имеет хотя бы одно положительное значение, то

$$GF[f] = f_{\mathcal{A}},$$

в противном случае

$$GF[f] = f_{\mathcal{B}}.$$

Следствие 1. $GF[f] = f$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$.

Следствие 2. Если f — неотрицательная функция, то $GF[f]$ — вогнутая мажоранта функции f . Для неотрицательных функций равенство $GF[f] = f$ выполнено тогда и только тогда, когда f вогнута.

Доказательство теоремы 1 геометрическое. Начнём со вспомогательного утверждения. Пусть функция $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ растёт не быстрее линейной. Через заданную точку $A = (-a, 0)$, $a > 0$, проведём прямую ℓ с наименьшим угловым коэффициентом, лежащую над графиком f , т.е. $\ell(t) \geq f(t)$, $t \in \mathbb{R}_+$ (здесь и далее линейную функцию обозначаем так же, как соответствующую прямую). Её будем называть левой опорной прямой к графику f . В отличие от обычной опорной прямой ℓ , для которой $\inf_{t \in \mathbb{R}_+} (\ell(t) - f(t)) = 0$, левая опорная прямая должна пересекать отрицательную полуось абсцисс $\{(-a, 0) \mid a \geq 0\}$.

Лемма 1. Для любого $x > 0$ прямая, проходящая через точки $(-x, 0)$ и $(0, F[f](x))$, является левой опорной к графику функции f .

Доказательство. В точке с абсциссой z данная прямая имеет ординату

$$y = \frac{(x+z)F[f](x)}{x} = (1+t)F[f](x)$$

(обозначили $t = \frac{z}{x}$). Следовательно,

$$\inf_{z \geq 0} (y(z) - f(z)) = \inf_{t \geq 0} ((1+t)F[f](x) - f(xt)) \geq 0.$$

Поэтому данная прямая лежит над графиком f , и её угловой коэффициент нельзя уменьшить, поскольку

$$\inf_{t \geq 0} \left(F[f](x) - \frac{1}{1+t} f(xt) \right) = 0.$$

Доказательство теоремы 1. Обозначим $z = xt$. Тогда

$$G[f](x) = \inf_{z > 0} f(z) \frac{x+z}{z}.$$

Следовательно,

$$GF[f](x) = \inf_{z > 0} F[f](z) \frac{x+z}{z}. \quad (1)$$

Из точки $A = (-z, 0)$ проведём опорную прямую к графику функции f . Она пересекает ось ординат в точке $M = (0, F[f](z))$. Пусть также $B = (x, 0)$. Восставим перпендикуляр к оси абсцисс в точке B , он пересекает опорную прямую в точке N . Из подобия треугольников AMO и ANB , где O — начало координат, получаем $BN/OM = AB/AO = (z+x)/z$. Таким образом, $BN = F[f](z)(z+x)/z$. Совместив с (1), получим, что $GF[f](x)$ равно наименьшему значению $\ell(x)$ по всем левым опорным прямым ℓ к графику f . Обозначим через $\tilde{f}$ наименьшую вогнутую мажоранту функции f . Она является поточечным минимумом всех опорных прямых к графику f . Предположим, что $f(t) > 0$ хотя бы в одной точке t . На графике $\tilde{f}$ существуют точки A_1, A_2 (которые могут совпадать или обращаться в $+\infty$) такие, что опорная прямая к графику $\tilde{f}$ в точке A_1 проходит через начало координат (берём самую правую из таких точек), а опорная прямая в точке A_2 горизонтальна (берём самую левую точку). Таким образом, A_2 — точка максимума $\tilde{f}$, и по предположению этот максимум положителен. Для любой точки между A_1 и A_2 опорная прямая к $\tilde{f}$ пересекает отрицательную полуось абсцисс, поэтому является левой опорной. Следовательно, график $GF[f]$ между точками A_1 и A_2 совпадает с графиком $\tilde{f}$, левее точки A_1 — с графиком левой опорной прямой, проходящей через начало координат, а правее точки A_2 — с горизонтальной прямой, проходящей через A_2 . Итак, $GF[f] = f_{\mathcal{A}}$. Аналогично разбирается второй случай: если $f \leq 0$, то $GF[f] = f_{\mathcal{B}}$.

2. КОММЕНТАРИИ

Замечание 1. Оператор FG , получаемый перестановкой множителей, уже не будет тождественным на классах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Авторам неизвестно, для каких функций f выполнено $FG[f] = f$. Одно из условий даёт следующее рассуждение. Обозначим через ℓ_z прямую, проходящую через точки $(-z, 0)$ и $(0, f(z))$. Несложно показать, что $G[f](t) = \inf_{z > 0} \ell_z(t)$. Тогда

равенство $FG[f] = f$ равносильно тому, что каждая прямая семейства $\{\ell_z \mid z > 0\}$ является правой опорной для графика $G[f]$. Если f неотрицательна, то данное условие равносильно такому требованию к функции f . Обозначим через $\mathcal{H}$ семейство функций $\varphi(t) = \frac{at}{t+b}$, $a, b > 0$. Равенство $FG[f] = f$ выполнено тогда и только тогда, когда $G[f]$ — нетождественный ноль и для любой пары точек на графике f дуга функции семейства $\mathcal{H}$, соединяющая эти точки, лежит над графиком f .

Нахождение более адекватных условий для равенства $FG[f] = f$ остаётся открытой проблемой.

3. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Пусть $\mathbb{T}$ — выпуклый конус в линейном пространстве, а α , β и γ — неотрицательные линейные функции на $\mathbb{T}$, причём $\alpha(t) > 0$ для всех t из $\mathbb{T}$, не равных нулю. Рассмотрим неотрицательные функции

$$\begin{aligned} f(x) &= \sup\{\gamma(t) \mid \alpha(t) \leq 1, \beta(t) \leq x\}, \\ g(x) &= \sup\{\gamma(t) \mid \alpha(t) + x^{-1}\beta(t) \leq 1\} \end{aligned}$$

на $\mathbb{R}_+$. Следствие 1 позволяет доказать

Предложение 1. *Данные функции связаны соотношениями $g = F[f]$ и $f = G[g]$, где F и G — преобразования, рассмотренные в разделе 1.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что первая функция вогнута. Поэтому в силу следствия 1 достаточно показать, что

$$g(x) = \sup_{r \in (0,1)} rf \left(x \frac{1-r}{r} \right) = \sup_{t>0} \frac{f(xt)}{1+t}. \quad (2)$$

Для доказательства (2) заметим сначала, что

$$g(x) \geq rf \left(x \frac{1-r}{r} \right) \text{ для всех } r \in (0, 1].$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $t_\varepsilon \in \mathbb{T}$, такое что

$$\alpha(t_\varepsilon) \leq 1, \beta(t_\varepsilon) \leq x \frac{1-r}{r} \text{ и } f \left(x \frac{1-r}{r} \right) \leq \gamma(t_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Тогда $rt_\varepsilon \in \mathbb{T}$ и

$$\alpha(rt_\varepsilon) + x^{-1}\beta(rt_\varepsilon) \leq r + (1-r) \leq 1.$$

Поэтому

$$g(x) \geq \gamma(rt_\varepsilon) \geq rf \left(x \frac{1-r}{r} \right) - r\varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем требуемое неравенство.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_\varepsilon \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$, такое что $\alpha(t_\varepsilon) + x^{-1}\beta(t_\varepsilon) \leq 1$ и $g(x) \leq \gamma(t_\varepsilon) + \varepsilon$. Поскольку $r = \alpha(t_\varepsilon) \in (0, 1]$, то $\alpha \left(\frac{t_\varepsilon}{r} \right) = 1$. Тогда

$$\beta \left(\frac{t_\varepsilon}{r} \right) \leq \frac{x(1-r)}{r},$$

а значит,

$$\gamma \left(\frac{t_\varepsilon}{r} \right) \leq f \left(x \frac{1-r}{r} \right).$$

Поэтому

$$g(x) \leq \gamma(t_\varepsilon) + \varepsilon \leq rf \left(x \frac{1-r}{r} \right) + r\varepsilon.$$

Остаётся заметить, что условие $r \in (0, 1)$ в (2) можно заменить на условие $r \in (0, 1]$ в силу вогнутости f .

Пример 1. Пусть $\mathbb{T}$ — конус положительных операторов в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $|\cdot|$. Для избежания технических сложностей будем считать пространство H конечномерным.

Для любых заданных положительного оператора G в H с нулевой нижней границей спектра и $E > 0$ можно ввести в H скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle_E^G = \langle \varphi, \psi \rangle + \langle \varphi, G\psi \rangle / E, \quad \varphi, \psi \in H,$$

и соответствующую норму $|\varphi|_E^G = \sqrt{\langle \varphi, \varphi \rangle_E^G}$ любого вектора $\varphi \in H$. Тогда для любого линейного оператора A в H величина

$$\|A\|_E^G = \sup\{|A\varphi| \mid \varphi \in H, |\varphi|_E^G \leq 1\}$$

есть операторная норма A как оператора из H со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_E^G$ в H со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Можно показать (см. [2]), что

$$\|A\|_E^G = \sup\{\sqrt{\text{Tr} AXA^*} \mid X \in \mathbb{T}, \text{Tr} X + E^{-1} \text{Tr} GX \leq 1\}.$$

Для любого линейного оператора A в H можно определить семейство норм

$$\|A\|_E^G = \sup\{\sqrt{\text{Tr} AXA^*} \mid X \in \mathbb{T}, \text{Tr} X \leq 1, \text{Tr} GX \leq E\}, \quad E > 0,$$

которые оказываются полезными для ряда задач математической физики [2]¹. Нетрудно показать, что функция $E \rightarrow \|A\|_E^G$ вогнута на $\mathbb{R}_+$ и стремится к обычной операторной норме A при $E \rightarrow +\infty$. В силу предложения 1 при каждом операторе A

¹ Особые свойства этих норм проявляются в случае бесконечномерного гильбертова пространства H и неограниченного оператора G , в котором эти нормы задают топологии, более слабые, чем топология операторной нормы.

в H неотрицательные функции $f_A(E) = \|A\|_E^G$ и $g_A(E) = \|\|A\|\|_E^G$ связаны между собой преобразованиями F и G :

$$g_A = F[f_A], \quad f_A = G[g_A]. \quad (3)$$

Данные соотношения были получены в [2] довольно сложным методом, использующим специальные свойства функций f_A и g_A . Предложение 1 показывает, что эти соотношения являются частным случаем более общего свойства, представленного в следствии 1.

Нормы $\|\cdot\|_E^G$ (естественным образом определённые для операторов в сепарабельных гильбертовых пространствах в случае неограниченного оператора G) оказались полезными для ряда задач в теории открытых квантовых систем. С их помощью доказано обобщение теоремы Кречмана—Шлингемана—Вернера (теорема 2 в [2]), которое позволило, в частности, получить представление Стайнспринга для сильно сходящихся последовательностей квантовых каналов. Эти нормы также возникают при описании сильнонепрерывных квантовых динамических полугрупп при наличии энергетических ограничений на состояния квантовой системы [3].

Нормы $\|\| \cdot \|\|_E^G$ естественно возникают в теории относительно ограниченных операторов в бесконечномерных гильбертовых пространствах [4, 5].

Соотношение (3) устанавливает взаимно-однозначную связь между нормами $\|\cdot\|_E^G$ и $\|\| \cdot \|\|_E^G$ как функциями на $\mathbb{R}_+$, которая интересна как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения физических приложений (см. [2, пример после теоремы 3]).

Источники финансирования. Первый автор поддержан грантом РФФИ 19–04–01227. Исследование первого автора выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ и финансировалось в рамках господдержки ведущих университетов Российской Федерации “5-100”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС, 2000.
2. *Shirokov M.E.* Operator E-Norms and Their Use. 2018. arXiv:1806.05668.
3. *Shirokov M.E., Holevo A.S.* Energy-Constrained Diamond Norms and Quantum Dynamical Semigroups // *Lobachevskii J. Math.* 2019. V. 40. № 10. P. 1569–1586.
4. *Kato T.* Perturbation Theory for Linear Operators. N.Y.; Heidelberg; B.: Springer-Verlag, 1980.
5. *Simon B.* Operator Theory: A Comprehensive Course in Analysis. Pt IV. Amer. Math. Society, 2015.

ON MUTUALLY INVERSE TRANSFORMS OF FUNCTIONS ON A HALF-LINE

Corresponding Member of the RAS V. Yu. Protasov^{1,2}, M. E. Shirokov^{3,4}

¹*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

²*National Research University High School of Economics, Moscow, Russian Federation*

³*Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

⁴*Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Dolgoprudny, Moscow Region, Russian Federation*

Received September 5, 2019

Two transforms of functions on a half-line are considered. It is proved that their composition gives a concave majorant for every non-negative function. In particular, this composition is an identical transform on the class of non-negative concave functions. Applications of this result in the operator theory of Hilbert space and in the theory of quantum systems are mentioned. Several open problems are formulated.

Keywords: functional transform, composition, concave majorant, positive operators, Hilbert space.