

УДК 519.8:533

КИНЕТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ РАСЧЁТА ТЕЧЕНИЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ НА ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Академик РАН Б. Н. Четверушкин^{1,*}, А. В. Савельев^{2,3,**}, В. И. Савельев^{2,***}

Поступило 19.08.2019 г.

В работе представлены результаты математического моделирования процессов динамики электропроводной жидкости для сложных систем теплопереноса. Исследование проведено на основе детального математического моделирования на параллельных вычислительных системах высокой производительности на основе кинетически согласованного магнитогазодинамического подхода, адаптированного для такого класса проблем. Кинетически согласованный алгоритм хорошо адаптируется на архитектуру высокопроизводительных вычислительных систем с массивным параллелизмом и даёт возможность эффективного проведения исследований сложных систем теплопереноса с высоким разрешением. Представлены подход, метод и алгоритмы, а также результаты математического моделирования.

Ключевые слова: математическое моделирование, численные алгоритмы, кинетически согласованные схемы, электропроводящие жидкости.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524896552-557>

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1], основываясь на использовании комплексной локальной максвелловской статистической функции распределения и кинетически согласованного подхода, построен вычислительный алгоритм, позволяющий эффективно использовать возможности высокопроизводительных систем для фундаментальных и прикладных задач. В работе [2] приведены результаты расчёта фундаментальной астрофизической задачи об аккреции межзвёздной материи массивным компактным астрофизическим объектом. Решаемая трёхмерная система уравнений состояла из девяти уравнений, включая уравнение магнитной индукции и уравнение гравитационного потенциала. Магнитное поле описывается трёхмерным уравнением магнитной индукции при наличии магнитной вязкости. Предложенный подход позволил эффективно решать крупномасштабные фундаментальные задачи с детальной пространственной дискретизацией более 10^{10} ячеек и временным интервалом более 10^4 шагов по времени на па-

раллельных вычислительных системах высокой производительности.

Многие важные прикладные проблемы требуют детального описания моделей уравнениями магнитной гидродинамики для несжимаемых проводящих жидкостей. Взаимодействие проводящей жидкости с электрическими и магнитными полями позволяет реализовать разнообразные явления в электромагнитных жидкостно-механических преобразователях энергии. Преимуществом таких систем в практических приложениях в критических условиях является осуществление переноса энергоносителей без использования движущихся механических элементов. Например, магнитодинамические движители в сложных системах теплопереноса [3].

Целью данной работы является адаптация ранее полученного алгоритма магнитной газовой динамики для моделирования течений электропроводящей жидкости для последующего применения к исследованию сложных распределённых систем теплопереноса с электромагнитными движителями.

При моделировании течений несжимаемой жидкости, как правило, используются алгоритмы, имеющие существенные различия от методов решения задач динамики вязких сжимаемых теплопроводных газов. В данной работе, опираясь на известный факт о практической несжимаемости газов при числах Маха меньше 0,15, рассматривается метод, позволяющий использовать с минимальными изменениями ранее предложенный алгоритм для моделиро-

¹ *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской Академии наук, Москва*

² *Балтийский федеральный университет им. Иммануила Канта, Калининград*

³ *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

*E-mail: office@keldysh.ru

**E-mail: andrey.saveliev@desy.de

***E-mail: valeri.saveliev@desy.de

вания течения электропроводящей жидкости в сложных системах теплопереноса на параллельных вычислительных системах высокой производительности.

КИНЕТИЧЕСКИ СОГЛАСОВАННЫЙ ПОДХОД МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

Использование кинетически согласованной системы дифференциальных уравнений магнитной газовой динамики для моделирования проводящих жидкостей основывается на следующих физических предположениях. Математическая модель и вычислительный алгоритм должны учитывать особенности поведения жидкостей, в частности несжимаемости.

Скорость звука в жидкости многократно превышает скорость звука в газах. Учитывая, что в большинстве технических применений характерные скорости u не превышают десятков метров в секунду, можно сказать, что выполняется условие

$$u \leq 0,1c, \quad (1)$$

где c — скорость звука.

Дополнительные условия выполнения более строгих условий несжимаемости могут быть заданы феноменологическим уравнением состояния

$$p = p_0 + \beta(p - p_0), \quad (2)$$

где параметр β отражает сильное влияние изменения давления при незначительном изменении плотности, т.е. определяет практическую несжимаемость среды. Большие значения параметра β могут быть взяты с достаточной степенью приближения, не влияющей на конечные результаты моделирования.

В случае моделирования течений, характеризующихся малыми числами Маха, серьёзной проблемой является требование достаточно малого шага по времени. В случае неявных схем это требование обуславливается необходимостью обеспечения достижимости требуемой точности, при которой сходимость решения существенно замедляется. В этом плане явные схемы являются предпочтительными для реализации параллельных вычислений, более того, использование систем уравнений магнитной гидродинамики гиперболического вида позволяет значительно снизить требования по стабильности и соответственно временному шагу [4].

Основой проведённых исследований являлась кинетически согласованная система дифференциальных уравнений магнитной газовой динамики

гиперболического типа (см. детально в [5]), представляющая физическую модель процессов магнитной газовой динамики, полученную на основе фундаментального кинетического уравнения [6, 7].

Для численных расчётов рассматриваемой проблемы используется компактная кинетически согласованная система дифференциальных уравнений магнитной газовой динамики в компактном виде [8]. Используемая трёхмерная система уравнений, приведённая к гиперболическому виду, выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w})] = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho \mathbf{u} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho \mathbf{u} + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times \mathbf{u} + \\ + B_{i,k}] + \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \operatorname{div} P_{NS}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E + \operatorname{div} \left[\left(E + p + \frac{B^2}{2} \right) (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \right] = \\ = \operatorname{div} q + \operatorname{div}(P_{NS} \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B} = \operatorname{rot}[(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \times \mathbf{B}] + v_m \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (7)$$

где ρ — плотность, \mathbf{u} — скорость, p — давление, $w_{ik} = \frac{1}{\rho} \left[\left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \delta_{ik} + \rho u_i u_k - B_i B_k \right]$ — регуляризатор, связанный со сглаживанием решения на отрезке времени, τ — характерное время между столкновениями молекул, $\tau = \frac{2\mu}{p}$, $\tau_m = \frac{2v_m \rho}{p + \frac{B^2}{8\pi}}$ — магнетодинамическая постоянная времени, v_m — магнитная вязкость, q — джоулев нагрев, \mathbf{B} — напряжённость магнитного поля.

Численное решение системы уравнений (3)–(7) с дополнительными условиями (2) проведено с помощью трёхслойной явной схемы, описанной в [4]. Данная схема идеально адаптируется к архитектуре вычислительных систем с экстремально параллелизмом и является перспективным направлением для параллельных вычислительных систем сверхвысокой производительности. Асимптотически устойчивость рассматриваемой системы определяется условием $\Delta t \leq h^{3/2}$.

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Геометрия расчёта задачи о течении электропроводной жидкости в плоском канале магнитного ди-

намического движителя и последующем расширении в виде прямоугольного объёма системы теплопереноса представлена на рис. 1. Прямоугольный канал сечением $2,5 \times 2,5$ см и длиной 30 см соединяется с прямоугольным объёмом $2,5 \times 30 \times 30$ см с последующим выходом в прямоугольный канал сечением $2,5 \times 2,5$ см. Начало входного канала длиной 10 см представляет собой область электромагнитного движителя. Электропроводящая жидкость натрия (Na) движется в канале магнитного динамического движителя под влиянием внешнего магнитного поля, приложенного к заштрихованной области. Физические характеристики расплава взяты из [9]: температура 600 К, плотность 874 кг/м^3 , адиабатический индекс 1,2. Вязкость определена как функция температуры в виде эмпирической зависимости

$$\ln \eta = -6,4406 - \ln T + 556,835/T, \quad (8)$$

теплопроводность определена как функция температуры в виде эмпирической зависимости

$$k = 124,67 - 1,1381 \times 10^{-3}T + 5,5226 \times 10^{-5}T^2 - 1,1842 \times 10^{-8}T^3, \quad (9)$$

электропроводимость определена как функция температуры в виде эмпирической зависимости

$$R = -9,9141 + 8,2022 \times 10^{-2}T - 1,3215 \times 10^{-4}T^2 + 1,7212 \times 10^{-7}T^3. \quad (10)$$

Расчётная сетка для проведения численных экспериментов для трёхмерного анализа выбрана $200 \times 2000 \times 2000$ ячеек, что позволяет сделать детальное моделирование потоков в сложных геометрических системах.

Начальные условия: параметры магнитогидродинамического движителя определены таким образом, что скорость электропроводной жидкости (Na)

в области электромагнитного движителя составляет максимум $3,6 \text{ м/с}$ ($M = 0,0015$).

На рис. 2 представлены основные магнитогидродинамические параметры на входном участке в установившемся режиме. Течение — установившийся ламинарный поток, показаны следующие величины: а — напряжённость магнитного поля, б — значение скорости в середине канала достигает величины $2,7 \text{ м/с}$, в — значение плотности во входном канале, вариация плотности не превышает $0,2\%$.

На рис. 3 представлены 2D-проекции течения электропроводящей жидкости (Na) в системе: входной канал с магнитным динамическим движителем, каверна и выходной канал. Динамика потока в системе характеризуется несколькими основными этапами. На рис. 3а показан момент времени, соответствующий значению $0,02 \text{ с}$, — переходный режим, соответствующий образованию устойчивого центрального вихря, со смещением к передней стенке каверны в силу реакции потока от задней стенки каверны. На рис. 3б представлен момент времени $0,3 \text{ с}$ с установившимся режимом течения электропроводной жидкости (Na), динамика потока стабилизируется с образованием постоянного центрального вихря в каверне с ожидаемыми параметрами, сравнимыми с данными, приведёнными в [10]. Входные и выходные потоки во всём временном интервале остаются эквивалентными с высокой точностью, что характерно для течения несжимаемой жидкости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кинетически согласованная модель, ранее применённая для моделирования задач, связанных с течением ионизированных вязких, сжимаемых газов, может также быть успешно использована для расчёта

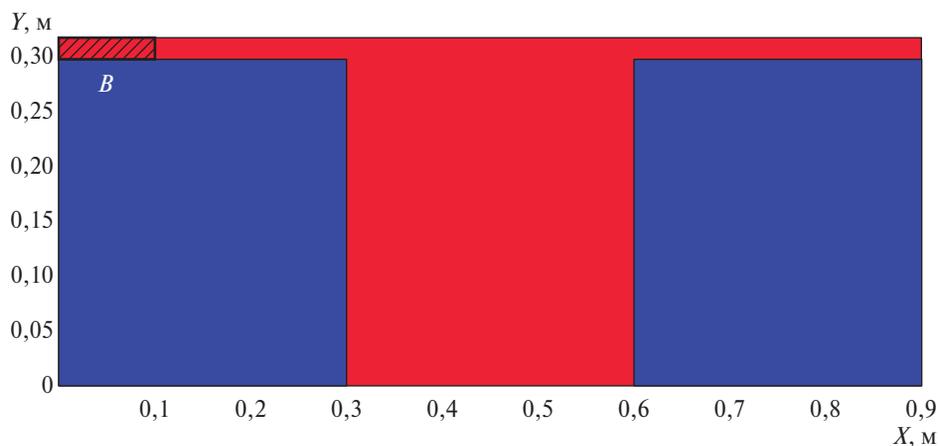


Рис. 1. 2D-проекция геометрии численного эксперимента.

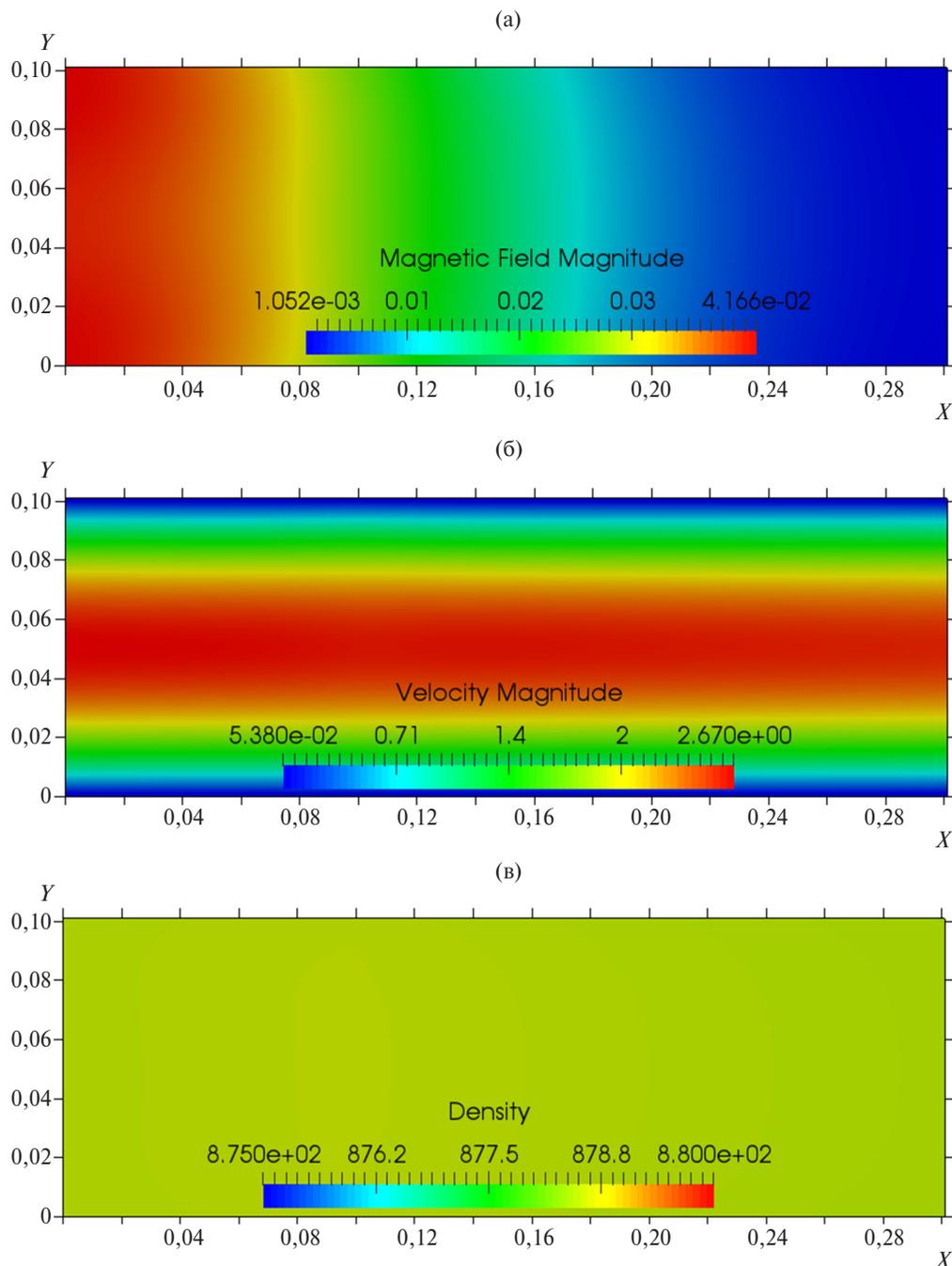


Рис. 2. Расчёт течения электропроводящей жидкости (Na) в области магнитного динамического движителя: а — распределение напряжённости магнитного поля, б — распределение скорости течения электропроводящей жидкости, в — распределение плотности.

течений электропроводящей несжимаемой жидкости в сложных системах теплопереноса с магнитогидродинамическими движителями. Предложенный алгоритм важен для моделирования процессов в ряде технических устройств на высокопроизводительных вычислительных системах.

Источник финансирования. Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 19–11–00104).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chetverushkin B., D'Ascenzo N., Saveliev A., Saveliev V.* Novel Kinetically Consistent Algorithms for Magneto Gas Dynamics // *Appl. Math. Letters*. 2017. V. 72. P. 75–81. DOI: 10.1016/j.aml.2017.04.015.
2. *Четверушкин Б.Н., Д'Асцензо Н., Савельев А.В., Савельев В.И.* Моделирование астрофизических явлений на основе высокопроизводительных вычислений // *ДАН*. 2017. Т. 472. № 5. С. 512–515.

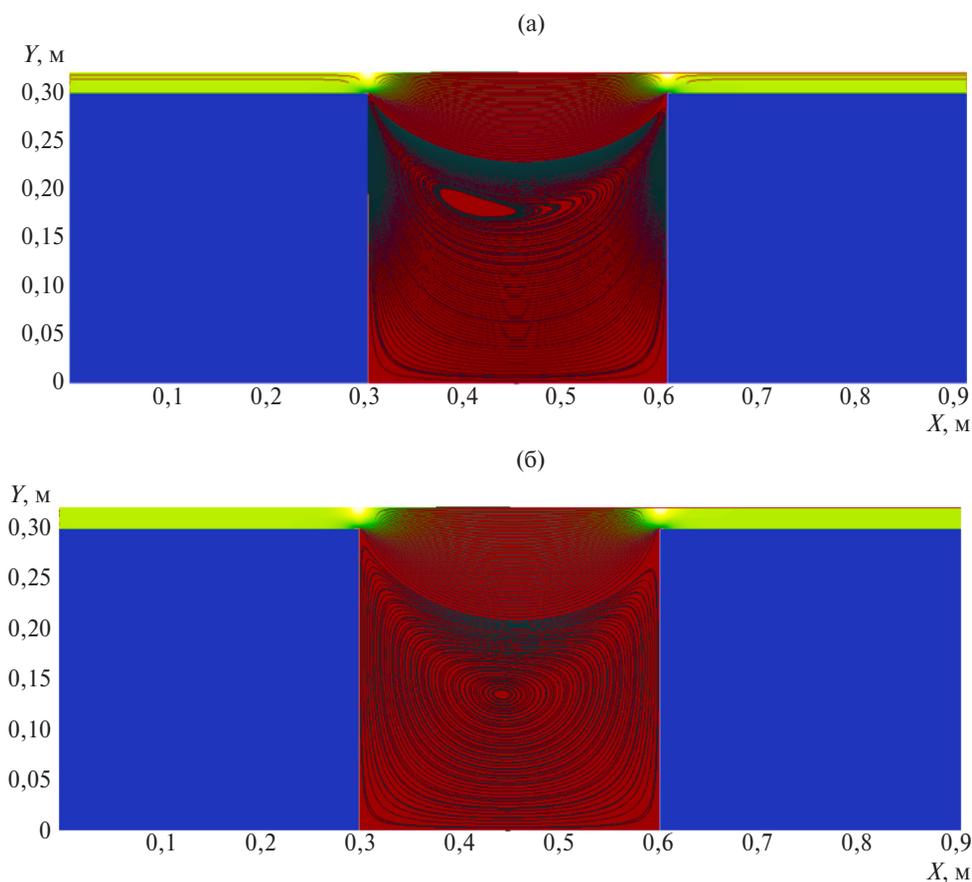


Рис. 3. 2D-проекции движения проводящей жидкости (Na) в области каверны: а — в момент времени 0,02 с; б — в момент времени 0,3 с, установившийся режим.

3. *Al-Habahbeh O.M., Al-Saqqah M., Safi M., et al.* Review of Magnetohydrodynamic Pump Applications // Alexandria Engineering J. 2016. V. 55. P. 1347–1358. DOI: 10.1016/j.aej.2016.03.001.
4. *Четверушкин Б.Н., Д'Асцензо Н., Савельев В.И.* Трехслойная схема решения параболических и эллиптических уравнений // ДАН. 2015. Т. 462. № 4. С. 404–407.
5. *Четверушкин Б.Н., Д'Асцензо Н., Савельев А.В. и др.* Математическая модель для магнитной газовой динамики // Матем. моделирование. 2017. Т. 29. № 3. С. 3–15. DOI: 10.1134/S2070048217050039.
6. *Boltzmann L.* Lectures on Gas Theory. Dover, 1964.
7. *Cercignani C.* Theory and Applications of the Boltzmann Equations. Edinburg: Scottish Academic Press, 1988.
8. *Четверушкин Б.Н., Савельев А.В., Савельев В.И.* Компактная квазигазодинамическая система для высокопроизводительных вычислений // Вычисл. математика и матем. физика. 2019. Т. 59. № 3. С. 171–178. DOI: 10.1134/S0044466919030062.
9. *Fink J.K., Leibowitz L.* Thermodynamic and Transport Properties of Sodium Liquid and Vapor // ANL/RE-95/2. 1995.

**KINETIC ALGORITHMS FOR THE MODELING
OF CONDUCTIVE FLUIDS FLOW
ON HIGH PERFORMANCE COMPUTATIONAL SYSTEMS**

Academician of the RAS B. N. Chetverushkin¹, A. V. Saveliev², V. I. Saveliev³

¹*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation*

²*Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russian Federation*

³*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

Received August 19, 2019

This letter presents the results of the mathematical modeling of processes of electrically conducting fluid flow dynamics for complex heat transfer systems. The study was carried out based on detailed calculations on parallel high performance computational systems on the basis of the kinetically consistent magnetogasdynamic approach, adjusted for this class of problems. The kinetically consistent algorithm adapts well to the architecture of high performance computational systems with massive parallelism and makes it possible to conduct effective research of complex heat transfer systems with high resolution. The article presents the approach, method and algorithms as well as the results of the mathematical modeling.

Keywords: mathematical modeling, computational algorithms, kinetic consistent schemes, electrically conducting fluids.