ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, *2019*, *том 489*, *№ 6*, *с. 570–575*

МЕХАНИКА

УДК 521.135

О ПРЕЦЕССИИ ОРБИТЫ МЕРКУРИЯ

Н. И. Амелькин

Представлено академиком РАН В.Ф. Журавлёвым 28.02.2019 г.

Поступило 04.03.2019 г.

В рамках классической механики исследуется влияние планет Солнечной системы на прецессию орбиты Меркурия. Влияние каждой планеты на движение Меркурия вычисляется в рамках ограниченной задачи трёх тел: Солнце—планета—Меркурий. Показано, что среднее смещение перигелия орбиты Меркурия, вычисленное в рамках плоской ограниченной круговой задачи, составляет 556,5 угловой секунды за столетие и совпадает с наблюдаемым (570″) с относительной точностью 2,5%. Показано также, что в наблюдаемом смещении перигелия Меркурия помимо среднего имеются колебательные составляющие с суммарной амплитудой до 20″ и периодами от нескольких лет до нескольких десятков лет. За счёт этих составляющих рассчитанная по данным наблюдений на интервалах времени в десятки и даже сотни лет скорость смещения перигелия Меркурия может существенно отличаться от истинной средней скорости, чем и может объясняться неполное совпадение вычисленной средней скорости смещения перигелия с данными наблюдений.

Ключевые слова: Солнечная система, ограниченная круговая задача трёх тел, прецессия перигелия Меркурия.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524896570-575

ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Дискуссии о причинах “аномальной” прецессии орбиты Меркурия начались с середины XIX в. после того, как французский астроном Урбен Леверье опубликовал результаты своих расчётов о движении Меркурия. По его расчётам [1, 2], где учитывалось влияние всех планет (табл. 1), перигелий Меркурия должен смещаться на 526,7 угловой секунды за столетие, а по данным 40-летних наблюдений Парижской обсерватории смещение составляло 565″ (по современным данным смещение равно 570″).

Разницу в 42,3″ пытались объяснить влиянием неизвестной планеты (Вулкана) между Солнцем и Меркурием или сплюснутостью Солнца. Но никакой планеты внутри орбиты Меркурия обнаружено не было, а степень сплюснутости Солнца по современным оценкам явно недостаточна для эффекта в 42,3″. Для объяснения обнаруженной аномалии были и предложения о модификации ньютоновского закона всемирного тяготения (С. Ньюком).

В 1915 г. Альберт Эйнштейн опубликовал окончательный вариант своей теории тяготения, получившей название “общая теория относительности” (ОТО), и рассчитал вытекающее из неё дополнительное смещение перигелия Меркурия [3]. Оно оказалось равным 43″ за столетие, т.е. с большой точностью совпало с упомянутой выше разницей в 42,3″. Многие из учёного сообщества приняли это совпадение как доказательство адекватности ОТО. Но нашлись и критики, которые считали совпадение случайным или оспаривали достоверность разницы в 42–43″ между рассчитанным методами классической механики смещением и наблюдениями [4]. Дискуссии по этому вопросу продолжаются до сих пор.

В данной работе расчёт смещения перигелия Меркурия проводится в рамках классической механики. Показано, что разница между обусловленным влиянием планет средним значением смещения перигелия Меркурия и наблюдаемым значением (570″) существенно (в три раза) меньше 42″. Кроме того, установлено, что смещение перигелия не является равномерным. В нём присутствуют колеба-

Таблица 1 (Урбен Леверье [1, 2])

Планета	Вклад в смещение перигелия Меркурия (за столетие в угловых секундах)
Венера	280,6
Земля	83,6
Марс	2,6
Юпитер	152,6
Сатурн	7,2
Уран	0,1
Всего	526,7

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный Московской обл.
E-mail: *namelkin@mail.ru*

тельные составляющие с суммарной амплитудой до 20″ и периодами от нескольких лет до нескольких десятков лет. Поэтому рассчитанная по данным наблюдений на интервалах времени в десятки и даже сотни лет скорость смещения перигелия Меркурия может существенно отличаться от истинной средней скорости.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЁТА ВЛИЯНИЯ ПЛАНЕТ НА СМЕЩЕНИЕ ПЕРИГЕЛИЯ МЕРКУРИЯ

Учёт влияния каждой планеты на движение Меркурия будем исследовать в рамках плоской ограниченной круговой задачи трёх тел: Солнце—планета—Меркурий. Обозначим через $O\mathbf{ij}$ инерциальную систему отсчёта с началом в общем центре масс системы Солнце—планета, а через M и m — массу Солнца и массу планеты соответственно. Солнце и планета движутся относительно инерциальной системы отсчёта по закону

$$\mathbf{R}_M = \frac{\varepsilon R\mathbf{e}(t)}{1+\varepsilon}, \quad \mathbf{R}_m = -\frac{R\mathbf{e}(t)}{1+\varepsilon},$$
$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{i}\cos\Omega t + \mathbf{j}\sin\Omega t, \quad \varepsilon = \frac{m}{M}, \tag{1}$$

где R — радиус орбиты планеты, Ω — орбитальная угловая скорость планеты.

Положение Меркурия относительно инерциальной системы отсчёта определяется радиус-вектором $\boldsymbol{\rho} + \mathbf{R}_M$, где $\boldsymbol{\rho}$ — вектор, соединяющий Солнце с Меркурием. Уравнение движения Меркурия относительно Солнца записывается в виде

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\mu\boldsymbol{\rho}}{\rho^3} + \frac{\varepsilon\Omega^2 R\mathbf{e}(t)}{1+\varepsilon} - \varepsilon\mu\frac{R\mathbf{e}(t)+\boldsymbol{\rho}}{|R\mathbf{e}(t)+\boldsymbol{\rho}|^3}, \quad \mu = \gamma M. \tag{2}$$

Перейдём к безразмерному времени τ и к безразмерной переменной $\mathbf{r}$ согласно формулам

$$\tau = \Omega t, \quad \mathbf{r} = \frac{\boldsymbol{\rho}}{R}. \tag{3}$$

Тогда, учитывая соотношение $\mu = \dfrac{\Omega^2 R^3}{1+\varepsilon}$, получим уравнение

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\tau^2} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3(1+\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\left(\mathbf{e}(\tau) - \frac{\mathbf{e}(\tau)+\mathbf{r}}{|\mathbf{e}(\tau)+\mathbf{r}|^3}\right),$$
$$\mathbf{e}(\tau) = \mathbf{i}\cos\tau + \mathbf{j}\sin\tau. \tag{4}$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (4) представляет собой возмущающее ускорение. Так как для всех планет параметр ε не превышает значения 10^{-3}, для этого ускорения без ущерба для точности будем использовать формулу

$$\mathbf{W} = \varepsilon\left(\mathbf{e}(\tau) - \frac{\mathbf{e}(\tau)+\mathbf{r}}{|\mathbf{e}(\tau)+\mathbf{r}|^3}\right). \tag{5}$$

Обозначим через x и y компоненты вектора $\mathbf{r}$ в инерциальном базисе, т.е. $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$. Тогда для компонент возмущающего ускорения получим выражения

$$W_x = \varepsilon[\cos\tau - (\cos\tau + x)Z^{-3/2}],$$
$$W_y = \varepsilon[\sin\tau - (\sin\tau + y)Z^{-3/2}], \tag{6}$$
$$Z = 1 + z, \quad z = r^2 + 2(x\cos\tau + y\sin\tau).$$

Смещение перигелия орбиты Меркурия в рамках плоской задачи описывается формулой [5]

$$\frac{d\omega}{du} = \frac{r^2}{e}\left(-S\cos\vartheta + \left(1 + \frac{r}{p}\right)T\sin\vartheta\right). \tag{7}$$

Здесь u — аргумент широты, ϑ — истинная аномалия, ω — угол между направлением на перигелий и осью $O\mathbf{i}$ инерциального базиса, e и p — эксцентриситет и параметр орбиты Меркурия, S и T — радиальная и трансверсальная компоненты возмущающего ускорения.

Считая, что ось $O\mathbf{i}$ инерциального базиса параллельна направлению от Солнца на точку перигелия орбиты Меркурия, получим

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = r^2 + 2r\cos(\vartheta - \tau),$$
$$S = \varepsilon\cos(\vartheta - \tau)\left(1 - \frac{1}{Z^{3/2}}\right) - \varepsilon\frac{r}{Z^{3/2}},$$
$$T = \varepsilon\sin(\tau - \vartheta)\left(1 - \frac{1}{Z^{3/2}}\right). \tag{8}$$

Раскладывая функцию $Z^{-3/2}$ в ряд Тейлора по степеням переменной z и подставляя этот ряд в формулы (8), получим для компонент возмущающего ускорения после осреднения по времени τ следующие выражения:

$$S = \varepsilon r\left(\frac{1}{2} + \frac{9}{16}r^2 + \frac{75}{128}r^4 + \frac{1225}{2048}r^6 + \ldots\right),$$
$$T = 0. \tag{9}$$

Таким образом, осреднённое по времени τ возмущающее ускорение имеет только радиальную компоненту, причём этот факт не зависит от числа вычисленных членов разложения функции $Z^{-3/2}$.

Для средней по времени τ скорости смещения перигелия Меркурия, учитывая соотношения (7) и (9), получим формулу

$$\frac{d\omega}{du} = -\frac{\varepsilon}{e}\left(\frac{1}{2}r^3 + \frac{9}{16}r^5 + \frac{75}{128}r^7 + \frac{1225}{2048}r^9 + \ldots\right)\cos\vartheta. \tag{10}$$

Далее в формуле (10) проведём осреднение по истинной аномалии ϑ. Для этого необходимо вычислить средние значения функций

$$r^s\cos\vartheta = \frac{p^s\cos\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^s}.$$

Обозначим среднее угловыми скобками и введём обозначение

$$f_s = -\frac{1}{e}\left\langle\frac{\cos\vartheta}{(1+e\cos\vartheta)^s}\right\rangle. \tag{11}$$

Раскладывая функции $\dfrac{1}{(1+e\cos\vartheta)^s}$ в ряд Тейлора по степеням $e\cos\vartheta$, получим

$$\begin{gathered} f_3 = \frac{3}{2} + \frac{15}{4}e^2 + \frac{105}{16}e^4 + \ldots, \\ f_5 = \frac{5}{2} + \frac{105}{8}e^2 + \frac{315}{8}e^4 + \ldots, \\ f_7 = \frac{7}{2} + \frac{63}{2}e^2 + \frac{1155}{8}e^4 + \ldots, \\ f_9 = \frac{9}{2} + \frac{495}{8}e^2 + \frac{6435}{16}e^4 + \ldots, \\ \ldots \end{gathered} \tag{12}$$

В итоге для средней скорости смещения перигелия Меркурия получим формулу

$$\begin{gathered} \left\langle\frac{d\omega}{du}\right\rangle = \varepsilon\left(\frac{1}{2}p^3 f_3 + \frac{9}{16}p^5 f_5 + \right. \\ \left. + \frac{75}{128}p^7 f_7 + \frac{1225}{2048}p^9 f_9 + \ldots\right). \end{gathered} \tag{13}$$

В этой формуле согласно (3) $p = \dfrac{P}{R}$ — отношение параметра P орбиты Меркурия к расстоянию между возмущающей планетой и Солнцем. Поскольку орбиты планет не точно круговые, то расстояния R_k между k-й планетой и Солнцем вычислялись как средние по времени по формулам

$$\begin{gathered} R_k = \frac{1}{T}\int_0^T R_k(t)dt = \frac{P_k}{2\pi}(1-e_k^2)\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(1+e_k\cos\theta)^3} = \\ = P_k\left(1 + \frac{1}{2}e_k^2 + \ldots\right), \end{gathered} \tag{14}$$

где P_k — параметр орбиты планеты, e_k — эксцентриситет орбиты планеты.

Суммарное смещение перигелия Меркурия за счёт влияния всех планет за один земной год, выраженное в угловых секундах, определяется формулой

$$\begin{gathered} \Delta\omega = 6^4\cdot 10^3\,\frac{T_E}{T_M}\times \\ \times\sum_{k=1}^{N}\varepsilon_k\left(\frac{1}{2}f_3 p_k^3 + \frac{9}{16}f_5 p_k^5 + \frac{75}{128}f_7 p_k^7 + \frac{1225}{2048}f_9 p_k^9 + \ldots\right), \\ \varepsilon_k = \frac{m_k}{M},\quad p_k = \frac{P}{R_k}. \end{gathered} \tag{15}$$

Здесь T_E и T_M — периоды обращения Земли и Меркурия вокруг Солнца.

Для вычисления функций f_s и коэффициентов μ_k и p_k использовались данные о массах планет и характеристиках их орбит из справочника [6]. Результаты расчётов смещения перигелия Меркурия по формуле (15) приведены в табл. 2. Здесь n — число членов ряда, учитываемых в формулах (15) и (12). Из табл. 2 видно, что ряд, отвечающий возмущению от Венеры, сходится медленнее других. Объясняется это тем, что для Венеры коэффициент $p_1 = 0{,}51$ имеет самое большое значение по сравнению с коэффициентами p_k (k = 2, 3, ...) для других планет.

По мере увеличения числа членов в рядах (12) и (15) величина $\Delta\omega$ увеличивается, поскольку все члены в этих рядах положительны. Но, как показали расчёты, дальнейшее увеличение числа n ($n > 9$) не приводит к заметному изменению результата. Это позволяет констатировать, что значение $\Delta\omega = 5{,}565''$ в год близко к среднему смещению перигелия Меркурия в рамках рассматриваемой модели.

Разница между вычисленным по формуле (15) средним значением $\Delta\omega = 5{,}565''$ и данными наблюдений (5,70″) составляет 0,135″ (относительная разница 2,5%). Эта разница существенно (в три раза) меньше величины 0,42″, которую приводят во многих источниках и трактуют как дополнительное (аномальное) смещение, необъяснимое с позиций классической механики, и относят к релятивистскому эффекту.

Таблица 2

Планета	Вклад в среднее смещение перигелия Меркурия (за один год в угловых секундах)		
	$n = 4$	$n = 7$	$n = 9$
Венера	2,8235	2,9220	2,9276
Земля	0,9565	0,9594	0,9594
Марс	0,0241	0,0241	0,0241
Юпитер	1,5757	1,5758	1,5758
Сатурн	0,0763	0,0763	0,0763
Уран	0,0014	0,0014	0,0014
Всего	5,4575	5,5590	5,5646

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ В СМЕЩЕНИИ ПЕРИГЕЛИЯ МЕРКУРИЯ

При определении смещения перигелия Меркурия по данным наблюдений необходимо учитывать, что возмущающее ускорение помимо среднего (9) имеет зависящие от времени колебательные составляющие разной амплитуды, частоты и фазы. За счёт них измеренное по наблюдениям смещение перигелия Меркурия может существенно отличаться от истинного среднего даже на интервалах наблюдений в сотни лет. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Поскольку направление на перицентр меняется очень медленно, то производную по аргументу широты без ущерба для точности можно заменить производной по истинной аномалии. Тогда на основании уравнения (7) при учёте формул (8) получим уравнение

$$\frac{d\omega}{d\vartheta} = \frac{\varepsilon r^2}{e}\left(-\cos\tau + \frac{r(\cos(2\vartheta-\tau)-\cos\tau)}{2p}\right)\times \left(1-\frac{1}{Z^{3/2}}\right) + \frac{\varepsilon r^3\cos\vartheta}{eZ^{3/2}}. \quad (16)$$

Из интеграла площадей для невозмущённого движения получим второе уравнение

$$\frac{d\tau}{d\vartheta} = \frac{r^2}{p^{1/2}}. \quad (17)$$

Уравнения (16) и (17) в сочетании с уравнением конических сечений $r = \frac{p}{1+e\cos\vartheta}$ образуют замкнутую систему, в которой роль независимой переменной играет истинная аномалия. Численным интегрированием этой системы можно определить влияние возмущения от каждой планеты на поворот орбиты Меркурия.

На рис. 1а представлено полученное численным интегрированием системы (16), (17) поведение ω за счёт возмущения от Венеры. Здесь, как и всюду далее, N — число земных лет, ω вычисляется в угловых секундах. Полученный график свидетельствует о том, что величина ω меняется немонотонно. Если из этого графика “вычесть” вычисленное ранее среднее смещение (табл. 2), т.е. линейную функцию $N \cdot 2{,}9276$, то получится колебательная составляющая, изображённая на рис. 1б. Амплитуда этих колебаний достигает около 10″.

Влияние Юпитера на смещение перигелия Меркурия показано на рис. 2. В этом случае колебательная составляющая близка к периодической функции с периодом около 12 лет, а её амплитуда составляет около 10″.

На рис. 3а показан график суммарного (при учёте влияния всех планет) смещения перигелия Меркурия в зависимости от времени, на рис. 3б — колебательная составляющая, вычисленная на интервале времени в 500 лет.

Из представленных графиков следует, что в наблюдаемом смещении перигелия Меркурия помимо среднего имеются колебательные составляющие, суммарная амплитуда которых достигает 20″, с периодами от нескольких лет до нескольких десятков лет. Из-за наличия этих составляющих при вычислении среднего смещения по данным наблюдений на интервалах в десятки и даже сотни лет относительная погрешность может быть сопоставима с указанной выше величиной в 2,5%. Поэтому утверждения о том, что наблюдаемое

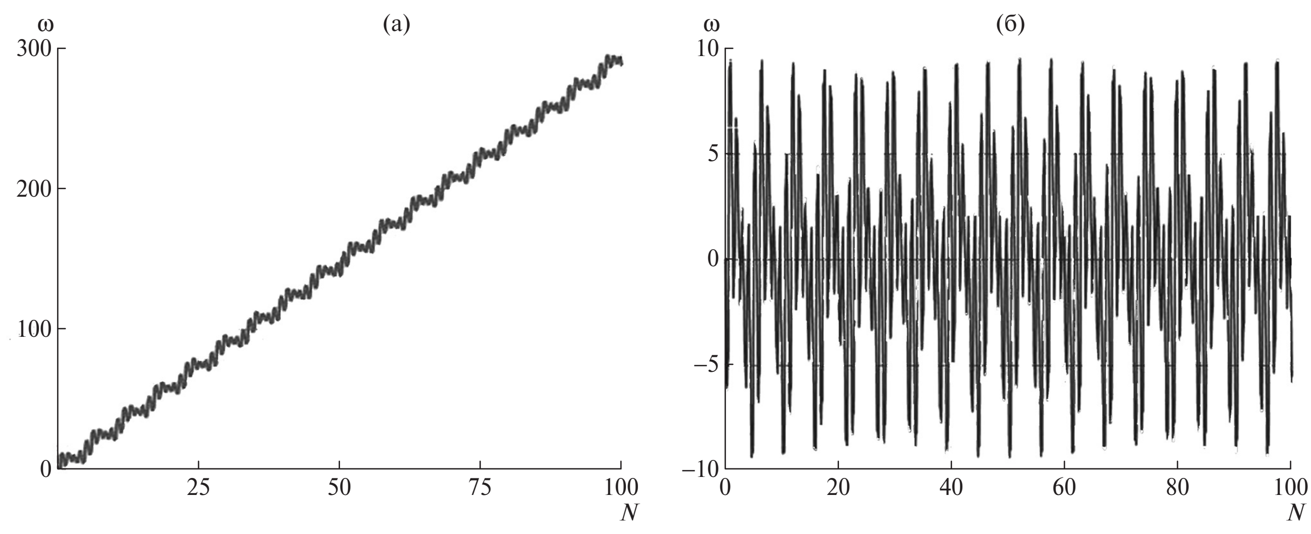

Рис. 1. Влияние Венеры на смещение перигелия Меркурия.

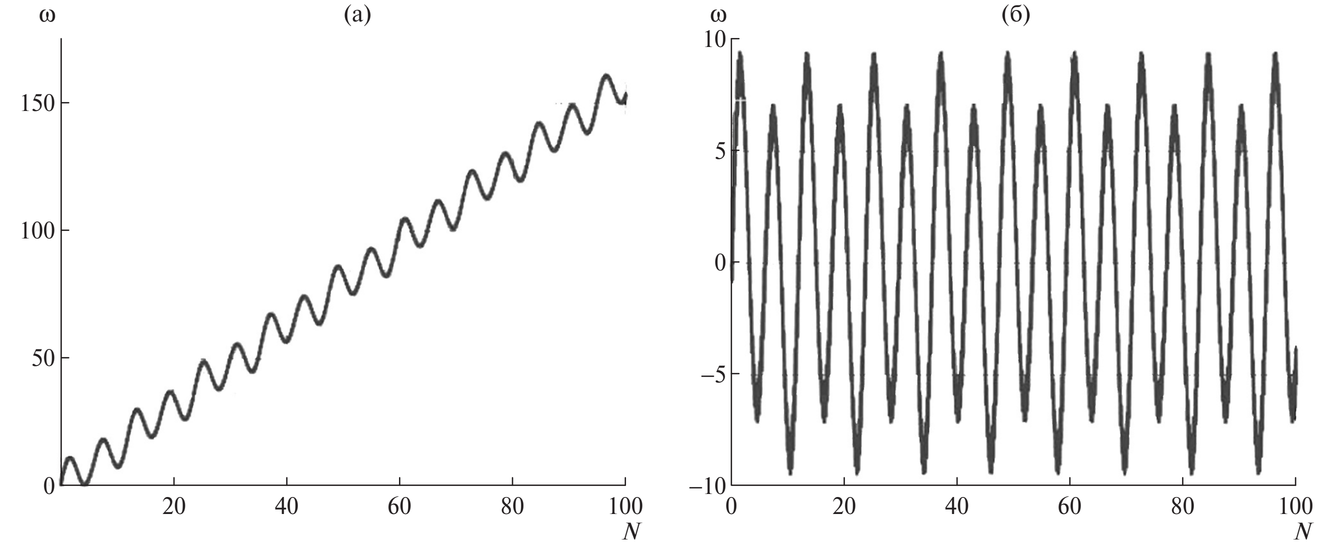

Рис. 2. Влияние Юпитера на смещение перигелия Меркурия.

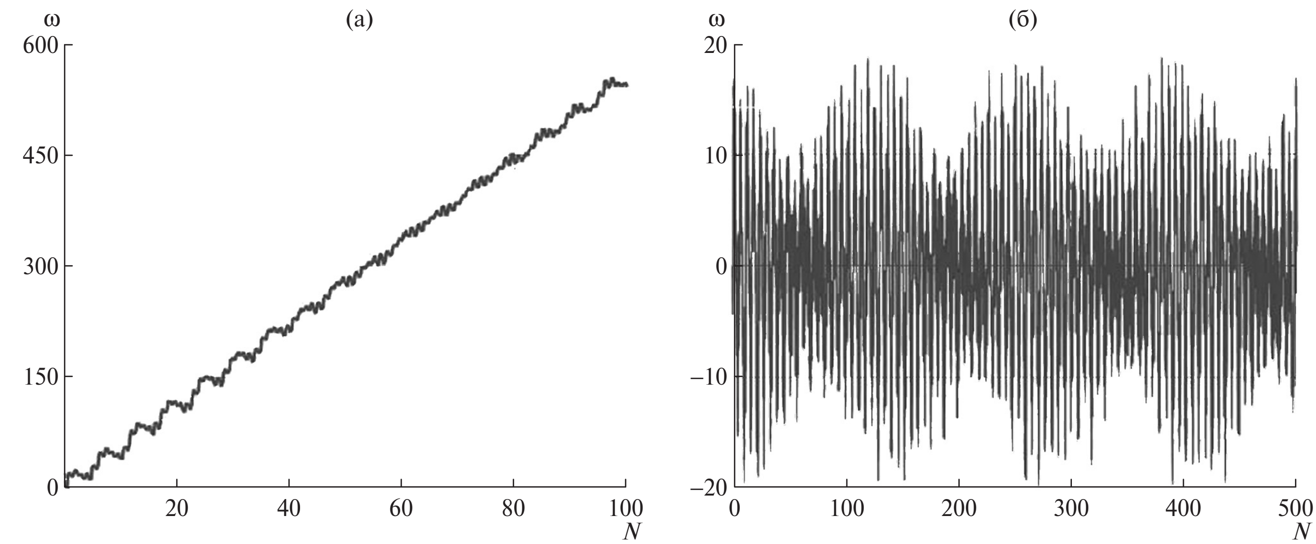

Рис. 3. Суммарное смещение перигелия Меркурия.

смещение перигелия Меркурия не объясняется полностью в рамках классической механики, нельзя признать строго обоснованными.

Благодарности. Автор выражает благодарность академику РАН В.Ф. Журавлёву за обсуждение работы и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Le Verrier U.* // Ann. Observ. imp. 1859. V. 5. P. 1–96.
2. *Le Verrier U.* // Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences. 1859. V. 49. P. 379–383.
3. *Эйнштейн А.* // Собр. науч. трудов: В 4 т. 1965. Т. I. С. 439–447.
4. *Роузвер Н.Т.* Перигелий Меркурия. От Леверье до Эйнштейна. Mercury's Perihelion. From Le Verrier to Einstein. М.: Мир, 1985. 244 с.
5. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Физматгиз, 1963. 588 с.
6. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 864 с.

THE PRECESSION OF MERCURY'S ORBIT

N. I. Amel'kin

Moscow Institute of Physics and Technology (*National Research University*),
Dolgoprudny, *Moscow Region*, *Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.F. Zhuravlev February 28, 2019

Received March 4, 2019

Within the framework of classical mechanics the influence of the planets in the solar system to the precession of the orbit of Mercury is investigated. It is shown that the average offset of the perihelion of mercury's orbit computed within the flat limited tasks is 556,5 angular seconds per century and coincides with the observation data with relative accuracy of 2,5%. Incomplete overlap between the computed average offset and observations can be explained by the presence in observations offset oscillatory components with a total amplitude up to 20 angular seconds and periods from several years to several decades.

Keywords: solar system, limited circular three bodies task, the precession of the perihelion of Mercury.