ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 489, № 6, с. 585–591

МЕХАНИКА

УДК 539.3

ОБ УТОЧНЕНИИ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ УПРУГОСТИ ЗА СЧЁТ ГРАДИЕНТНЫХ ЭФФЕКТОВ

Член-корреспондент РАН Е. В. Ломакин[1,2,*], С. А. Лурье[2,3], Л. Н. Рабинский[2], Ю. О. Соляев[1,2]

Поступило 19.09.2019 г.

В работе предлагается расширение подходов градиентных теорий деформируемых сред, которое заключается в использовании фундаментального свойства решений градиентной теории упругости — свойства сглаживания сингулярных решений классической теории упругости, перевода их в класс регулярных не только для проблем микромеханики, где масштабный параметр оказывается порядка характерного размера микроструктуры материала, а для условно “макромеханических” проблем. В этих задачах масштабный параметр, как правило, может быть найден в результате макроэкспериментов либо численных экспериментов и не является чрезвычайно малым характерным параметром материала. Установлено путём привлечения численного трёхмерного моделирования, что даже градиентные одномерные решения позволяют уточнить характер распределения напряжений в зонах закрепления и приложения нагрузки. Показано, что дополнительные масштабные параметры градиентной теории отражают специфические краевые эффекты и могут быть связаны с характерными конструкционными геометрическими параметрами и условиями нагружения, определяющими особенности классического решения.

Ключевые слова: градиентная теория упругости, балка Бернулли—Эйлера, напряжённое состояние, условия закрепления, локальные эффекты.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524896585-591

ВВЕДЕНИЕ

Градиентная теория упругости, которая, пожалуй, впервые была предложена в работе Р. Миндлина [1], традиционно применяется для описания неклассических масштабных эффектов, которые характерны микрообъектам, тонким структурам, наноструктурированным композитам [2]. Однако в последние годы были получены результаты, из которых становится очевидным, что градиентная теория упругости может применяться и для уточнённого описания напряжённого состояния макроскопических тел, в которых решения классической теории упругости содержат сингулярные или негладкие решения. Такие решения для тел с трещинами были рассмотрены, например, в работе [3], для контактных задач — в [4]. Численные решения для тел с негладкой геометрией рассматривались в [5, 6]. В этих задачах аналитические решения классической теории упругости содержат сингулярности, а результаты численного моделирования оказываются зависящими от размера конечно-элементной сетки. Градиентная теория упругости позволяет получать решения, в которых напряжения и деформации оказываются всюду конечными, что позволяет, например, использовать критерии прочности для оценки несущей способности тел с трещинами [7].

В настоящей работе показывается, что использование градиентной теории упругости даже для одномерных задач позволяет получить уточнённые оценки для напряжений. Выбор в качестве объекта исследований одномерных задач для стержней обоснован тем, что такого рода задачи являются достаточно простыми и для них можно получить аналитические градиентные решения. Не менее важным является также то, что одномерные задачи важны для приложений, ибо они являются основой для проведения стандартных экспериментальных исследований. Тем более неожиданной является возможность уточнения классических решений вследствие учёта градиентных эффектов, которым в данных задачах удаётся дать чёткую физическую трактовку. Приведённые в сообщении результаты получены на основе корректных градиентных моделей стержней, широко обсуждаемых в последнее время [8—10].

ГРАДИЕНТНЫЕ МОДЕЛИ СТЕРЖНЕЙ БЕРНУЛЛИ—ЭЙЛЕРА

Градиентные теории изгиба тонких балок и пластин, построенные с использованием кинематических гипотез Бернулли—Эйлера, получили чрез-

[1] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
[2] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)*
[3] *Институт прикладной механики Российской Академии наук, Москва*
**E-mail*: *lomakin@mech.math.msu.su*

вычайно широкую известность в последнее десятилетие (см. обзор, например, в [11]). Это связано не только с большим числом приложений, но также с тем, что формальное построение моделей деформирования подобных структур с использованием вариационных подходов выявило первоначально новое проявление масштабных эффектов, когда кажущаяся изгибная жёсткость оказалась зависимой от масштабных параметров градиентной теории. В связи с этим даже возникло определение — масштабозависимые (size-dependent) модели стержней. Для построения подобных моделей использовалась градиентная теория упругости [1], которая полностью характеризуется плотностью энергии деформаций:

$$w(\varepsilon_{ij}, \kappa_{ijk}) = C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} + A_{ijklmn}\kappa_{ijk}\kappa_{lmn},$$

где C_{ijkl} и A_{ijklmn} — соответственно тензор модулей классической теории упругости и тензор шестого ранга градиентных модулей, $\varepsilon_{ij} = \dfrac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2}$ — тензор малых деформаций упругого тела, $u_i(x_i)$ — вектор перемещений точки тела с координатами x_i; $k_{ijk} = \varepsilon_{ij,k}$ — тензор градиентов деформаций. Определяющие соотношения для тензора напряжений Коши σ_{ij} и тензора градиентных напряжений μ_{ijk} определяются формулами Грина

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial w}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \lambda\theta\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij},$$

$$\mu_{ijk} = A_{ijklmn}\kappa_{lmn}.$$

Математическая постановка градиентной теории упругости в общем случае полностью определяется вариационным принципом Лагранжа $\delta L = \delta A - \delta W = 0$, где $W = \int wdV$ — полная энергия деформаций и $A = \int f_i\delta R_i dV + \iint(t_i u_i + q_i\delta(u_{i,j}n_j))dS$ — работа внешних сил f_i, t_i и q_i, заданных в объёме тела V и на его поверхности S с внешней нормалью n_j. На основе вариационного подхода может быть получена следующая вариационная формулировка градиентной теории упругости [1, 2]:

$$\begin{gathered} -\int((\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k})_{,j} + f_i)\delta u_i dV + \\ +\iint((\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k})n_j - (\mu_{ijk}n_k)_{,j} + (\mu_{ijk}n_k n_p)_{,p}n_j - t_i)\delta u_i dS + \\ +\iint(\mu_{ijk}n_j n_k - q_i)n_l\delta u_{i,l}dS = 0. \end{gathered} \quad (1)$$

Обратим внимание, что уравнения равновесия и граничные условия, следующие из (1), записываются относительно так называемых полных напряжений $\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k}$, а не напряжений Коши σ_{ij}. В частности, если на части границы тела внешняя нагрузка отсутствует, то напряжения Коши σ_{ij} не равны нулю (нулю оказываются равны только выражения вида

$$(\sigma_{ij} - \mu_{ijk,k})n_j - (\mu_{ijk}n_k)_{,j} + (\mu_{ijk}n_k n_p)_{,p}n_j,$$

которые, по сути, являются определением вектора напряжений на поверхности тела в градиентной теории).

Градиентные модели стержней строятся на основе кинематических гипотез, соответствующих кинематике стержней Бернулли:

$$u_1 = u(x) - zw'(x), \quad u_2 = 0, \quad u_3 = w(x).$$

Следовательно, можно записать ненулевые компоненты тензора деформаций и тензора градиентов деформаций:

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = u' - zw'', \quad \kappa_{111} = u'' - zw''', \\ \kappa_{113} = -w'', \quad \kappa_{311} = w''. \end{gathered} \quad (2)$$

Для корректной градиентной теории стержней [11] вариационная модель градиентной упругости (1) приводит с учётом кинематических соотношений (2) к следующей вариационной постановке:

$$\begin{gathered} \delta L = -\int_L (N' - N_h'' + f)\delta u dx - \\ - \int_L (M'' - M_h''' + p)\delta w dx + \\ + [(N - N_h' - F)\delta u + (N_h' - F_h)\delta u']\Big|_0^L + \\ + (M' - M_h'' - P)\delta w\Big|_0^L - (M - M_h' - M_0)\delta w'\Big|_0^L - \\ - (M_h - M_{h0})\delta w''\Big|_0^L = 0, \end{gathered} \quad (3)$$

где L — длина балки, $N(x) = EAu'(x)$ — классические нормальные напряжения, действующие в балке, $N_h(x) = l^2 EAu''(x)$ — продольные градиентные усилия, $N(x) - N_h'(x)$ — так называемые полные усилия, для которых в градиентной упругости выполняются уравнения равновесия, $M(x) = -EIw''(x)$ и $M_h(x) = -l^2 EIw'''(x)$ — классический и градиентный изгибающие моменты, действующие в сечениях балки, $A = bh$ — площадь прямоугольного поперечного сечения балки толщиной h и шириной b, E — модуль Юнга материала, l — масштабный параметр модели, определяемый по результатам испытаний, f, F, F_h — заданные распределённые и сосредоточенные классические и градиентные нагрузки, действующие в продольном направлении, p — распределённая поперечная нагрузка, P, M_0, M_{h0} — заданные поперечные сосредоточенные усилия, изгибающий момент и градиентный момент соответственно.

Отметим, что в градиентной теории упругости (3) число краевых условий больше, чем в классической теории, что позволяет более детально описать реальные условия закрепления. Статические "классические" граничные условия, стоящие в вариационном равенстве (3) при вариации перемещений, в случае рассматриваемой одномерной задачи для стержней формулируются на полные усилия $N(x) - N_h'(x)$ так же, как и уравнение равновесия. Таким образом, в градиентной теории стержней статическая краевая задача в градиентной упругости полностью эквивалентна классической постановке, будучи сформулированной для полных усилий.

В качестве примера рассмотрим две частные задачи: одноосное растяжение и трёхточечный изгиб стержня (рис. 1). В стандартных испытаниях, соответствующих этим задачам, образцы материала зажимаются в захватах (при растяжении) и располагаются на опорах (при изгибе). Условия контакта балки с захватами и опорами в классических балочных теориях ограничиваются заданием перемещений и усилий в граничных точках. В градиентной теории возможно дополнительно уточнить характер закрепления/нагружения балки.

В задаче о растяжении (рис. 1а) в соответствии с постановкой (3) рассмотрим граничные условия вида $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, $N(L) - N_h'(L) = F$, $u'(L) = 0$. Эти условия соответствуют запрещению перемещений одного конца балки ($x = 0$), нагружению силой на противоположном конце ($x = L$) и запрещению продольных деформаций балки $\varepsilon_{11} = u'$ на обоих концах (т.е. в точках закрепления $x = 0$ и $x = L$ используем дополнительные граничные условия градиентной теории, которые могут формулироваться и относительно деформаций согласно (3)). Заметим, что последнее ограничение, как правило, реализуется в стандартных испытаниях на растяжение. При этом противоречия со статическими условиями нагружения стержня растягиваемыми усилиями не возникают, так как эти условия формулируются в градиентной модели на полные напряжения $N(x) - N_h'(x)$.

Решение сформулированной задачи в градиентной теории находится аналитически. Распределение продольного усилия, соответствующего напряжениям Коши, по длине стержня определяется выражением

$$N(x) = F\left(1 - \frac{\operatorname{ch}(\bar{L} - \bar{x})}{\operatorname{ch}\bar{L}}\right), \qquad (4)$$

где $\bar{L} = \dfrac{L}{2l}$ и $\bar{x} = \dfrac{x}{l}$ и учтено, что погонная нагрузка f отсутствует.

Для случая трёхточечного изгиба (рис. 1б) удобно решать задачу для половины балки с учётом симметрии и использовать граничные условия вида

$$w(0) = 0, \quad M(0) - M_h'(0) = 0, \quad M_h(0) = 0,$$
$$M'\left(\frac{L}{2}\right) - M_h''\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{P}{2}, \quad w'\left(\frac{L}{2}\right) = 0,$$
$$M_h\left(\frac{L}{2}\right) = 0.$$

В этих граничных условиях задаётся отсутствие прогиба, обобщённого момента и градиентного момента на свободном конце балки. В центре балки задаются перерезывающее усилие, отсутствие углов поворота и отсутствие градиентного момента. Решение задачи (2), (3) с указанными граничными условиями в градиентной упругости также легко находится аналитически. Для изгибающего момента

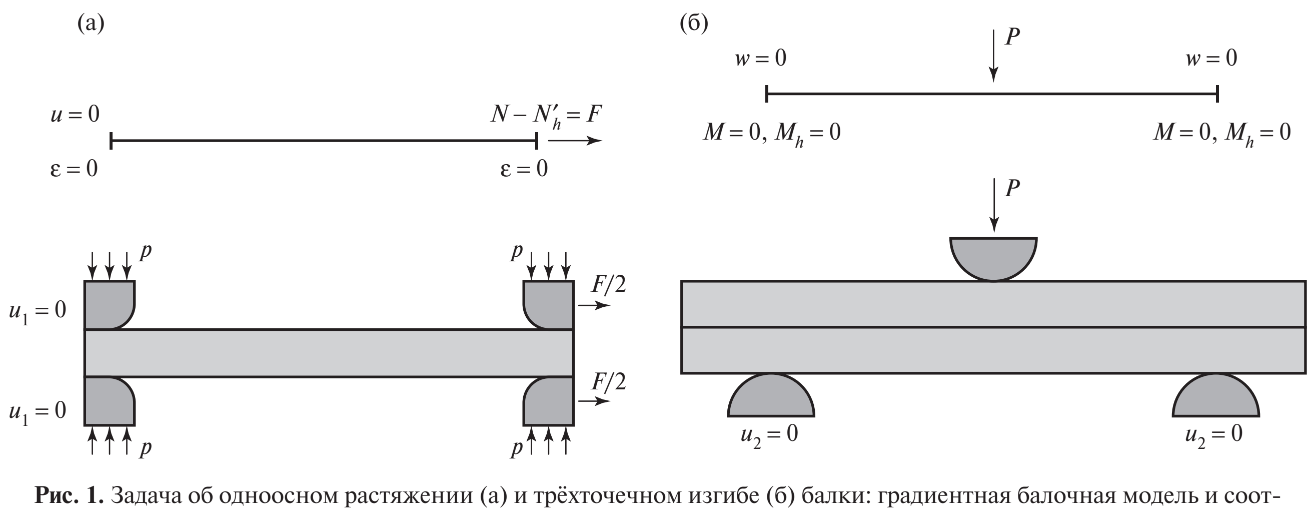

Рис. 1. Задача об одноосном растяжении (а) и трёхточечном изгибе (б) балки: градиентная балочная модель и соответствующая классическая конечно-элементная модель.

и перерезывающей силы на рассматриваемом участке балки $x \in \left[0,\ \frac{L}{2}\right]$ получаем

$$M(x) = -\frac{P}{2}\left(x + l\frac{\operatorname{sh}(\tilde{L} - \bar{x})}{\operatorname{ch}\tilde{L}}\right),$$
$$Q(x) = M'(x) = -\frac{P}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{ch}(\tilde{L} - \bar{x})}{\operatorname{ch}\tilde{L}}\right), \tag{5}$$

где $\tilde{L} = \frac{L}{4l}$ и учтено отсутствие распределённой поперечной нагрузки.

Отметим, что в пределе при $l \to 0$ решения (4), (5) совпадают с классическими решениями $N(x) = F$, $M(x) = -\frac{Px}{2}$, $Q(x) = -\frac{P}{2}$. Для ненулевых значений масштабного параметра l вблизи концов балки возникают экспоненциально затухающие составляющие решения, определяемые уточнённым описанием расширенного спектра краевых условий на концах стержня. Их можно трактовать как дополнительные краевые эффекты, протяжённость которых связана с параметром l.

Сопоставим решения (4), (5) с трёхмерным решением, полученным численно. Так как рассмотренная модель построена на основе классических гипотез Бернулли–Эйлера, то распределение напряжений по толщине балки в ней остаётся классическим, а градиентные эффекты дают уточнение решения только в направлении оси стержня [8–10]. Это упрощает анализ. Нормальные напряжения в задаче о растяжении стержня определяются отношением $\sigma_x = \sigma_{11} = \frac{N}{A}$. Касательные напряжения в задаче изгиба определяются по формуле $\tau_{xz} = \sigma_{13} = \frac{kQ}{A}$, где $k = \frac{3}{2}$ — поправочный коэффициент для определения максимальных касательных напряжений, действующих на нейтральной оси балки.

СРАВНЕНИЕ ГРАДИЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ С КЛАССИЧЕСКИМИ ТРЁХМЕРНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Сопоставим решения градиентной теории стержней с результатами конечно-элементного (КЭ) моделирования, реализованного в трёхмерной постановке. В численном моделировании учитывалось, что при растяжении балка зажимается в захватах (рис. 1а), длина которых d задавалась различной. Радиус скругления захватов составлял 5 мм для исключения сингулярности напряжений в решении контактной задачи. Захваты сжимают образец с поперечным усилием, величина которого составляла 1000 Н. В задаче изгиба образец располагался на опорах цилиндрической формы, диаметр которых составлял d и также варьировался. Материал балки — алюминий, материал захватов и опор — сталь. В конечно-элементном моделировании строилось решение контактной задачи с учётом трения (коэффициент трения 0,2), реализующегося между захватами/опорами и образцом.

На рис. 2 показано сопоставление балочного градиентного решения и численного моделирования. Для задачи растяжения (рис. 2а) показано распределение продольных нормальных напряжений, определённых на оси стержня вблизи закреплённого конца. Показаны значения напряжений, найденных в градиентной балочной модели и трёхмерном классическом конечно-элементном (КЭ) решении, нормированных на величину напряжений, определяемых “по сопромату”: $\sigma_0 = \frac{F}{A}$. В численном трёхмерном решении под захватами реализуется сложнонапряжённое состояние и распределение напряжений может значительно изменяться в зависимости от параметров модели (длина захватов, толщина балки, давление обжатия и т.д.), поэтому на рис. 2а показано распределение напряжений, которое реализуется вне захватов. Характер изменения напряжений в трёхмерном решении фактически определяется принципом Сен-Венана, в соответствии с которым все локальные эффекты от самоуравновешенной нагрузки экспоненциально затухают и на удалении от закрепления образца характер напряжённого состояния определяется только равнодействующей усилий. Как видно из приведённого сравнения (рис. 2а), поведение классического трёхмерного решения на оси стержня в зоне влияния локальных эффектов можно оценить, используя градиентное балочное решение. В отличие от классической балочной теории, которая даёт постоянное значение напряжений по всей длине балки, в градиентном решении напряжения, определяемые на оси стержня, вблизи торца затухают до нуля в соответствии с заданными граничными условиями. В трёхмерном решении аналогичный эффект соответствует тому, что вся нагрузка передаётся на образец через касательные напряжения, возникающие на границе контакта захватов и образца, а однородные нормальные продольные напряжения возникают только на некотором удалении от захватов. При этом полное напряжение, входящее в уравнение равновесия (3), полностью соответствует решению классической упругости, т.е. выполняется $N - N_h' \equiv F$. Скорость выхода напряжений на одно-

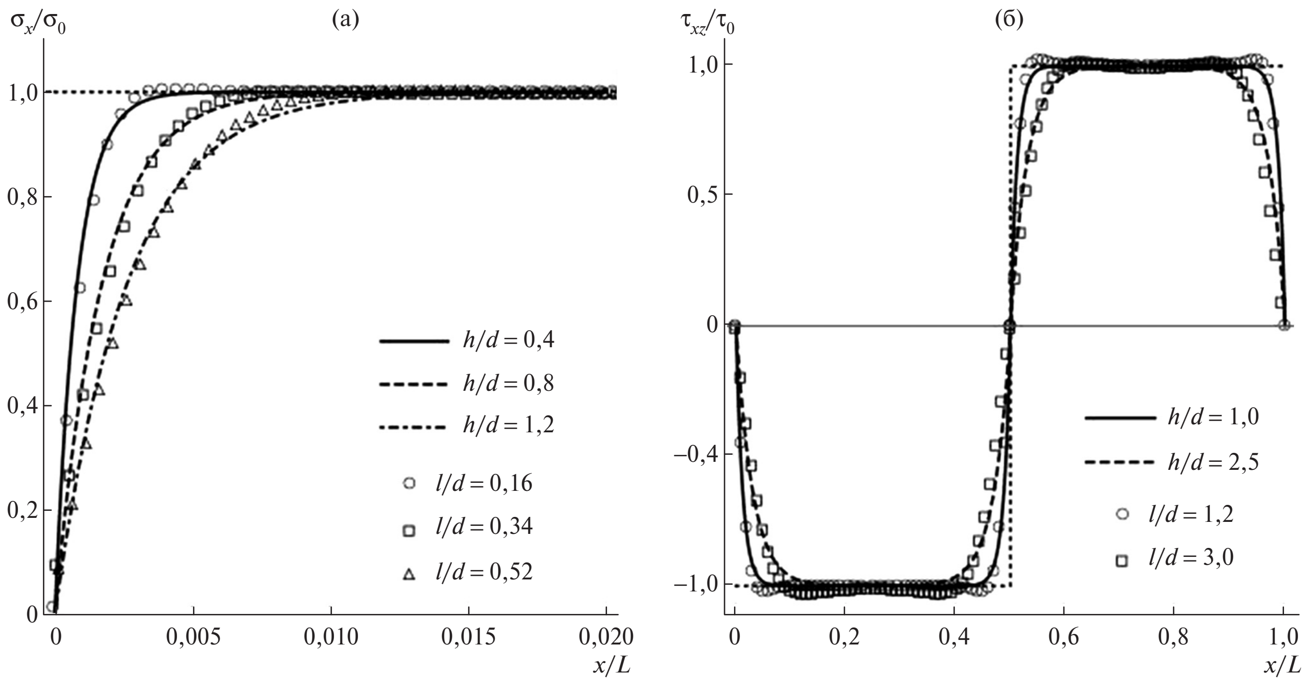

Рис. 2. Сопоставление градиентного балочного решения для напряжений Коши (линии) и классического трёхмерного моделирования (точки) в задаче о растяжении (а) и в задаче о трёхточечном изгибе балки (б). Классические балочные решения ($l = 0$) показаны пунктиром.

родное состояние определяется в трёхмерном классическом решении принципом Сен-Венана и зависит от коэффициента Пуассона материала балки и геометрии образца и захватов. В градиентной модели стержня эта изменяемость определяется масштабным параметром. Значение масштабного параметра предлагается подбирать, обеспечивая наилучшую согласованность трёхмерного и балочного решений. Как видно из рис. 2а, значение масштабного параметра определяется соотношением толщины балки и длины захватов d, увеличение которого приводит практически к пропорциональному увеличению отношения $\dfrac{l}{d}$. Отметим, что это полностью соответствует результатам, полученным в работе [4] в задаче о штампе с использованием градиентной теории упругости.

Корреляция между геометрическими параметрами трёхмерной модели и масштабным параметром градиентной балочной теории также видна для случая изгиба на рис. 2б. Здесь показано распределение касательных напряжений по длине балки на её нейтральной оси. Классическое балочное решение показано пунктиром: слева и справа от приложенной нагрузки реализуется постоянное значение перерезывающего усилия и соответственно касательных напряжений $\tau_0 = \pm\dfrac{3P}{4bh}$. Под приложенной сосредоточенной нагрузкой в классическом балочном решении реализуется скачок касательных напряжений. В трёхмерном классическом решении контактной задачи имеет место гладкое изменение напряжений. Такой же характер распределения напряжений реализуются в градиентной балочной модели. При этом сглаженный характер распределения напряжений и скорость их выхода на постоянное значение согласуются с трёхмерным решением при правильном выборе масштабного параметра. Показанные решения на рис. 2б получены для достаточно коротких балок $\left(\dfrac{L}{d} = 4,\ 10\right)$, для оценки прогибов которых, вообще говоря, необходимо привлекать теории более высокого порядка, например, модели балки типа Тимошенко. Однако решение для касательных напряжений для рассмотренной статически определимой задачи будет совпадать в моделях Бернулли—Эйлера и Тимошенко как в классической теории упругости, так и в градиентной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что градиентные модели позволяют получить уточнённую оценку для распределения напряжений вблизи зон закрепления и приложения нагрузки. В классических решениях балочных теорий в таких задачах реализуются негладкие решения со скачками в зоне действия сосредоточенных нагрузок и реакций опор. В градиентной теории стержней эти решения уточняются и оказываются сглаженными как для результирующих усилий и моментов, так и для напряжений, деформаций и перемещений. Выбором масштабного параметра градиентной модели удаётся получить согласованность градиентных решений, полученных в одномерном приближении, с трёхмерным классическим решением, найденным численно.

Очевидно, с другой стороны, что сравнения с трёхмерным решением могут быть полезными и для анализа допущений, которые делаются при построении прикладных градиентных теорий [11].

Следовательно, установлено, что масштабные эффекты, описываемые градиентной теорией, могут быть следствием не только микроструктурных характеристик материала. Они могут зависеть и от характеристик, определяющих условия нагружения и особенности конструктивного оформления закреплений, причём значения масштабных параметров зависят от этих характеристик. Полученный результат может быть полезен в прикладном отношении, если рассматривать градиентные модели как способ уточнения характера напряжённо-деформированного состояния материалов вблизи концентраторов и сосредоточенных нагрузок.

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18–31–20043).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mindlin R.D.* Micro-Structure in Linear Elasticity // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. V. 16. № 1. P. 51–78.
2. *Maranganti R.*, *Sharma P.* A Novel Atomistic Approach to Determine Strain-Gradient Elasticity Constants: Tabulation and Comparison for Various Metals, Semiconductors, Silica, Polymers and the (ir) Relevance for Nanotechnologies // J. of the Mechanics and Physics of Solids. 2007. V. 55. № 9. P. 1823–1852.
3. *Mousavi S.M.*, *Aifantis E.C.* Dislocation-Based Gradient Elastic Fracture Mechanics for In-Plane Analysis of Cracks // International J. Fracture. 2016. V. 202. № 1. P. 93–110.
4. *Васильев В.В.*, *Лурье С.А.* Новое решение осесимметричной контактной задачи теории упругости // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 5. С. 12–21.
5. *Reiher J.C.*, *Giorgio I.*, *Bertram A.* Finite-Element Analysis of Polyhedra Under Point and Line Forces in Second-Strain Gradient Elasticity // J. Engineering Mechanics. 2016. V. 143. № 2. P. 04016112.
6. *Andreaus U.*, *et al.* Numerical Simulations of Classical Problems in Two-Dimensional (non) Linear Second Gradient Elasticity // Intern. J. Engineering Science. 2016. V. 108. P. 34–50.
7. *Васильев В.В.*, *Лурье С.А.*, *Салов В.А.* Исследование прочности пластин с трещинами на основе критерия максимальных напряжений в масштабно-зависимой обобщённой теории упругости // Физическая мезомеханика. 2018. Т. 21. № 4.
8. *Lurie S.A.*, *et al.* Do Nanosized Rods Have Abnormal Mechanical Properties? On Some Fallacious Ideas and Direct Errors Related to the Use of the Gradient Theories for Simulation of Scale-Dependent Rods // Nanoscience and Technology: An International J. 2016. V. 7. № 4.
9. *Ломакин Е.В. и др.* Полуобратное решение задачи чистого изгиба балки в градиентной теории упругости: отсутствие масштабных эффектов // ДАН. 2018. Т. 479. № 4. С. 390–394.
10. *Lurie S.*, *Solyaev Y.* Revisiting Bending Theories of Elastic Gradient Beams // Intern. J. Engineering Science. 2018. V. 126. P. 1–21.
11. *Dell'Isola F.*, *Sciarra G.*, *Vidoli S.* Generalized Hooke's Law for Isotropic Second Gradient Materials // Proc. Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2009. V. 465. № 2107. P. 2177–2196.

ON THE REFINED STRESS ANALYSIS IN THE APPLIED ELASTICITY PROBLEMS ACCOUNTING OF GRADIENT EFFECTS

Corresponding Member of the RAS E. V. Lomakin[1,2], S. A. Lurie[2,3], L. N. Rabinskiy[2], Y. O. Solyaev[2,3]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[2] *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*
[3] *Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

Received September 19, 2019

The paper proposes an extension of the approaches of gradient elasticity of deformable media, which consists in using the fundamental property of solutions of the gradient theory — the smoothing of singular solutions of the classical theory of elasticity, converting them into a regular class not only for the problems of micromechanics, where the length scale parameter is of the order of the material's characteristic size, but for "macromechanical" problems. In these problems, the length scale parameter, as a rule, can be found from the macro-experiments or numerical experiments and does note have an extremely small values. It is shown, by attracting numerical three-dimensional modeling, that even one-dimensional gradient solutions make it possible to clarify the stress distribution in the constrained zones of the body and in the area of the loads application. It is shown that additional length scale parameters of the gradient theory are related with specific boundary effects and can be associated with structural geometric parameters and loading conditions that determine the features of the classical three-dimensional solution.

Keywords: second gradient elasticity, Bernoulli–Euler beam, stress state, support conditions, local effects.