ИЗВЕСТИЯ РАН. ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ И ОКЕАНА, 2025, том 61, № 1, с. 86–99

УДК 551.511

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНТЕНСИВНЫХ АТМОСФЕРНЫХ ВИХРЕЙ

© 2025 г. М. В. Курганский[a, *], Ю. И. Ярынич[a, b, c]

[a]Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН, Пыжевский пер., 3, стр. 1, Москва, 119017 Россия

[b]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Научно-исследовательский вычислительный центр, Ленинские Горы, 1, стр. 4, Москва, 119991 Россия

[c]Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Географический факультет, Ленинские Горы, 1, Москва, 119991 Россия

*e-mail: kurgansk@ifaran.ru

Поступила в редакцию 23.05.2024 г.
После доработки 20.10.2024 г.
Принята к публикации 15.11.2024 г.

Исследовано двухпараметрическое семейство вихрей, в которых движение воздуха вблизи оси вихря отличается от твердотельного вращения, и тангенциальная скорость возрастает по степенному закону. Показано, что такие вихри удовлетворяют уравнению баланса углового момента, дополненному моделью турбулентной вязкости, включающей как традиционный механизм вихревой вязкости, так и механизм отрицательной диффузии углового момента в вихре. Особое внимание уделено восстановлению радиального профиля падения давления в вихре в явном аналитическом виде. Приведены примеры двухпараметрического представления вихрей как для дискретных, целочисленных значений параметров, так и для непрерывного спектра их изменений. Полученные результаты применены к суперячейковым смерчам (торнадо). Показано, что ширина полосы на поверхности земли, заметаемой вихрем при его перемещении, и определяемая из условия, что ветер имеет ураганную силу, систематически уменьшается, когда движение воздуха вблизи оси вихря отклоняется от твердотельного вращения. Использование нисходящего потока спиральности в вихре как меры интенсивности торнадо, а также в определенной степени их «разрушительной силы», подтверждает эти результаты. Обсужден вопрос о наилучшей аппроксимации в рамках обобщенного двухпараметрического семейства вихрей радиального профиля тангенциальной скорости в известном вихре Салливана.

Ключевые слова: интенсивные атмосферные вихри, пыльные вихри, смерчи, торнадо, турбулентная вязкость, диффузия углового момента, поток спиральности, вихрь Салливана

DOI: 10.31857/S0002351525010062, **EDN:** HFCFED

1. ВВЕДЕНИЕ

Встречающиеся в природе интенсивные атмосферные вихри конвективной природы, которые принадлежат к числу опасных метеорологических явлений, имеют различную морфологию [Stull, 2011]. В частности, пыльные вихри и смерчи (торнадо) часто бывают узкими и сосредоточенными, имеющими радиальный профиль тангенциальной скорости, который отвечает известной модели вихря Рэнкина (или, возможно более точно, модели вихря Бюргерса–Ротта [Burgers, 1948; Rott, 1958]). В работе [Vatistas et al., 1991] было введено однопараметрическое семейство вихрей, один из представителей которого имеет радиальный профиль скорости, очень близкий к вихрю Бюргерса–Ротта, и, что замечательно, в отличие от вихря Бюргерса–Ротта радиальный профиль давления в вихре Ватистаса дается аналитической формулой, допускающей практические использования [Lorenz, 2014]. Однако определенная часть пыльных вихрей и смерчей (торнадо) имеет структуру, не описываемую указанными выше моделями. Это более широкие и возможно двухячеистые вихри, в которых поле скорости в вихревом ядре существенно отклоняется от поля скорости, отвечающего твердотельному вращению. При этом тангенциальная скорость имеет тенденцию сосредотачиваться на границе вихревого ядра, где она максимальна. Попытка описать такие вихри путем модификации вихря Рэнкина была сделана в [Kurgansky et al., 2016], и непрерывный аналог этого модифицированного вихря Рэнкина исследовался в [Курганский, 2023]. В данной работе предлагается синтез указанных выше подходов. Именно исследуется двухпараметрическое семейство вихрей, обобщающее однопараметрическое семейство вихрей Ватистаса [Vatistas et al., 1991], на случай учета отклонений вращения воздуха от твердотельного в окрестности оси вихря. Имеющее сходную цель обобщение вихря Ватистаса было предложено в [Wood and White, 2011]. Однако исследуемое в данной работе двухпараметрическое семейство вихревых решений отличается от трехпараметрического семейства вихрей, предложенных в [Wood and White, 2011], тем, что ставится условие потенциальности потока на бесконечности. Это условие является определенной идеализацией, поскольку в реальных условиях радиальный профиль азимутальной скорости в периферийной части вихря иногда отклоняется от закона r^{-1}, отвечающего безвихревому потоку, но оно позволяет представить наше двухпараметрическое семейство вихрей, как решения уравнения баланса углового момента с двумя коэффициентами вихревой вязкости, первый из которых — это традиционный коэффициент вихревой вязкости, а второй призван описывать диффузию удельного углового момента. Кроме того, в отличие от [Wood and White, 2011; Wood and Brown, 2011] в данной работе сделан акцент на расчетах радиального профиля падения давления в вихре, с целью получения явных аналитических формул, допускающих практическое использование.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВИХРЯ

Вертикальные конвективные вихри, такие как пыльные вихри и смерчи (торнадо), сосуществуют с турбулентным атмосферным пограничным слоем, в который они погружены. Чтобы адекватно описать радиальный перенос углового момента в вихрях, в [Bretherton and Turner, 1968] предложено выделить в турбулентности (а) элементы, переносящие относительную завихренность, и (б) элементы, переносящие угловой момент; см. также [McEwan, 1973]. Перенос углового момента связывается при этом с отличиями в среднеквадратических значениях радиальной и азимутальной компонент скорости турбулентных движений, т.е. в определенной степени с анизотропией турбулентного переноса. В предположении, что вихри однородны в аксиальном (вертикальном) направлении, указанные авторы рассматривали следующее уравнение баланса углового момента

$$r^2\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}+ur\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}\,r)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left\{\nu_T r^3\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{v}}{r}\right)+\chi_T r\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}\,r)\right\}. \quad (1)$$

Здесь $\nu_T > 0$ — традиционный коэффициент вихревой вязкости, в то время как χ_T описывает диффузию удельного углового момента. Используются цилиндрические координаты (r, θ, z), где r — расстояние до оси вихря и z — высота над поверхностью земли $z = 0$; предполагается азимутальная симметрия вихревого движения, т.е. независимость поля скорости от азимута θ; (u, v, w) — компоненты скорости, отвечающие координатам (r, θ, z). Уравнение (1) можно переписать в эквивалентном, но более удобном для дальнейшего виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{v}\,r)+u\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}\,r)=$$

$$=\nu_T r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}\,r)\right)+\chi_T\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}\,r)\right). \quad (2)$$

В [Bretherton and Turner, 1968; McEwan, 1973, 1976] полагалось, что $\chi_T > 0$. Мы же, следуя [Kurgansky et al., 2016], допускаем возможность отрицательных значений χ_T, т.е. отрицательной диффузии углового момента. Как это следует из (2), величина скорости диссипации кинетической энергии

$$D=r\left[\left(\nu_T+\chi_T\right)\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}\right)^2+\left(\nu_T-\chi_T\right)\frac{\mathrm{v}^2}{r^2}\right]$$

неотрицательна (см. Приложение А), если выполняются неравенства $\nu_T \geqslant \chi_T \geqslant -\nu_T$. Как следует из этих неравенств, коэффициент диффузии углового момента χ_T может, вообще говоря, иметь тот же порядок величины, что и коэффициент вихревой вязкости ν_T. Отметим, что положительные значения χ_T означают тенденцию к выравниванию углового момента в вихревом ядре. Этот случай будет кратко рассмотрен ниже и при этом — поскольку азимутальная скорость на оси вихря обязана обращаться в нуль — эта скорость растет с радиусом вблизи оси вихря быстрее, нежели скорость, отвечающая твердотельному вращению жидкости, т.е. радиальный профиль азимутальной скорости имеет выпуклость, направленную вверх. Напротив, отрицательные значения χ_T означают тенденцию к концентрации углового момента на границе вихревого ядра, когда азимутальная скорость растет с радиусом вблизи оси вихря медленнее, чем скорость, отвечающая твердотельному вращению жидкости, и соответствующий радиальный профиль азимутальной скорости имеет выпуклость, направленную вниз. Этот случай отрицательных значений χ_T наиболее интересен для приложений к интенсивным атмосферным вихрям и подробно разобран в данной работе.

В данной работе предлагается следующее двухпараметрическое аналитическое выражение для тангенциальной (азимутальной) скорости в вихре [ср. Курганский, 2023][1]

$$\mathrm{v}(r) = \frac{\mathrm{v}_m r^s / r_m^s}{\left(1 + r^{(1+s)n} / r_m^{(1+s)n}\right)^{1/n}}, \quad n \geq 1, \quad s \geq 1. \quad (3)$$

Формула (3) обобщает соответствующую формулу Ватистаса [Vatistas et al., 1991] на случай $s \neq 1$. Здесь, наряду с основными параметрами модели (n, s), двумя дополнительными параметрами являются величины r_m и v_m, и профиль скорости (3) может быть представлен в безразмерном виде

$$\overline{\mathrm{v}}(\overline{r}) = \frac{\overline{r}^s}{\left(1 + \overline{r}^{(1+s)n}\right)^{1/n}}, \quad n \geq 1, \quad s \geq 1, \quad (3')$$

где $\overline{r} = r/r_m$ и $\overline{\mathrm{v}} = \mathrm{v}/\mathrm{v}_m$. Чтобы v_m в точности отвечало максимуму скорости v_m^*, а r_m — расстоянию до центра вихря r_m^*, на котором этот максимум достигается, формулу (3′) надо брать в более сложном виде

$$\overline{\mathrm{v}}(\overline{r}) = \frac{\overline{r}^s}{\left[\frac{1}{s+1} + \frac{s}{s+1}\overline{r}^{(1+s)n}\right]^{1/n}}, \quad n \geq 1, \quad s \geq 1. \quad (3'')$$

Соответственно, в (3″) $\overline{r} = r/r_m^*$ и $\overline{\mathrm{v}} = \mathrm{v}/\mathrm{v}_m^*$. Однако использование (3″) несколько усложнило бы последующие выкладки, и вместо формулы (3″) мы в дальнейшем в основном используем формулы (3) и/или (3′).

Теперь из уравнения (2), взятого в стационарном случае, и формулы (3′) мы можем рассчитать радиальную скорость в вихре

$$u(\overline{r}) = \frac{(\nu_T + \chi_T)s - (\nu_T - \chi_T)}{r_m \overline{r}} - \frac{\nu_T + \chi_T}{r_m} \frac{(n+1)(s+1)\overline{r}^{(s+1)n-1}}{1 + \overline{r}^{(s+1)n}}. \quad (4)$$

Исключение особенности при $\overline{r} = 0$ в первых двух слагаемых в правой части (4) дает условие $s = (\nu_T - \chi_T)/(\nu_T + \chi_T)$, т.е. $\nu_T(s-1) + \chi_T(s+1) = 0$. Точно такое же условие было получено в [Kurgansky et al., 2016], когда искалось общее решение стационарного уравнения (1) при дополнительном требовании, что $u = 0$. Указанное решение имеет вид $\mathrm{v} = ar^{s_1} + br^{s_2}$, где $s_1 = -1$ отвечает безвихревому потоку, а $s_2 = (\nu_T - \chi_T)/(\nu_T + \chi_T)$ отвечает профилю скорости, отличному от твердотельного вращения; a и b — постоянные интегрирования, определяемые граничными условиями. На этой основе в [Kurgansky et al., 2016] был рассмотрен составной вихрь

$$\mathrm{v}(r) = \begin{cases} \mathrm{v}_m (r/r_m)^{s_2}, r \leq r_m \\ \mathrm{v}_m (r_m/r), r > r_m \end{cases},$$

обобщающий вихрь Рэнкина на случай $s_2 > 1$. В данной работе производится обобщение работ [Kurgansky et al., 2016; Курганский, 2023] на случай: (а) непрерывных профилей тангенциальной скорости (3) и/или (3′); (б) расчета полей радиальной и вертикальной скорости, которые в силу уравнения (2) отвечают профилю тангенциальной скорости (3) и/или (3′); (в) учета возможности различных комбинаций параметров (n, s) в (3) и/или (3′); (г) расчета радиального профиля падения давления в вихре с профилем тангенциальной скорости (3) и/или (3′), и (д) отбора

[1] Обзор точных решений уравнений гидродинамики, которые применяются при изучении интенсивных атмосферных вихрей дан в [Kurgansky et al., 2016; Вараксин, 2017; Онищенко и др., 2020].

случаев, когда этот профиль восстанавливается в явном аналитическом виде, допускающем практическое использование.

Учитывая, что $\chi_T = -v_T(s-1)/(s+1)$, и подставляя в (4), будем окончательно иметь

$$u(\bar{r}) = -\frac{\nu_T}{r_m} 2(n+1) \frac{\bar{r}^{(s+1)n-1}}{1+\bar{r}^{(s+1)n}}. \quad (5)$$

Теперь из условия несжимаемости $\partial(ur)/\partial r + \partial(wr)/\partial z = 0$ путем интегрирования по координате z с учетом условия непроницаемости поверхности земли $z = 0$[2] мы получаем

$$\frac{w}{z} = -\frac{1}{r_m}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}(u\bar{r})$$

и, подставляя (5), имеем

$$\frac{w}{z} = \frac{\nu_T}{r_m^2} 2n(n+1)(s+1) \frac{\bar{r}^{(s+1)n-2}}{\left(1+\bar{r}^{(s+1)n}\right)^2}. \quad (6)$$

Для интенсивных атмосферных вихрей безразмерный параметр $v_m r_m/\nu_T$ очень велик. Так, для смерчей (торнадо) удельный угловой момент $v_m r_m$ имеет порядок величины $10^3 - 10^4$ м^2 с$^{-1}$, в то время как для коэффициента вихревой вязкости v_T характерны значения порядка $10 - 10^2$ м^2 с$^{-1}$. Как это следует из соотношения $\chi_T = -\nu_T(s-1)/(s+1)$, отрицательный коэффициент диффузии углового момента имеет по модулю тот же порядок величины, что и ν_T. Поэтому, когда рассматриваются не очень большие высоты z над поверхностью земли, то $\left(\mathrm{v}_m r_m^2/\nu_T z\right)^2 >> 1$ и радиальное и вертикальное уравнения движения принимают с асимптотической точностью вид [ср. Vatistas et al., 1991]

$$-\frac{\mathrm{v}^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \qquad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

где ρ — считающаяся постоянной по величине плотность воздуха и p — давление. Так, из первого из этих уравнений, которое выражает условие циклострофического баланса, следует, что радиальный профиль падения давления в вихре $\Delta p(r) = p(r) - p(\infty)$ дается интегралом

$$\Delta p(r) = \Delta P \int\limits_{r^2/r_m^2}^{\infty} \frac{\xi^{s-1}}{\left(1+\xi^{\frac{s+1}{2}n}\right)^{2/n}} \mathrm{d}\xi, \quad \xi = \frac{r^2}{r_m^2} \equiv \bar{r}^2, \quad (7)$$

где $\Delta P = -\rho \mathrm{v}_m{}^2/2$.

Отметим, что профилю (3″) отвечают, соответственно, профили радиальной и аксиальной (вертикальной) скорости

$$u(\bar{r}) = -\frac{\nu_T}{r_m} 2(n+1) \frac{\bar{r}^{(s+1)n-1}}{s^{-1}+\bar{r}^{(s+1)n}},$$

$$\frac{w}{z} = \frac{\nu_T}{r_m^2} 2n(n+1)\left(\frac{s+1}{s}\right) \frac{\bar{r}^{(s+1)n-2}}{\left(s^{-1}+\bar{r}^{(s+1)n}\right)^2}.$$

При этом вновь выполняется исключающее особенность условие $\nu_T(s-1) + \chi_T(s+1) = 0$ и также необходимо помнить, что в только что выписанных формулах $\bar{r} = r/r_m^*$, где r_m^* — это радиус, на котором тангенциальная скорость максимальна.

3. ПРИМЕРЫ ВИХРЕЙ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ (n, s)

Примеры применения формул (5)–(7) для различных комбинаций целочисленных параметров (n, s) в (3) и/или (3′), когда выполняется вышеуказанное условие (д), даны ниже.

1. Случай $n = 1$, $s = 1$, $\chi_T = 0$ (см. [Fiedler, 1989]; в литературе такой вихрь также называют вихрем Скалли [Scully, 1975], хотя такая вихревая модель использовалась и в других работах).

$$\mathrm{v}(\bar{r}) = \frac{\bar{r}}{1+\bar{r}^2}, \qquad u(\bar{r}) = -4\frac{\nu_T}{r_m}\frac{\bar{r}}{1+\bar{r}^2},$$

$$\frac{w}{z} = \frac{\nu_T}{r_m^2}\frac{8}{\left(1+\bar{r}^2\right)^2}, \quad \Delta p(\bar{r}) = \Delta P\left(1+\bar{r}^2\right)^{-1};$$

$\Delta p(\bar{r}) = \frac{1}{2}\Delta P$, когда $\bar{r} = 1$; $\mathrm{v}(\bar{r}) = \max$, когда $\bar{r} = 1$.

2. Случай $n = 2$, $s = 1$, $\chi_T = 0$ [Vatistas et al., 1991].

$$\mathrm{v}(\bar{r}) = \frac{\bar{r}}{\sqrt{1+\bar{r}^4}}, \quad u(\bar{r}) = -\frac{6\nu_T}{r_m}\frac{\bar{r}^3}{1+\bar{r}^4},$$

$$\frac{w}{z} = \frac{24\nu_T}{r_m^2}\frac{\bar{r}^2}{\left(1+\bar{r}^4\right)^2}, \quad \Delta p(\bar{r}) = \Delta P\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\bar{r}^2\right)\right);$$

$\Delta p(\bar{r}) = \frac{1}{2}\Delta P$, когда $\bar{r} \approx 1.35$; $\mathrm{v}(\bar{r}) = \max$, когда $\bar{r} = 1$.

[2] На границе $z = 0$ используются условия проскальзывания.

3. Случай $n = 1$, $s = 3$, $\chi_T = -\frac{1}{2}\nu_T$ [Курганский, 2023].

$$\bar{v}(\bar{r}) = \frac{\bar{r}^3}{1+\bar{r}^4}, \qquad u(\bar{r}) = -\frac{4\nu_T}{r_m}\frac{\bar{r}^3}{1+\bar{r}^4},$$

$$\frac{w}{z} = \frac{16\nu_T}{r_m^2}\frac{\bar{r}^2}{\left(1+\bar{r}^4\right)^2}$$

$$\Delta p(\bar{r}) = \Delta P\frac{1}{2}\left(\frac{\bar{r}^2}{1+\bar{r}^4} + \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\bar{r}^2\right)\right);$$

$\Delta p(\bar{r}) = \frac{1}{2}\Delta P$, когда $\bar{r} \approx 1.27$; $\mathrm{v}(\bar{r}) = \max$,, когда $\bar{r} \approx 1.32$.

4. Случай $n = 2$, $s = 2$, $\chi_T = -\frac{1}{3}\nu_T$.

$$\bar{v}(\bar{r}) = \frac{\bar{r}^2}{\sqrt{1+\bar{r}^6}},$$

$$u(\bar{r}) = -\frac{6\nu_T}{r_m}\frac{\bar{r}^5}{1+\bar{r}^6}, \qquad \frac{w}{z} = \frac{36\nu_T}{r_m^2}\frac{\bar{r}^4}{\left(1+\bar{r}^6\right)^2},$$

$$\Delta p(\bar{r}) = \Delta P\left(\frac{1}{6}\ln\frac{\left(1+\bar{r}^2\right)^2}{1-\bar{r}^2+\bar{r}^4} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\left(\frac{2\bar{r}^2-1}{\sqrt{3}}\right)\right)\right);$$

$\Delta p(\bar{r}) = \frac{1}{2}\Delta P$, когда $\bar{r} \approx 1.39$; $\mathrm{v}(\bar{r}) = \max$, когда $\bar{r} \approx 1.12$.

Здесь учтено, что граница вихревого ядра в вихре (и зачастую то, что понимается под радиусом вихря), как правило, определяется в литературе двояким образом. Во-первых, как расстояние от центра вихря, на котором падение давления равняется половине падения давления в центре вихря. Во-вторых, как расстояние от центра вихря, на котором тангенциальная скорость в вихре достигает максимума. Как следует из указанных выше примеров, эти два определения идентичны лишь для вихря № 1. Интересно, что для вихрей № 2, 4 первое определение указывает на больший размер вихревого ядра, нежели второе определение, в то время как для вихря № 3 ситуация обратная, хотя при этом оба значения достаточно близки. Радиальные профили тангенциальной скорости и падения давления, отвечающие всем четырем вихрям, показаны соответственно на рис. 1 и 2.

В качестве приложения полученных результатов к такому особо опасному метеорологическому явлению, как суперячейковое торнадо, рассмотрим пример относительно небольшого по размерам, но интенсивного вихря, наблюдавшегося 22 мая 2004 г. в штате Небраска, США. Согласно (рис. 3 из [Wurman et al., 2021]), измеренная мобильным доплеровским радаром максимальная скорость ветра в торнадо равняется 72 мс$^{-1}$ (что отвечает категории интенсивности EF-4), диаметр вихря равен 151 м, и поэтому можно допустить, что

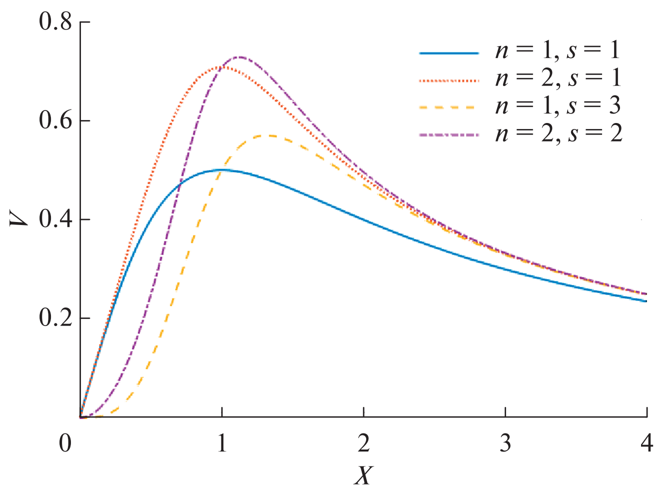

Рис. 1. График радиального профиля тангенциальной скорости в вихре № 1 (сплошная линия), вихре № 2 (точечная линия), вихре № 3 (штриховая линия) и вихре № 4 (штрихпунктирная линия) в координатах (X, V), где $X = \bar{r}$ и $V = \bar{v}(\bar{r})$

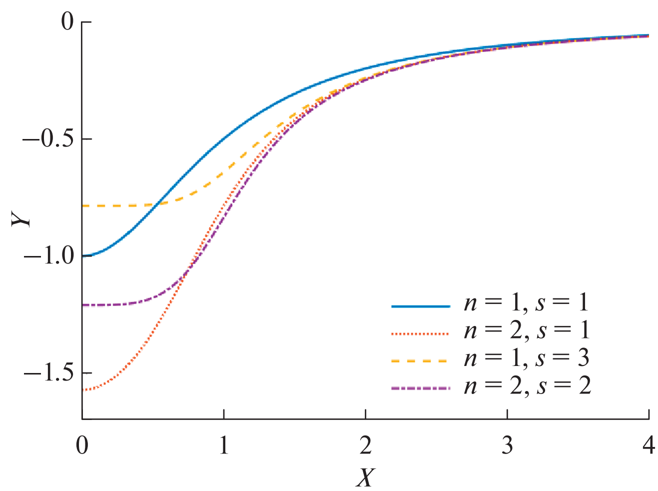

Рис. 2. График радиального профиля падения давления в вихре № 1 (сплошная линия), вихре № 2 (точечная линия), вихре № 3 (штриховая линия) и вихре № 4 (штрихпунктирная линия) в координатах (X, Y), где $X = \bar{r}$ и $Y = \Delta p(\bar{r})/|\Delta P|$

максимум скорости достигается на расстоянии 75.5 м от центра вихря. Считая, что основные разрушения вызываются при превышении скорости ветра порогового значения в 32.7 м · с$^{-1}$ (ветер ураганной силы), мы оцениваем ширину полосы разрушений, производимым этим торнадо при его перемещении по поверхности, для четырех выписанных выше моделей вихрей. Получаем, соответственно: 628.7 м (вихрь № 1, $r_m = 75.5$ м, $v_m = 72$ м · с$^{-1}$ · 2 = 144 м · с$^{-1}$), 467.5 м (вихрь № 2, $r_m = 75.5$ м, $v_m = 72$ м · с$^{-1}$ · 2$^{1/2}$ ≈ ≈ 101.8 м · с$^{-1}$), 438.8 м (вихрь № 3, $r_m = 75.5$ м / 1.32 ≈ 57.2 м, $v_m = 72$ м · с$^{-1}$/ 0.5699 ≈ 126.3 м · с$^{-1}$), 406.2 м (вихрь № 4, $r_m = 75.5$ м / 1.12 ≈ 67.4 м, $v_m = 72$м · с$^{-1}$ / 0.7274 ≈ 99.9 м · с$^{-1}$). Видна тенденция уменьшения этой ширины с увеличением индексов n и особенно s. Эта тенденция будет еще заметнее, если, например, рассмотреть вихрь с $n = 2$ и $s = 10$. Ширина полосы разрушений составляет при этом 348.7 м, что почти вдвое меньше, чем для вихря № 1. Это обстоятельство полезно иметь в виду при анализе разрушений, производимых торнадо.

В качестве альтернативной меры интенсивности торнадо (а также в определенной степени и их «разрушительной силы») рассмотрим введенный в [Курганский, 2008; см. также Курганский, 2017; Chkhetiani and Kurgansky, 2024], направленный вниз поток спиральности в вихре, равный по величине

$$S = \frac{8\pi}{3}\int_0^\infty \mathrm{v}^3(r)\,dr,$$

если только $\mathrm{v}^3 r \to 0$ при $r \to \infty$. Для вихря (3″) этот поток приобретает вид

$$S = \frac{8\pi}{3}\mathrm{v}_m^{*3} r_m^* \int_0^\infty \frac{\bar{r}^{3s}\,d\bar{r}}{\left[\frac{1}{s+1} + \frac{s}{s+1}\bar{r}^{(1+s)n}\right]^{3/n}}. \quad (8)$$

Напомним, что в выражении (8) v_m^* в точности отвечает максимуму скорости, а r_m^* — расстоянию до центра вихря, на котором этот максимум достигается.

Для рассматриваемых вихрей интеграл в выражении (8) выражается через бета-функцию $\mathrm{B}(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}dt}{(1+t)^{x+y}}$, связанную с гамма-функцией посредством соотношения $\mathrm{B}(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$. При этом

$$x = \frac{3s+1}{n(s+1)}, \quad y = \frac{2}{n(s+1)}, \quad x + y = \frac{3}{n}.$$

В табл. 1 показаны рассчитанные значения коэффициента $\kappa = \kappa(n, s)$ в выражении для потока спиральности

$$S = \kappa(n,s)\pi \mathrm{v}_m^{*3} r_m^* \quad (9)$$

для пяти различных вихрей. Первые четыре вихря близко соответствуют вихрям № 1–4, пятый вихрь отвечает $n = 2$, $s = 10$. Отметим, что для вихрей № 1, 2 интеграл в выражении (8) берется и элементарными средствами. Из табл. 1 видна превосходная корреляция вычисленных значений κ с вышеприведенными значениями ширины полосы, заметаемой ветром ураганной силы.

Поток спиральности (8) пропорционален произведению куба максимальной скорости ветра v_m^{*3} на ширину полосы $W = 2r_m^*$, заметаемой максимальным ветром при перемещении вихря. Имеются основания полагать, что W в целом растет с увеличением v_m^*, хотя точный закон, по которому это происходит, не вполне ясен. Очевидно только, что поток спиральности (8) в среднем растет с ростом v_m^* сильнее, чем по кубическому закону. Однако обнаруживаемая в табл. 1 изменчивость коэффициента $\kappa(n, s)$ формуле (9) несколько смягчает этот рост, если допустить, что самые сильные торнадо характеризуются меньшими значениями $\kappa(n, s)$ по сравнению с более слабыми торнадо, что отражает определенные изменения в структуре поля скорости ветра в них.

Таблица 1. Зависимость коэффициента K(n, s) от параметров вихревой модели (n, s) в формуле (9) для нисходящего вертикального потока спиральности. Значения K(n, s) указаны приближенно, с двумя знаками после запятой

(n, s)	(1, 1)	(2, 1)	(1, 3)	(2, 2)	(2, 10)
$\kappa(n, s)$	5.33	3.77	3.22	2.88	1.81

4. НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР ВИХРЕВЫХ РЕШЕНИЙ

Помимо указанных в предыдущем разделе примеров дискретных, целочисленных значений параметров (n, s) в (3) и/или (3′), когда выполняется условие (д) из Раздела 2, имеется также непрерывный спектр значений этих параметров, когда указанное условие заведомо выполнено.

Исходим из соотношения (7), тождественно переписываем его в виде

$$\Delta p\left(r\right)=\frac{\Delta P}{s}\int\limits_{r^2/r_m^2}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\left(1+\xi^{s}\right)}{\left(1+\xi^{\frac{s+1}{2}n}\right)^{2/n}}.$$

Этот интеграл элементарно берется, когда $s=$ $=(s+1)n/2$, т.е. $n=2s/(s+1)$. Получаем

$$\Delta p\left(\overline{r}\right)=\Delta P\left(1+\xi^{s}\right)^{-1/s}\Big|_{\overline{r}^2}^{\infty}=\frac{\Delta P}{\left(1+\overline{r}^{2s}\right)^{1/s}}.$$

Соответствующее поле скорости в вихре имеет вид

$$\overline{\mathrm{v}}\left(\overline{r}\right)=\frac{\overline{r}^{s}}{\left(1+\overline{r}^{2s}\right)^{\frac{s+1}{2s}}},$$

$$u\left(\overline{r}\right)=-2\left(\frac{3s+1}{s+1}\right)\frac{\nu_T}{r_m}\frac{\overline{r}^{2s-1}}{1+\overline{r}^{2s}},$$

$$\frac{w}{z}=4s\left(\frac{3s+1}{s+1}\right)\frac{\nu_T}{r_m^2}\frac{\overline{r}^{2s-2}}{\left(1+\overline{r}^{2s}\right)^2}.$$

При этом напоминаем, что $\chi_T=-\nu_T(s-1)/(s+1)$.

Получаем непрерывный спектр аналитических решений. Он, например, включает частный случай $s=3$, $n=6/4=1.5$. В пределе $s\to 1+0$ получаем лоренцевский профиль давления, отвечающий вихрю Фидлера ($n=1$, вихрь № 1). В противоположном пределе $s\to\infty$ получаем полый вихрь (hollow vortex). При этом формально $n\to 2-0$. В итоге получается, что имеется как дискретный, целочисленный, спектр аналитических решений для профиля давления, так и указанный выше непрерывный спектр. В данной работе мы ограничиваемся рассмотрением значений n, принадлежащих отрезку [1, 2], включая его граничные точки.

Наконец отметим, что выше систематически рассматривался случай $s\geqslant 1$, когда коэффициент диффузии углового момента $\chi_T\leqslant 0$. Однако, с теоретической точки зрения заслуживает определенного внимания и допустимый диапазон значений $0<s<1$, когда $\nu_T>\chi_T>0$ и $\chi_T\to\nu_T-0$ при $s\to 0$. Сказанное следует из условия $\nu_T(s-1)+\chi_T(s+1)=0$, исключающего особенность в $u(r)$ при $r=0$, так что $\chi_T=-\nu_T(s-1)/(s+1)$. При $n=1$ и $0<s<1$ наблюдается концентрация восходящих движений вблизи оси вихря с особенностью при $r=0$, которая, впрочем, является интегрируемой. В частности, при $s=\frac{1}{2}$ ($\chi_T=\frac{1}{3}\nu_T$) имеем, что $u\propto -r^{1/2}$ и $w\propto r^{-1/2}$ при $r\to 0$; см. уравнения (5) и (6). Однако при $n=2$ эта особенность исчезает, и при $s=\frac{1}{2}$ получаем, что $u\propto -r^2$ и $w\propto r$ при $r\to 0$.

5. АППРОКСИМАЦИЯ ВИХРЯ САЛЛИВАНА

При $n=2$ существует также счетное множество значений s, когда возможно явное аналитическое представление радиального профиля падения давления в вихре. К рассмотрению особого представителя этого множества мы сейчас и переходим. Для этого берем двухпараметрический профиль скорости в виде (3′) и рассматриваем его обобщение

$$\overline{\mathrm{v}}\left(\overline{r}\right)=\frac{\overline{r}^{s}}{\left(c+\overline{r}^{(1+s)n}\right)^{1/n}},\quad n\geq 1,\quad s\geq 1,\quad c>0.\quad(10)$$

Максимум в профиле скорости (10) достигается при $\overline{r}^{(1+s)n}=cs$. Это уравнение имеет два класса решений. Во-первых, это в определенном смысле тривиальное решение $\overline{r}=1$, когда $c=1/s$, и три свободных параметра n, s и c в вихревой модели (10) сводятся к двум свободным параметрам: n и s. Поскольку формулу (3″) можно эквивалентным образом переписать в виде

$$\overline{\mathrm{v}}\left(\overline{r}\right)=\frac{\overline{r}^{s}}{\left(\frac{s}{s+1}\right)^{1/n}\left(s^{-1}+\overline{r}^{(1+s)n}\right)^{1/n}},$$

то в этом случае модель (10) подобна модели (3″) за одним исключением, что максимум скорости в (3″) больше чем в (10) в $\left(1+s^{-1}\right)^{1/n}$ раз, т.е. в модели (3″) $\overline{\mathrm{v}}_{\max}=1$, а в модели (10) $\overline{\mathrm{v}}_{\max}=\left(1+s^{-1}\right)^{-1/n}$. Второй класс решений дается формулой $\overline{r}=\left(cs\right)^{\frac{1}{(1+s)n}}$.

Здесь в задаче имеется три свободных параметра n, s и c. При этом максимальное значение скорости равно $\overline{v}_{max} = s^{\frac{s}{(1+s)n}} A^{-\frac{1}{(1+s)n}} \left(1+s\right)^{-1/n}$. Когда $c = 1/s$, естественно получается предыдущий результат, что $\overline{v}_{max} = \left(1+s^{-1}\right)^{-1/n}$.

Радиальная и аксиальная компоненты скорости для вихря (10) даются, соответственно, выражениями

$$u\left(\overline{r}\right) = -\frac{\nu_T}{r_m} 2\left(n+1\right) \frac{\overline{r}^{(s+1)n-1}}{c+\overline{r}^{(s+1)n}},$$

$$\frac{w}{z} = \frac{\nu_T}{r_m^2} 2n\left(n+1\right)\left(s+1\right) c \frac{\overline{r}^{(s+1)n-2}}{\left(c+\overline{r}^{(s+1)n}\right)^2}. \qquad (11)$$

При этом вновь выполняется калибровочное соотношение $\chi_T = -\nu_T(s-1)/(s+1)$.

Замечательным свойством вихря Ватистаса [Vatistas et al., 1991], когда $n = 2$ и $s = 1$ в (3) и (3′), является то, что он очень хорошо аппроксимирует радиальный профиль азимутальной скорости в вихре Бюргерса–Ротта, но в отличие от последнего допускает простую аналитическую формулировку радиального профиля падения давления в вихре. Эти две вихревые модели наилучшим образом соответствуют узким, сосредоточенным вихрям. Для аппроксимации профиля тангенциальной скорости в широких, возможно двухячейковых, вихрях в литературе обсуждается вихревая модель Салливана [Sullivan, 1959], которая так же, как и модель вихря Бюргерса–Ротта, является точным решением уравнений Навье–Стокса, но которая ввиду своей аналитической сложности не нашла широких практических применений [ср. Kurgansky et al. 2016]. Поэтому актуальной задачей может служить поиск наилучшей аппроксимации к вихрю Салливана, в рамках которой возможна достаточно простая аналитическая формулировка радиальных профилей тангенциальной скорости и падения давления в вихре. Такая задача (применительно к профилю скорости) рассматривалась в [Wood and White, 2011; Wood and Brown, 2011]. В данной работе рассматривается семейство решений (9), которое отличается от семейства вихревых решений, рассмотренных в [Wood and White, 2011; Wood and Brown, 2011], тем, что с самого начала ставится условие потенциальности потока на бесконечности.

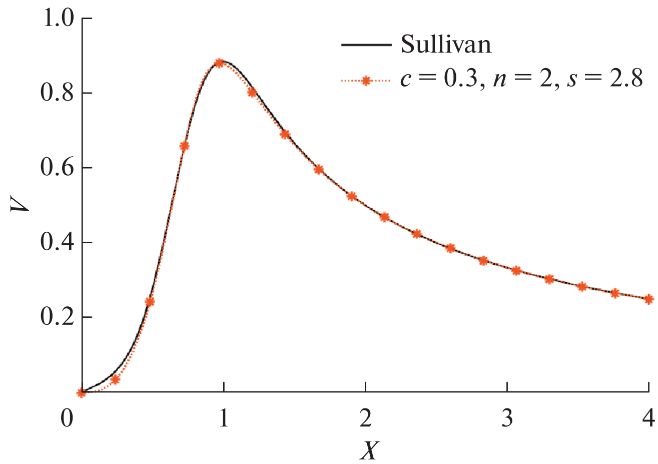

Рис. 3. Графики радиального профиля тангенциальной скорости для (а) вихря Салливана, и (б) вихря с $n = 2$, $s = 2.8$, $c = 0.3$ в координатах (X, Y), где $X = \overline{r}$ и $V = \overline{v}\left(\overline{r}\right)$

Путем варьирования свободных параметров s и c в (10) при фиксированном параметре $n = 2$ было найдено, что наиболее близкое соответствие с вихрем Салливана достигается при $s = 2.8$, $c = 0.3$ (рис. 3). Результат был получен путем использования нелинейного метода наименьших квадратов с алгоритмом отражения доверительных подпространств (Trust Region Reflective) [Coleman and Li, 1996], выбранного вследствие наличия определённого подпространства признаков s и c, на котором имеет смысл оптимизация функции[3]. Отметим, что в наших обозначениях радиальный профиль тангенциальной скорости в работе (Wood and Brown, 2011), который наилучшим образом соответствует вихрю Салливана, имеет вид $\overline{v}\left(\overline{r}\right) = \overline{r}^{2.4}\left[0.3 + 0.7\,\overline{r}^{7.89}\right]^{-0.435}$, т.е. он достаточно близок к найденному нами «оптимальному» профилю скорости $\overline{v}\left(\overline{r}\right) = \overline{r}^{2.8}\left[0.3 + \overline{r}^{7.6}\right]^{-0.5}$.

Отметим, что если кривая с $n = 2$, $s = 2.8$, $c = 0.3$ в целом хорошо аппроксимирует решение Салливана, то имеются отличия при малых радиусах. Это объясняется тем, что вихрь Салливана является точным решением уравнений Навье–Стокса, а фундаментальным свойством ньютоновской вязкости является ее обращение в нуль на твердотельном вращении жидкости, что как раз

[3] Более точное решение с 4-мя знаками после запятой имеет вид: $s = 2.7605$, $c = 0.3017$ (на промежутке $\overline{r} \in [0, 2.2]$). В тексте использованы округленные значения $s = 2.8$ и $c = 0.3$, чтобы обеспечить эффективное вычисление радиального профиля падения давления в явном виде.

и реализуется в окрестности оси вихря. В то же время, формулы (3), (3′), (10) и (11) согласуются с моделью вихревой вязкости, характеризуемой двумя коэффициентами вязкости, где первый коэффициент $\nu_T > 0$ — это традиционный коэффициент вихревой вязкости, а второй коэффициент χ_T описывает (отрицательную) диффузию удельного углового момента. Указанный вязкий оператор обращается в нуль на вращении жидкости, отличном от твердотельного. Второе отличие заключается в том, что в противоположность двухячейковому вихрю Салливана, наше решение является одноячейковым. Это может быть обусловлено также тем, что в отличие от вихря Салливана наше решение удовлетворяет лишь приближенной (асимптотически точной) системе уравнений движения[4]. При этом радиальная и вертикальная компоненты скорости выражаются формулами (11), где надо положить $n = 2$, $s = 2.8$, $c = 0.3$. Отметим, что в данном случае $\chi_T = -\frac{9}{19}\nu_T$.

В общем случае, когда $n = 2$ и $s = p/q$ — рациональное число, где p и q взаимно простые натуральные числа (заметим, что любое вещественное число может быть с наперед заданной точностью аппроксимировано рациональным числом), радиальный профиль падения давления в вихре может быть вычислен в явной аналитической форме, если только p и q находятся в определенном соотношении (см. Приложение Б). Разумеется, предлагаемый метод наиболее эффективен, когда p и q — относительно небольшие взаимно простые натуральные числа. В рассмотренном выше случае, когда $p = 14$ и $q = 5$, решение дается выражением (Б.1), и график радиального профиля падения давления в вихре представлен на рис. 4. Нормированное падение давления в центре вихря равно $\overline{\Delta p(0)} \equiv \Delta p(0)/|\Delta P| \approx -1.54$ (ср. рис. 4), и радиус вихря, определенный как расстояние до центра, где падение давления составляет половину падения давления в центре вихря, равняется $r = 1.12$. В то же время, радиус вихря, определенный из условия, что тангенциальная скорость максимальна, равен $\overline{r} = (cs)^{\frac{1}{(1+s)n}} \approx 0.98$. Как и для вихрей № 2, 4 (см. выше), первое определение указывает на больший размер вихревого ядра, нежели второе определение.

[4] Уравнение баланса углового момента и уравнение неразрывности выполняются точно, а радиальное и вертикальное уравнения движения — с асимптотической точностью.

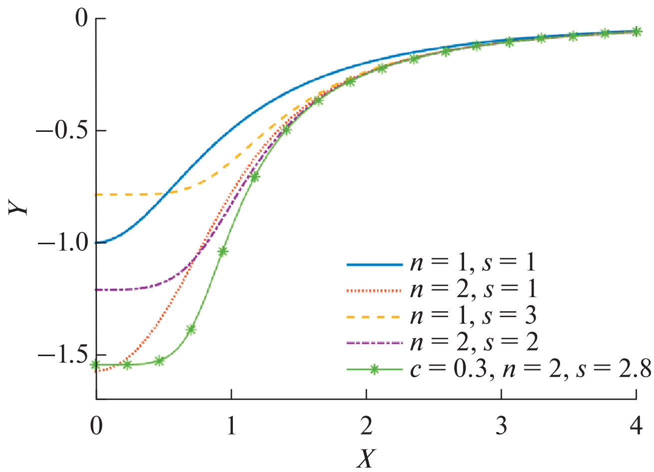

Рис. 4. Сводный график радиального профиля падения давления в вихре № 1 (сплошная линия), вихре № 2 (точечная линия), вихре № 3 (штриховая линия), вихре № 4 (штрихпунктирная линия) и вихре с $n = 2$, $s = 2.8$, $c = 0.3$ (линия со звездочками) в координатах (X, Y), где $X = \overline{r}$ и $Y = \Delta p\left(\overline{r}\right)/|\Delta P|$

Оценивая ширину полосы, заметаемой рассмотренным в Разделе 3 торнадо [Wurman et al., 2021], которая определяется из условия, что ветер в вихре имеет как минимум ураганную силу, и беря профиль тангенциальной скорости (10) с $n = 2$, $s = 2.8$, $c = 0.3$, аппроксимирующий профиль скорости в вихре Салливана, получаем ширину полосы в 387.3 м, что меньше соответствующей величины для вихря Фидлера (вихрь № 1) и для вихря Ватистаса (вихрь № 2), а следовательно, и для вихря Бюргерса–Ротта, и полностью подтверждает выводы Раздела 3. Расчет вертикального потока спиральности дает значение коэффициента $\kappa(n, s, c) = 1.41$ в формуле $S = \kappa(n,s,c)\pi v_m^{*3} r_m^*$ при $n = 2$, $s = 2.8$, $c = 0.3$, где v_m^* в точности соответствует максимуму тангенциальной скорости, а r_m^* — расстоянию до центра вихря, на котором этот максимум достигается. Отметим, что значение $\kappa(n, s, c)$ чувствительно к выбору параметра c: так, $\kappa(n, s, c) \approx 2.56$ при $n = 2$, $s = 2.8$, $c = 1$; ср. данные в табл. 1.

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим данные измерений падения давления при прохождении (со скоростями порядка нескольких метров в секунду) суперячейковых торнадо над специально сконструированным датчиком давления (Hardened In-Situ Tornado Pressure Recorder, HITPR), расположенным на поверхности земли [Karstens et al., 2010; см. также Samaras and Lee, 2004] (рис. 5).

Согласно [Karstens et al., 2010], рис. 5(а, г) отвечают широким двухячейковым торнадо с воронкой в форме перевернутого клина, в то время как рис. 5(б, в) соответствуют торнадо с практически цилиндрической воронкой в своей нижней части, причем визуальные наблюдения подтвердили, что торнадо 24 июня 2003 г. — одноячейковое. Как следует из рис. 4, вихри № 3, 4 и вихрь, аппроксимирующий вихрь Салливана, соответствуют случаям торнадо 7 мая 2002 г. и 29 мая 2008 г. (рис. 5(а, г)), в то время как вихрь № 1 и особенно вихрь № 2, аппроксимирующий вихрь Бюргерса—Ротта, соответствуют случаям торнадо 24 июня 2003 г. и 11 июня 2004 г. (рис. 5(б, в)).

В конце отметим, что определяя по барометрическим измерениям максимальное падение давления $\Delta p(0)$ в центре торнадо, мы по формуле

$$\left|\Delta p(0)\right| = K(n,s,c)\rho \mathrm{v}_m^{*2}, \tag{12}$$

которая следует из выражений для радиального профиля падения давления и тангенциальной скорости в вихре, можем оценить значения максимума тангенциальной скорости v_m^* в вихре и тем самым независимо оценить интенсивность торнадо по (расширенной) шкале Фудзита. Значения коэффициента $K(n, s, c)$ в формуле (12) для пяти профилей давления (пяти вихрей), показанных на рис. 4, даны в табл. 2.

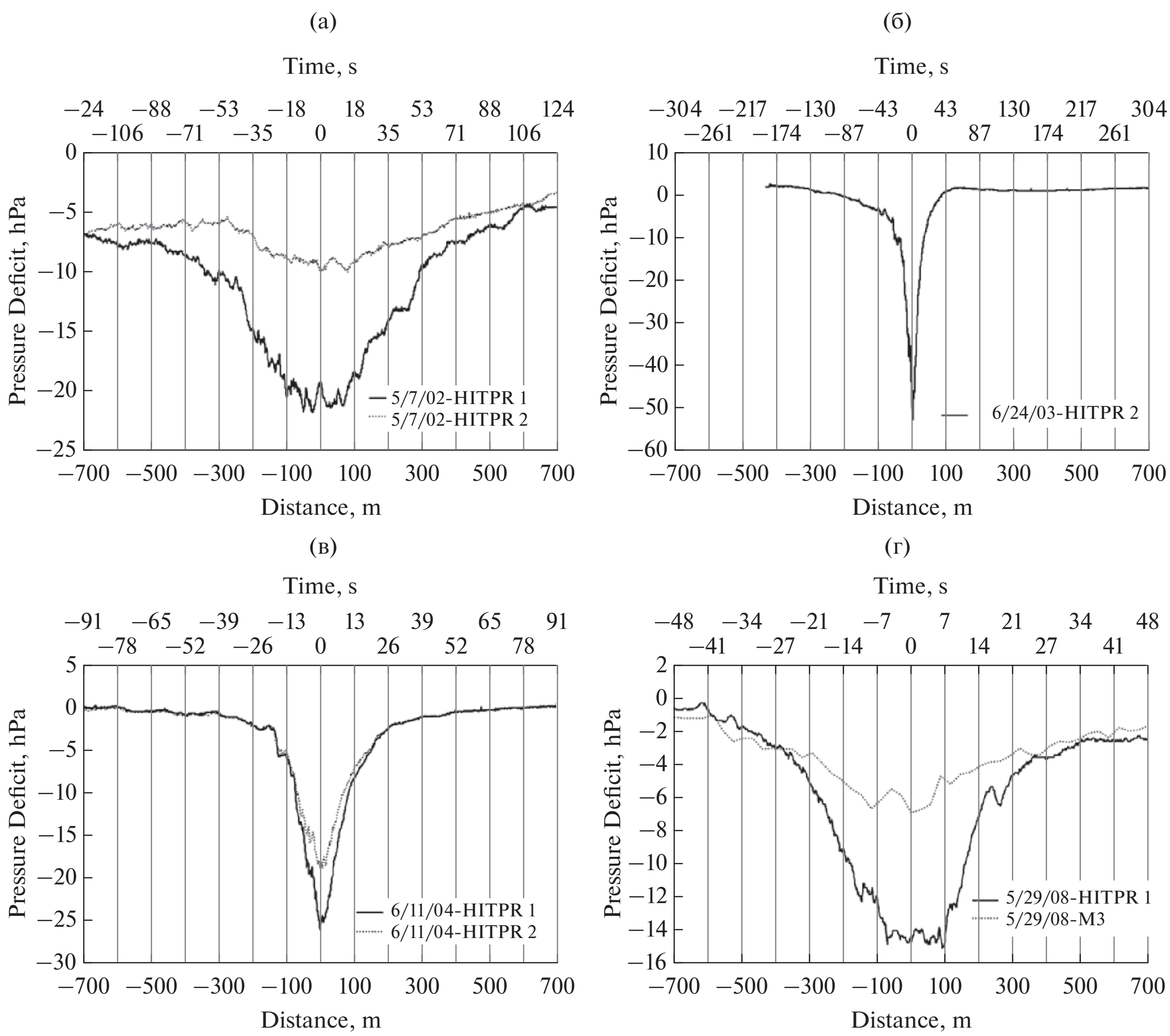

Рис. 5. Временная зависимость падения давления при прохождении торнадо над датчиком давления, включая случаи (а) 7 мая 2002 г. в штате Канзас, США, (б) 24 июня 2003 г. в штате Южная Дакота, США, (в) 11 июня 2004 г. в штате Айова, США и (г) 29 мая 2008 г. в штате Канзас, США. Нулевой отсчет по оси времени совпадает с центром торнадо. Внизу приведена шкала расстояний до центра вихря. На рис. 5(г) также показаны дополнительные измерения давления на трехметровой высоте мобильной (установленной на автомобиле) метеостанцией. Адаптировано из [Karstens et al., 2010; Fig. 7]

Из табл. 2 следует, что при заданном максимальном падении давления широкие, возможно двухячейковые, вихри более интенсивны, нежели их более узкие одноячейковые собратья. Напротив, при заданной (известной из доплеровских измерений) максимальной силе ветра в широких, возможно двухячейковых вихрях, падение давление в центре вихря меньше чем в узких, одноячейковых вихрях.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследуется двухпараметрическое семейство вихрей, в которых движение воздуха вблизи оси вихря отличается от твердотельного вращения, и тангенциальная скорость растет с радиусом по степенному закону. Показано, что такие вихри удовлетворяют уравнению баланса углового момента, дополненному моделью турбулентной вязкости, включающей два механизма вязкой диссипации. Во-первых, это традиционный механизм турбулентной вихревой вязкости и, во-вторых, это механизм (отрицательной) диффузии углового момента в вихре. Из условия того, что скорость диссипации кинетической энергии вихря в тепло является положительно определенной величиной, следует важный вывод о том, что кинематический коэффициент диффузии углового момента всегда меньше по модулю кинематического коэффициента обычной турбулентной вязкости.

Для указанной модели вихря, параметр s, описывающий поведение тангенциальной скорости вблизи оси вихря, однозначно определяется отношением двух указанных выше кинематических коэффициентов, и это однозначное соотношение позволяет определять радиальные профили радиального и аксиального (вертикального) компонентов скорости в вихре по заданному радиальному профилю тангенциальной скорости. Иными словами, если условиться, что поле тангенциальной скорости отвечает первичной (тороидальной) циркуляции в вихре, а поля радиальной и аксиальной скорости — вторичной (полоидальной) циркуляции в вихре, то можно говорить о том, что выполнение указанного выше однозначного соотношения — это условие возможности восстановления полоидальной циркуляции в вихре по циркуляции тороидальной.

Важный акцент сделан в работе на возможность восстановления в явном аналитическом виде, допускающем практические использования, радиального профиля падения давления в вихре. Используется то, что для интенсивных атмосферных вихрей безразмерное отношение углового момента на бесконечно большом расстоянии от центра вихря к коэффициенту турбулентной вязкости очень велико. Поэтому, когда рассматриваются не очень большие высоты над поверхностью земли, то радиальное и вертикальное уравнения движения сводятся с асимптотической точностью к уравнению циклострофического баланса и условию равенства нулю вертикального градиента давления (что типично для приближения пограничного слоя), соответственно [ср. Vatistas et al., 1991]. Даны примеры двухпараметрического представления вихрей, как для дискретных, целочисленных значений параметров, так и для непрерывного спектра их изменений.

Полученные результаты применены к суперячейковым смерчам (торнадо). Показано, что ширина полосы на поверхности земли, заметаемой вихрем при его поступательном движении, которая определяется из условия, что скорость ветра превышает определенное пороговое значение (в данном случае, ветер имеет ураганную силу), систематически уменьшается при увеличении значений параметра s, характеризующего отклонение движение воздуха вблизи оси вихря от твердотельного вращения. Эти результаты находят подтверждение при использовании в качестве альтернативной меры интенсивности торнадо (а также в определенной степени и их «разрушительной силы») направленного вниз потока спиральности в вихре.

В последней части статьи обсужден вопрос о наилучшей аппроксимации, в рамках обобщенного двухпараметрического семейства вихрей, радиального профиля тангенциальной скорости

Таблица 2. Зависимость коэффициента $K(n, s, c)$ от параметров вихревой модели (n, s, c) в формуле (12), связывающей максимальное падение давления в центре вихря с максимумом азимутальной скорости. Значения $K(n, s, c)$ указаны приближенно, с двумя знаками после запятой

(n, s, c)	(1, 1, 1)	(2, 1, 1)	(1, 3, 1)	(2, 2, 1)	(2, 2.8, 0.3)
$K(n, s, c)$	2	1.57	1.21	1.14	1.00

в известном вихре Салливана [Sullivan, 1959]. Показано, что такая аппроксимация в принципе возможна, и она допускает представление радиального профиля падения давления в вихре в явной аналитической форме. Обращено внимание на то, что аппроксимирующий вихрь отличается от вихря Салливана, во-первых, профилем тангенциальной скорости в близкой окрестности оси вихря и, во-вторых, тем, что он одноячейковый, а не двухячейковый, как вихрь Салливана. Если первое отличие заложено в сути предлагаемого в работе подхода и поэтому является необходимым, то более глубокое исследование причин второго отличия может быть предметом дальнейших исследований, равно как возможная модификация и усовершенствование принятых в работе основных уравнений (1) и (2).

Полученные результаты, относящиеся, в том числе, к «оптимальной» аппроксимации радиального профиля тангенциальной скорости в вихре Салливана, использованы для интерпретации профилей падения давления, измеренных при прохождении суперячейковых торнадо над датчиком давления, расположенным на поверхности земли [Karstens et al., 2010].

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны рецензентам за полезные замечания.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 24-17-00357).

ПРИЛОЖЕНИЯ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Исходим из уравнения (2), взятого при $u = 0$. Умножим обе части уравнения на тангенциальную скорость v и условимся, что знак «$\doteq$» означает равенство с точностью до слагаемых, которые имеют общий вид $\partial(...)/\partial r$ и при интегрировании по радиусу r от нуля до бесконечности (при составлении уравнения баланса суммарной кинетической энергии) дают нулевой вклад. В результате имеем цепочку равенств

$$
\begin{aligned}
r\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2}\right) &= \nu_T \mathrm{v} r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}r)\right) + \chi_T\frac{\mathrm{v}r}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}r)\right) \doteq \\
&\doteq -\nu_T\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}r)\right]^2 - \chi_T r\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}r)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{v}r}{r^2}\right) \doteq \\
&\doteq -(\nu_T+\chi_T)\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}r)\right]^2 + \chi_T\frac{2}{r^2}\mathrm{v}r\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}r) \doteq \\
&\doteq -(\nu_T+\chi_T)\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}r)\right]^2 + \chi_T\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}r)^2 \doteq \\
&\doteq -(\nu_T+\chi_T)\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(\mathrm{v}r)\right]^2 + \chi_T\frac{2\mathrm{v}^2}{r} \doteq \\
&\doteq -(\nu_T+\chi_T)r\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}\right)^2 - (\nu_T+\chi_T)\frac{\mathrm{v}^2}{r} + \chi_T\frac{2\mathrm{v}^2}{r} \doteq \\
&= -(\nu_T+\chi_T)r\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial r}\right)^2 - (\nu_T-\chi_T)\frac{\mathrm{v}^2}{r} \equiv \\
&\equiv -rD,
\end{aligned}
$$

которая доказывает сделанное в основном тексте утверждение.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Исходим из соотношения ($c > 0$), ср. (7) и (9),

$$\Delta p(r) = \Delta P \int\limits_{r^2/r_m^2}^{\infty} \frac{\xi^{s-1}}{\left(c + \xi^{\frac{s+1}{2}n}\right)^{2/n}} d\xi, \quad \xi = \frac{r^2}{r_m^2} \equiv \bar{r}^2.$$

При $n = 2$ оно принимает вид

$$\Delta p(r) = \Delta P \int\limits_{r^2/r_m^2}^{\infty} \frac{\xi^{s-1}}{c + \xi^{s+1}} d\xi = \frac{\Delta P}{s} \int\limits_{r^2/r_m^2}^{\infty} \frac{d\left(\xi^s\right)}{c + \xi^{s+1}}.$$

Учитываем, что $s = p/q$ — рациональное число, где p и q — взаимно простые натуральные числа, и вводим переменную $t = \xi^{1/q}$. Имеем

$$\Delta p(r) = \frac{\Delta P}{s} \int\limits_{\bar{r}^{2/q}}^{\infty} \frac{d\left(t^p\right)}{c + t^{p+q}} = \Delta P q \int\limits_{\bar{r}^{2/q}}^{\infty} \frac{t^{p-1} dt}{c + t^{p+q}}.$$

Делаем далее новую замену $c = b^{p+q}$ ($b = c^{1/(p+q)}$), $x = t/b$. Получаем

$$\Delta p(r) = \Delta P q \int\limits_{\bar{r}^{2/q}/b}^{\infty} \frac{b^p x^{p-1} dx}{b^{p+q}\left(1 + x^{p+q}\right)} = \frac{\Delta P q}{b^q} \int\limits_{\bar{r}^{2/q}/b}^{\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1 + x^{p+q}}.$$

Все свелось к вычислению неопределенного интеграла $\int \frac{x^{p-1} dx}{1 + x^{p+q}}$.

Поскольку в нашем случае $s = p/q = 2.8 = 14/5$, то $p + q = 14 + 5 = 19$ — нечетное число. Поэтому используем формулу 2.146(2) (с. 76 из [Градштейн и Рыжик, 2011]), где m и n натуральные числа и $m \leqslant 2n$,

$$\int \frac{x^{m-1} dx}{1 + x^{2n+1}} = (-1)^{m+1} \frac{\ln(1+x)}{2n+1} - \\ - \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{m\pi(2k-1)}{2n+1} \ln\left\{1 - 2x \cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi + x^2\right\} + \\ + \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{m\pi(2k-1)}{2n+1} \operatorname{arctg} \frac{x - \cos\frac{2k-1}{2n+1}\pi}{\sin\frac{2k-1}{2n+1}\pi}. \quad (Б.1)$$

Если бы $p+q$ было четным числом, то надо было бы использовать формулу 2.146(1) (с. 76 из [Градштейн и Рыжик, 2011]). Необходимо отметить, что индекс n в (Б.1) имеет другой смысл, нежели в основном тексте статьи, что, впрочем, не должно привести к недоразумению.

Итак, в нашем случае $m = p = 14$, $2n + 1 = p + q = 14 + 5 = 19$. Поэтому $2n = 18$ и неравенство $m \leq 2n$ выполнено. При этом $n = 9$, т.е. в каждой сумме в (Б.1) имеется девять слагаемых. Остается только вычислить вышеприведенные суммы и перейти в (Б.1) от неопределенного интеграла к определенному интегралу с верхним пределом на бесконечности и нижним пределом при $\bar{r}^{2/q}/b = \bar{r}^{2/q}/c^{1/(p+q)}$; здесь $q = 5$, $p + q = 19$ и $c = 0.3$. Это было сделано в данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Вараксин А.Ю. Воздушные торнадоподобные вихри: математическое моделирование // ТВТ. 2017. Т. 55. № 2. С. 291–316.

Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений (7-е изд.). СПб: БХВ-Петербург, 2011. 1232 с.

Курганский М.В. Вертикальный поток спиральности в атмосферных вихрях как мера их интенсивности // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2008. Т. 44. № 1. С. 67–74.

Курганский М.В. Спиральность в атмосферных динамических процессах // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2017. Т. 53. № 2. С. 147–163.

Курганский М.В. Симметричная устойчивость вертикальных бароклинных вихрей с теплым ядром // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2023. Т. 59. № 3. С. 251–264.

Онищенко О.Г., Похотелов О.А., Астафьева Н.М., Хортон В., Федун В.Н. Структура и динамика концентрированных мезомасштабных вихрей в атмосферах планет // УФН. 2020. Т. 190. №7. С. 732–748.

Bretherton F.P., Turner J.S. On the mixing of angular momentum in a stirred rotating fluid // J. Fluid Mech. 1968. V. 32. P. 449–464.

Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence, Advances in Applied Mechanics (Academic Press, New York). 1948. V. 1. P. 171–199.

Chkhetiani O., Kurgansky M. Kinetic helicity in the Earth's atmosphere. In: Helicities in Geophysics, Astrophysics, and Beyond, Geophysical Monograph 283, First Edition. Edited by Kirill Kuzanyan, Nobumitsu Yokoi, Manolis K. Georgoulis, and Rodion Stepanov. 2024 American Geophysical Union. Published 2024 by John Wiley & Sons, Inc. DOI:10.1002/9781119841715.ch10. Also: arXiv:2303.06363v1 [physics.flu-dyn] https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.06363

Coleman T.F., Li Y. An interior, trust region approach for nonlinear minimization subject to bounds // SIAM J. Optim. 1996. V. 6. P. 418–445.

Fiedler B.H. Conditions for laminar flow in geophysical vortices // J. Atmos. Sci. 1989. V. 46. P. 252–259.

Karstens C.D., Samaras T.M., Lee B.D., Gallus Jr. W.A., Finley C.A. Near-ground pressure and wind measurements in tornadoes // Mon. Wea. Rev. 2010. V. 138. P. 2570–2588.

Kurgansky M.V., Lorenz R.D., Renno N.O., Takemi T., Gu Z., Wei W. Dust devil steady-state structure from a fluid dynamics perspective // Space Sci. Rev. 2016. V. 203(1–4). P. 209–244.

Lorenz R.D. Vortex encounter rates with fixed barometer stations: Comparison with visual dust devil counts and large-eddy simulations // J. Atmos. Sci. 2014. V. 71. P. 4461–4472.

McEwan A.D. A laboratory demonstration of angular momentum mixing // Geophys. Fluid Dyn. 1973. V. 5. P. 283–311.

McEwan A.D. Angular momentum diffusion and the initiation of cyclones // Nature. 1976. V. 260. P. 126–128.

Rott N. On the viscous core of a line vortex // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). 1958. V. 9b. P. 543–553.

Samaras T.M., Lee J.J. Pressure measurements within a large tornado // Preprints, Eighth Symp. on Integrated Observing and Assimilation Systems for Atmosphere, Oceans and Land Surface, Seattle, WA, Amer. Meteor. Soc. 2004. Paper 4.9. https://ams.confex.com/ams/84Annual/techprogram/paper_74267.htm

Scully M.P. Computation of helicopter rotor wake geometry and its influence on rotor harmonic airloads. MIT Rep. ASRL TR 178-1. 1975. 469 pp.

Stull R.B. Meteorology for Scientists and Engineers. 3rd ed. Univ. of British Columbia, 2011. 938 pp.

Sullivan R.D. A two-cell vortex solution of the Navier–Stokes equations // J. Aerosp. Sci. 1959. V. 46. P. 767–768.

Vatistas G.H., Kozel V., Mih W.C. A simpler model for concentrated vortices // Exp. Fluids. 1991. V. 11. P. 73–76.

Wood V.T., Brown R.A. Simulated tornadic vortex signatures of tornado-like vortices having one- and two-celled structures // J. Appl. Meteor. Climatol. 2011. V. 50. P. 2338–2342.

Wood V.T., White L.W. A new parametric model of vortex tangential–wind profiles: Development, testing and verification // J. Atmos. Sci. 2011. V. 68. P. 990–1006.

Wurman J., Kosiba K., White T., Robinson P. Supercell tornadoes are much stronger and wider than damage-based ratings indicate // Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 2021. V. 118(14). e2021535118

TWO-PARAMETER MODEL OF INTENSE ATMOSPHERIC VORTICES

© 2025 M. V. Kurgansky[1, *], Yu. I. Yarinich[1, 2, 3]

[1]*Obukhov Institute of Atmospheric Physics RAS, Pyzhevsky per., 3, bld. 1, Moscow, 119017 Russia*

[2]*Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center, Leninskie Gory, 1, bld. 4, Moscow, 199991 Russia*

[3]*Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geography, Leninskie Gory, 1, Moscow, 199991 Russia*

**e-mail: kurgansk@ifaran.ru*

A two-parameter family of vortices is studied, in which the air motion near the vortex axis differs from solid-body rotation, and the tangential velocity increases according to a power law. It is shown that such vortices satisfy the angular momentum balance equation augmented with a model of turbulent viscosity, including both the traditional mechanism of eddy viscosity and the mechanism of negative diffusion of angular momentum in the vortex. Emphasis is placed on reconstructing the radial profile of the pressure drop in the vortex in an explicit analytical form. Examples of two-parameter representation of vortices are given, both for discrete, integer parameter values, and for a continuous spectrum of their changes. The results obtained are applied to supercell tornadoes. It is shown that the width of the strip on the surface of the earth swept by the vortex during its movement, and determined from the condition that the wind has hurricane force, systematically decreases when the air motion near the vortex axis deviates from solid-state rotation. Using the downward flux of helicity in a vortex as a measure of tornado intensity, as well as to a certain extent of their "destructive power", confirms these results. The question of the best approximation, within the framework of a generalized two-parameter family of vortices, of the radial profile of the tangential velocity in the well-known Sullivan vortex is discussed.

Keywords: intense atmospheric vortices, dust devils, tornadoes, turbulent viscosity, angular momentum diffusion, helicity flux, Sullivan vortex