нейных слагаемых. Наименьшие отклонения модельной солености от измеренной наблюдаются для юго-западной части моря – зоны с интенсивной струйной динамикой и слабой вихревой изменчивостью в зимний период. Для остальных районов в слое 30–100 м *RMSE* солености для экспериментов T3S5 и T5S3 меньше примерно на 20%, чем по данным T2S2.

Для верхнего слоя 0–30 м использование аппроксимаций, обеспечивающих наличие инвариантов степени больше двух, приводит к лучшим качественным и количественным результатам по температуре. Оценки показали, что *RMSE* температуры в экспериментах T3S5 и T5S3 уменьшается приблизительно на 10%. В то же время в летний сезон изменение схемы аппроксимации мало влияет на точность воспроизведения полей температуры в слое 30–100 м.

Анализ профилей солености вдоль траекторий буев демонстрирует, что уменьшение ошибки моделирования солености обусловлено более точным воспроизведением верхней границы основного галоклина. Сравнение профилей модельной температуры с данными ARGO и глубоководных станций НИС "Профессор Водяницкий" показывает, что эксперименты T3S5 и T5S3 по сравнению с расчетом T2S2 качественно и количественно точнее воспроизводят форму и толщину ХПС. По результатам трех экспериментов наименьшие отклонения от данных наблюдений получены при использовании аппроксимаций, обеспечивающих сохранение температуры в третьей степени и солености в пятой степени.

Результаты работы позволяют предположить, что увеличение степени инвариантов при нелинейной аппроксимации адвективных слагаемых в уравнениях эволюции температуры и солености позволяет лучше в смысле близости к наблюдениям воспроизвести области резких градиентов в прогнозируемых полях.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность сотрудникам ФГБУН ФИЦ МГИ С.В. Станичному и А.А. Кубрякову за предоставленные данных альтиметрии, Е.А. Скрипалевой за предоставление данных съемок рейсов НИС "Профессор Водяницкий". Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ № 23-27-00141.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Введем разностную сетку для бассейна с неровным дном, которая описывается боксами с целочисленными значениями в его центрах *i, j, k* ($i = \mathrm{i}_1, ..., i_N, j = \mathrm{j}_1, ..., j_M, k = 1, ..., K_{i,j}$) и на гранях – $i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2$. Горизонтальные размеры боксов (h_x, h_y) постоянные, по вертикали используется неравномерная аппроксимация

$$\left(h_z^k = z_{k+1/2} - z_{k-1/2}, \quad h_z^{k+1/2} = z_{k+1} - z_k\right).$$

Разностные операторы имеют вид (для *j, k* – аналогично):

$$\varphi_{i,j,k}^{-x} = \frac{\varphi_{i+1/2,j,k} + \varphi_{i-1/2,j,k}}{2},$$

$$\delta_x \varphi_{i,j,k} = \frac{\varphi_{i+1/2,j,k} - \varphi_{i-1/2,j,k}}{h_x},$$

$$\nabla_{x,y}^2 \varphi_{i,j,k} = \delta_x^2 \varphi_{i,j,k} + \delta_y^2 \varphi_{i,j,k}.$$

Тогда уравнения адвекции температуры и солености в точке (i, j, k) записываются в виде

$$\frac{dT_{i,j,k}}{dt} + \delta_x\left(u_{i,j,k}T_{i,j,k}\right) + \delta_y\left(v_{i,j,k}T_{i,j,k}\right) + \\ + \delta_z\left(w_{i,j,k}T_{i,j,k}\right) = 0,$$

$$\frac{dS_{i,j,k}}{dt} + \delta_x\left(u_{i,j,k}S_{i,j,k}\right) + \delta_y\left(v_{i,j,k}S_{i,j,k}\right) + \\ + \delta_z\left(w_{i,j,k}S_{i,j,k}\right) = 0,$$

Для температуры и солености в работе [Демышев, 2023] при условии сохранения *T, S* и T^K, S^L на гранях бокса (полуцелые значения индексов) получены следующие соотношения по оси *x* (для *j, k* – аналогично):

$$T_{i+1/2,j,k} = \frac{K-1}{K}\left(T_{i,j,k} + \frac{T_{i+1,j,k}^{K-1}}{\Phi(T_{i+1,j,k}, T_{i,j,k})}\right),$$

$$S_{i+1/2,j,k} = \frac{L-1}{L}\left(S_{i,j,k} + \frac{S_{i+1,j,k}^{L-1}}{\Psi(S_{i+1,j,k}, S_{i,j,k})}\right),$$

где

$$\Phi\left(T_{i+1,j,k}, T_{i,j,k}\right) = \sum_{n=0}^{K-2} T_{i+1,j,k}^{K-n-2} T_{i,j,k}^{n},$$

$$\Psi\left(S_{i+1,j,k}, S_{i,j,k}\right) = \sum_{m=0}^{L-2} S_{i+1,j,k}^{L-m-2} S_{i,j,k}^{m}.$$

При $K = L = 2$ следует известная аппроксимация (для j, k – аналогично):

$$T_{i+1/2,j,k} = \overline{T_{i+1/2,j,k}}^{x}, \quad S_{i+1/2,j,k} = \overline{S_{i+1/2,j,k}}^{x}. \qquad (\text{П.1})$$

При $K = 5$ и $L = 3$ имеем (для j, k – аналогично)

$$T_{i+1/2,j,k} = \frac{4}{5}\frac{T^4_{i+1,j,k} + T^3_{i+1,j,k}T_{i,j,k} + T^2_{i+1,j,k}T^2_{i,j,k} + T_{i+1,j,k}T^3_{i,j,k} + T^4_{i,j,k}}{T^3_{i+1,j,k} + T^2_{i+1,j,k}T_{i,j,k} + T_{i+1,j,k}T^2_{i,j,k} + T^3_{i,j,k}}, \qquad (\text{П.2})$$

$$S_{i+1/2,j,k} = \frac{2}{3}\frac{S^2_{i+1,j,k} + S_{i+1,j,k}S_{i,j,k} + S^2_{i,j,k}}{S_{i+1,j,k} + S_{i,j,k}},$$

и, соответственно, при $K = 3$ и $L = 5$:

$$S_{i+1/2,j,k} = \frac{4}{5}\frac{S^4_{i+1,j,k} + S^3_{i+1,j,k}S_{i,j,k} + S^2_{i+1,j,k}S^2_{i,j,k} + S_{i+1,j,k}S^3_{i,j,k} + S^4_{i,j,k}}{S^3_{i+1,j,k} + S^2_{i+1,j,k}S_{i,j,k} + S_{i+1,j,k}S^2_{i,j,k} + S^3_{i,j,k}}, \qquad (\text{П.3})$$

$$T_{i+1/2,j,k} = \frac{2}{3}\frac{T^2_{i+1,j,k} + T_{i+1,j,k}T_{i,j,k} + T^2_{i,j,k}}{T_{i+1,j,k} + T_{i,j,k}}.$$

При интегрировании по всей области аппроксимации (П.1), (П.2), (П.3) обеспечивают сохранение T, S и T^K, S^L $(K \geq 2, L \geq 2)$, то есть выполняются соотношения

$$\sum_{i,j,k}\frac{dT^K_{i,j,k}}{dt}h_x h_y h_z + \sum_{i,j}\frac{d\varsigma_{i,j}}{dt}T^K_{i,j,1/2}h_x h_y = 0,$$

$$\sum_{i,j,k}\frac{dS^L_{i,j,k}}{dt}h_x h_y h_z + \sum_{i,j}\frac{d\varsigma_{i,j}}{dt}S^L_{i,j,1/2}h_x h_y = 0,$$

где ζ – приведенный уровень моря и эти выражения при отсутствии диффузии и внешних сил соответствуют следующим интегралам:

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\zeta}^{H}\iint_{\Omega_z}(T^K)dxdydz = 0,$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\zeta}^{H}\iint_{\Omega_z}(S^L)dxdydz = 0.$$

Полученные аппроксимации требуют дополнительного анализа при $|T| \ll 1^\circ$C и/или $S \ll 1$ ‰. Для условий Черного моря такая ситуация практически не имеет место, а в данных расчетах она отсутствует.

Также конечно-разностные аппроксимации, представленные формулами (П.1), (П.2), (П.3), позволяют получить дивергентный вид уравнения адвекции плотности, что обеспечивает точное выполнение закона сохранения полной энергии при нелинейной зависимости плотности от температуры и солености [Демышев, 2023].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Артамонов Ю.В., Скрипалева Е.А., Алексеев Д.В., Федирко А.В., Шутов С.А., Колмак Р.В., Шаповалов Р.О., Щербаченко С.В. Гидрологические исследования в северной части Черного моря в 2016 г. (87, 89 и 91-й рейсы НИС "Профессор Водяницкий") // Морской гидрофизический журнал. 2018. Т. 34. № 3. С. 247–253. https://doi.org/10.22449/0233-7584-2018-3-247-253

Булгаков С.Н., Коротаев Г.К. Возможный механизм стационарной циркуляции вод Черного моря // Комплексные исследования Черного моря. Севастополь: МГИ АН УССР, 1984. С. 32–40.

Гидрометеорология и гидрохимия морей СССР. Т. 4. Черное море. Вып. 1. Гидрометеорологические условия / Под ред. Симонова А.И., Альтмана Э.Н. СПб.: Гидрометеоиздат, 1991. 428 с.

Головизнин В.М., Самарский А.Л. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. 1998. Т. 10. № 1. С. 86–100.

Демышев С.Г. Нелинейные инварианты дискретной системы уравнений динамики моря в квазистатическом приближении // Морской гидрофизический журнал. 2023. Т. 39. № 5. С. 557–583. EDN: JWSUUM

Демышев С.Г. Численная модель оперативного прогноза течений в Черном море // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2012. Т. 48. № 1. С. 137–149. EDN: OOWHLL

Демышев С.Г., Коротаев Г.К. Численная энергосбалансированная модель бароклинных течений океана с неровным дном на сетке С // Численные модели и результаты калибровочных расчетов течений в Атлантическом океане: Атмосфера – Океан – Космос. Программа "Разрезы". М.: Институт вычислительной математики РАН, 1992. С. 163–231.

Дорофеев В.Л., Сухих Л.И. Анализ изменчивости гид-