ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 6, с. 659–662

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977; 519.7

l-ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРАМИ ЭРДЕЙИ–КОБЕРА

С. С. Постнов

Представлено академиком РАН С. Н. Васильевым 15.03.2019 г.

Поступило 15.03.2019 г.

Исследована *l*-проблема моментов для одномерных линейных уравнений, содержащих операторы дифференцирования и интегрирования дробного порядка в смысле Эрдейи–Кобера. Получены условия, определяющие возможность постановки указанной проблемы моментов и её разрешимость. Для некоторых случаев получены явные аналитические решения *l*-проблемы моментов.

Ключевые слова: оптимальное управление, *l*-проблема моментов, уравнение дробного порядка, дробная производная Эрдейи–Кобера, интеграл Эрдейи–Кобера.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524866659-662

За последние десятилетия получен ряд результатов в исследованиях задач оптимального управления системами дробного порядка [1–5]. Большинство из них касается построения моделей динамики систем на основе уравнений с производными Капуто или Римана–Лиувилля [6].

В то же время известны и другие, более сложные операторы дробного интегрирования и дифференцирования, например операторы Эрдейи–Кобера, частным случаем которых являются операторы Римана–Лиувилля [6]. Такие операторы представляют интерес как с точки зрения исследований, направленных на построение единого определения дробной производной и дробного интеграла, так и в связи с задачами моделирования процессов медленной релаксации, последействия, аномальной диффузии и транспорта в средах со сложной структурой [7–10]. Исследование уравнений с операторами Эрдейи–Кобера представляет собой трудоёмкую задачу, проработанную в гораздо меньшей степени, чем для уравнений с операторами Римана–Лиувилля или Капуто [10]. Кроме того, для таких уравнений не рассматривались задачи оптимального управления, в том числе задачи с явными ограничениями на норму управления и задачи с разрывными управлениями.

В настоящей работе рассматриваются уравнения с операторами Эрдейи–Кобера, содержащие в правой части управление. Демонстрируется возможность постановки и решения *l*-проблемы моментов, к которой, как известно [11], может быть сведена задача оптимального управления.

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской Академии наук, Москва

E-mail: postnov.sergey@inbox.ru

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются одномерные линейные уравнения трёх типов. В уравнениях фигурируют функции времени $q(t)$ и $u(t)$, которые при моделировании систем обозначают соответственно состояние системы и управление. В дальнейшем предполагается: $u\in L_p(0,T]$, $1<p\le\infty$; $q\in C^1_{\beta\mu}=\{q(t)=t^k\tilde q(t), k>\beta\mu, \tilde q\in C^1[0,\infty)\}$, $\mu>\max(0,-\alpha-\delta)-1$, параметры α, β, δ будут определены ниже.

Уравнения первого типа имеют вид

$$\left(D_\beta^{\alpha,\delta}q\right)(t)=u(t),\ t\in(0,T], \tag{1}$$

$T>0$. Здесь и далее оператор дробного дифференцирования $D_\beta^{\alpha,\delta}$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\delta\in(0,1]$, $\beta>0$, $\nu>0$ понимается как левосторонний оператор дробной производной Эрдейи–Кобера [6, 7]:

$$\left(D_\beta^{\alpha,\delta}q\right)(t)=\frac{1}{\beta}t^{-\alpha\beta-\beta+1}\frac{d}{dt}\left(t^{\beta(\alpha+1)}I_\beta^{\alpha+\delta,1-\delta}q\right)(t),$$

где

$$\left(I_\beta^{\alpha,\delta}q\right)(t)=\frac{\beta}{\Gamma(\delta)}t^{-\beta(\alpha+\delta)}\int_0^t\left(t^\beta-\tau^\beta\right)^{\delta-1}\tau^{\beta(\alpha+1)-1}q(\tau)\,d\tau$$

есть левосторонний интеграл Эрдейи–Кобера [6, 7]. Если $\alpha\in[0,1]$, то с учётом указанного выше выбора параметров β, δ условие на параметр μ примет вид $\mu > -1$.

Второй тип уравнений записывается в виде

$$t^{-\beta\delta}\left(D_{\beta}^{\alpha,\delta}q\right)(t) - \lambda q(t) = u(t),\ t\in(0,T], \quad (2)$$

где λ – действительный коэффициент, $\lambda \neq 0$. Уравнения такого типа встречаются в задачах описания динамики сред с медленной релаксацией (различных вязкоупругих сред, неоднородных диэлектриков и полупроводников и т.п.) [9, 10].

Третий тип уравнений имеет вид

$$t^{-\delta}\left(D_{1}^{\alpha,\delta}q\right)(t) - \lambda t^{\nu}\left(I_{1}^{\alpha-\nu,\nu}q\right)(t) = u(t),\ t\in(0,T], \quad (3)$$

где $\nu > 0$. Такой тип уравнений описывает процессы с последействием, к нему же могут быть сведены различные уравнения динамики осциллятора дробного порядка [9, 10, 12].

2. ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

Решение уравнения (1) записывается в виде [13]

$$q(t) = (I_{\beta}^{\alpha,\delta}u)(t) + At^{-\beta(1+\alpha)} = \frac{\beta}{\Gamma(\delta)}t^{-\beta(\alpha+\delta)}\times$$

$$\times\int_0^t\left(t^{\beta}-\tau^{\beta}\right)^{\delta-1}\tau^{\beta(\alpha+1)-1}u(\tau)d\tau + At^{-\beta(1+\alpha)},\ t\in(0,T], \quad (4)$$

где A – константа, которая может быть определена из начальных условий.

Решение уравнения (2) записывается в виде [7]

$$q(t) = Bt^{\beta(\delta-1)}E_{\delta,\alpha+2\delta}\left(\lambda t^{\beta\delta}\right) + \beta t^{-\beta(\alpha+\delta)}\int_0^t\left(t^{\beta}-\tau^{\beta}\right)^{\delta-1}\times$$

$$\times\tau^{\beta(\alpha+\delta+1)-1}E_{\delta,\delta}\left[\lambda\left(t^{\beta}-\tau^{\beta}\right)^{\delta}\right]u(\tau)d\tau,\ t\in(0,T], \quad (5)$$

где константа B определяется начальными условиями, $E_{\alpha,\beta}[z]$ – двухпараметрическая функция Миттаг–Леффлера [6].

Решение уравнения (3) даётся выражением [10]

$$q(t) = C\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(\delta)} + \left(I_1^{\alpha,\delta}m_{\delta}\right)(t) + \lambda\frac{(-1)^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\delta)}t^{-\delta-\alpha}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^k}{k!}\frac{\Gamma(\nu-k+\delta)}{\Gamma(\nu-k+1)}\int_0^t(t-\tau)^{2\delta+2\nu-k-1}\times$$

$$\times E_{\delta+\nu,2\delta+2\nu-k}\left[\lambda(t-\tau)^{\delta+\nu}\right]\tau^{\alpha+\delta-\nu}u(\tau)d\tau,\ t\in(0,T], \quad (6)$$

где $m_{\delta}(t) = t^{\delta}u(t)$, C – константа, определяемая через начальные условия.

При $t = T$ решения (4)–(6) представляют собой одномерную проблему моментов [11] вида

$$\int_0^T g(T,\tau)u(\tau)d\tau = c(T). \quad (7)$$

В самом деле, решение (4) при $t = T$ можно записать в виде (7), где

$$g(T,\,t) = \frac{\beta}{\Gamma(\delta)}T^{-\beta(\alpha+\delta)}\left(T^{\beta}-t^{\beta}\right)^{\delta-1}t^{\beta(\alpha+1)-1}, \quad (8)$$

$$c(T) = q(T) - AT^{-\beta(1+\alpha)}. \quad (9)$$

Аналогично решение (5) при $t = T$ представляется формулой (7), где

$$g(T,\,t) = \beta T^{-\beta(\alpha+\delta)}(T^{\beta}-t^{\beta})^{\delta-1}t^{\beta(\alpha+\delta+1)-1}\times$$

$$\times E_{\delta,\delta}\left[\lambda(T^{\beta}-t^{\beta})^{\delta}\right], \quad (10)$$

$$c(T) = q(T) - BT^{\beta(\delta-1)}E_{\delta,\alpha+2\delta}\left(\lambda T^{\beta\delta}\right). \quad (11)$$

Наконец, решение (6) также может быть переписано в виде (7), где

$$g(T,\,t) = \frac{T^{-(\alpha+\delta)}}{\Gamma(\delta)}(T-t)^{\delta-1}t^{\alpha+\delta} +$$

$$+\lambda\frac{(-1)^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\delta)}T^{-\delta-\alpha}t^{\alpha+\delta-\nu}(T-t)^{2\delta+2\nu-1}\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k T^k}{k!}\frac{\Gamma(\nu-k+\delta)}{\Gamma(\nu-k+1)}(T-t)^{-k}\times$$

$$\times E_{\delta+\nu,2\delta+2\nu-k}\left[\lambda(T-t)^{\delta+\nu}\right], \quad (12)$$

$$c(T) = q(T) - C\frac{T^{-\alpha-1}}{\Gamma(\delta)}. \quad (13)$$

Будем далее полагать $c(T)\neq 0$. Если добавить к выражению (7) ограничение на норму искомой функции $u(t)$:

$$\|u\|_p \le l,\ l > 0, \quad (14)$$

то получится l-проблема моментов, состоящая в построении функции $u\in L_p(0,T]$, $1 < p \le \infty$, по известной функции $g\in L_{p'}(0,T]$, $1/p + 1/p' = 1$, так, чтобы выполнялись условия (7), (14) [11]. Именно к такой проблеме, как известно, сводится задача поиска оптимального управления с минимальной нормой и задача быстродействия с ограничением на норму оптимального управления [11, 14].

Будем далее говорить, что проблема моментов (7) может быть поставлена, если выполнено условие $g\in L_{p'}(0,\,T]$ (определена норма функции g в

$L_{p'}(0,T])$. К такому же условию сводится и условие разрешимости проблемы моментов [11, 14].

Имеют место следующие утверждения.

Т е о р е м а 1. *Пусть дана проблема моментов* (7), (14)*, где функция g и момент c заданы формулами* (8) *и* (9). *Тогда проблема моментов* (7), (14) *может быть поставлена и является разрешимой при выполнении следующих условий:*

$$\delta > \frac{1}{p}, \tag{15}$$

$$\beta(\alpha+1) > \frac{1}{p}. \tag{16}$$

Т е о р е м а 2. *Пусть дана проблема моментов* (7), (14), *где функция g и момент c заданы формулами* (10) *и* (11). *Тогда проблема моментов* (7), (14) *может быть поставлена и является разрешимой при выполнении следующих условий:*

$$\delta > \frac{1}{p},$$

$$\beta(\alpha+\delta+1) > \frac{1}{p}. \tag{17}$$

Т е о р е м а 3. *Пусть дана проблема моментов* (7), (14), *где функция g и момент c заданы формулами* (12) *и* (13). *Тогда проблема моментов* (7), (14) *может быть поставлена и является разрешимой при выполнении следующих условий:*

$$\alpha - \nu + \delta + 1 > \frac{1}{p}, \tag{18}$$

$$2\delta + 2\nu > \frac{1}{p}, \tag{19}$$

$$\alpha + \delta + 1 > \frac{1}{p}. \tag{20}$$

З а м е ч а н и е 1. В случае $\beta = 1$, $\alpha = 0$ для решений (4) и (6) из условий (15), (16) и (17) нетривиальным остаётся только условие (15), что полностью соответствует рассмотренному ранее случаю уравнений с операторами Капуто и Римана–Лиувилля [3, 15].

3. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

Если проблема моментов (7), (14) может быть поставлена и является разрешимой, то её решение даётся явными формулами [11, 14]. Пусть задан интервал времени $t \in (0, T]$, тогда функция, являющаяся решением проблемы моментов (7) и обладающая минимальной нормой, определяется выражением

$$u(t) = \Lambda^{p'}(T)\left|\frac{g(T,t)}{c(T)}\right|^{p'-1} \operatorname{sign}\left(\frac{g(T,t)}{c(T)}\right),\ t \in (0,T], \tag{21}$$

где

$$\Lambda(T) = \left(\int_0^T \left|\frac{g(T,t)}{c(T)}\right|^{p'} dt\right)^{\frac{-1}{p'}}.$$

Функция, являющаяся решением проблемы моментов (7), (14) и имеющая минимальный носитель, определяется выражением

$$u(t) = l^{p'}\left|\frac{g(T^*,t)}{c(T^*)}\right|^{p'-1} \operatorname{sign}\left(\frac{g(T^*,t)}{c(T^*)}\right),\ t \in (0,T^*], \tag{22}$$

где T^* находится как наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном $l > 0$ неравенству (соответствующему ограничению (14))

$$\Lambda(T) \le l. \tag{23}$$

Справедливы следующие утверждения.

Т е о р е м а 4. *Пусть задано уравнение* (1) *и выполнены условия теоремы* 1. *Тогда:*

решение проблемы моментов (7), *имеющее минимальную норму при заданном носителе* $t \in (0,T]$, *даётся формулой*

$$u(t) = \frac{c(T)\Gamma(\delta)(T^\beta - t^\beta)^{(p'-1)(\delta-1)} t^{[\beta(\alpha+1)-1](p'-1)}}{T^{(p'-1)[\beta(\alpha+\delta)-1]} \mathrm{B}\left(\frac{1}{\beta} + p'\left(\alpha+1-\frac{1}{\beta}\right), p'(\delta-1)+1\right)}, \tag{24}$$

где $\mathrm{B}(x,y)$ *– бета-функция Эйлера;*

решение проблемы моментов (7), (14), *имеющее минимальный носитель* $t \in (0,T^*]$, *даётся формулой*

$$u(t) = l^{p'}\left|\frac{\beta(T^*)^{-\beta(\alpha+\delta)}}{c(T^*)\Gamma(\delta)}\left((T^*)^\beta - t^\beta\right)^{\delta-1} t^{\beta(\alpha+1)-1}\right|^{p'-1} \times$$
$$\times \operatorname{sign}\left(\frac{1}{c(T^*)}\right), \tag{25}$$

где T^* *находится как наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном* $l > 0$ *неравенству*

$$\frac{T|c(T)|\Gamma(\delta)}{\beta}\left(\frac{\beta}{\mathrm{B}\left(\frac{1}{\beta}+p'\left(\alpha+1-\frac{1}{\beta}\right), p'(\delta-1)+1\right)T}\right)^{\frac{1}{p'}} \le l.$$

Т е о р е м а 5. *Пусть в случае* $u \in L_\infty(0,T]$ *задано уравнение* (2) *и выполнены условия теоремы 2. Тогда*:

решение проблемы моментов (7), *имеющее минимальную норму при заданном носителе* $t \in (0, T]$, *даётся формулой*

$$u(t) = \frac{c(T)}{T^{\beta\delta}\Gamma(\alpha+\delta+1)E_{\delta,\alpha+2\delta+1}(\lambda T^{\beta\delta})}; \tag{26}$$

решение проблемы моментов (7), (14), *имеющее минимальный носитель* $t \in (0, T^*]$, *даётся формулой*

$$u(t) = l\,\mathrm{sign}\left(\frac{1}{c\left(T^*\right)}\right), \tag{27}$$

где T^* *находится как наименьшее действительное неотрицательное число, удовлетворяющее при заданном* $l > 0$ *неравенству*

$$\frac{|c(T)|}{T^{\beta\delta}\Gamma(\alpha+\delta+1)E_{\delta,\alpha+2\delta+1}(\lambda T^{\beta\delta})} \le l.$$

Замечание 2. Функции (24), (25) в случае $u \in L_\infty(0, T]$ и функции (26), (27) не зависят от времени. В случае $u \in L_p(0, T]$, $1 < p < \infty$, функции (24), (25) являются дробно-степенными функциями времени.

Замечание 3. На основе задачи поиска функции, имеющей минимальный носитель при заданном ограничении вида (23), для систем дробного порядка может быть сформулирована и исследована обобщённая задача поиска такого набора параметров $\Omega = (\alpha, \beta, \delta, T)$, при котором выполняется ограничение (23). В частности, представляет интерес задача поиска параметров оператора дробного дифференцирования, обеспечивающих выполнения условия (23), и выбора среди них “оптимального” (в некотором смысле) набора.

Таким образом, в работе исследована возможность постановки *l*-проблемы моментов для трёх типов интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка с операторами Эрдейи–Кобера. Получены условия, определяющие возможность постановки и разрешимость проблемы моментов, и в некоторых случаях построены аналитические решения данной проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agrawal O.P.* // Nonlin. Dyn. 2004. V. 38. P. 323–337.
2. *Frederico G.S.F., Torres D.F.M.* // Int. Math. Forum. 2008. V. 3. № 10. P. 479–493.
3. *Кубышкин В.А., Постнов С.С.* // Автоматика и телемеханика. 2014. № 5. С. 3–17.
4. *Kamocki R.* // Math. Meth. Appl. Sci. 2014. V. 37. № 11. P. 1668–1686.
5. *Kamocki R., Majewski M.* // Opt. Control Appl. Meth. 2014. V. 36. Iss. 4. DOI: 10.1002/oca.2150.
6. *Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 541 p.
7. *Kiryakova V.* Generalized Fractional Calculus and Applications. Harlow; N.Y.: Longman Wiley, 1994. 388 p.
8. *Plociniczak L.* // SIAM J. Appl. Math. 2014. V. 74. № 4. P. 1219–1237.
9. *Sneddon I.N.* // Lect. Notes in Math. 1975. V. 457. P. 37–79.
10. *Kiryakova V.* // AIP Conf. Proc. 2011. V. 1410. P. 247–258.
11. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1973. 552 с.
12. *Concezzi M., Garra R., Spigler R.* // Fract. Calc. Appl. Anal. 2015. V. 18. № 5. P. 1212–1231.
13. *Luchko Yu., Trujillo J.J.* // Fract. Calc. Appl. Anal. 2007. V. 10. P. 249–267.
14. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределёнными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
15. *Kubyshkin V.A., Postnov S.S.* // J. Control Sci. and Eng. 2016. V. 2016. ID 4873083. 12 p.

l-PROBLEM OF MOMENTS FOR ONE-DIMENSIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH ERDÉLYI–KOBER OPERATORS

S. S. Postnov

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS S.N. Vassilyev March 15, 2019

Received March 15, 2019

The *l*-problem of moments investigated for one-dimensional linear equations, which contain Erdélyi–Kober differential and integral operators of fractional order. Conditions derived that determine the possibility and solvability of the problem stated. In some cases an explicit solutions of *l*-problem of moments obtained.

Keywords: optimal control, *l*-problem of moments, fractional-order equation, Erdélyi–Kober fractional derivative, Erdélyi–Kober integral.