ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 484, № 1, с. 7–11

МАТЕМАТИКА

УДК 517.538.2 + 517.984.26 + 517.547

ОБРАТИМЫЕ ПО ЭРЕНПРАЙСУ ФУНКЦИИ В АЛГЕБРЕ ШВАРЦА

Н. Ф. Абузярова

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим 14.05.2018 г.

Поступило 27.07.2018 г.

Рассматривается задача о нахождении условий на нулевое множество целой функции экспоненциального типа, при которых она принадлежит алгебре Шварца и обратима по Эренпрайсу.

Ключевые слова: алгебра Шварца, целая функция, распределение нулевого множества.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-565248417-11

1. Пусть $[a_1; b_1] \Subset [a_2; b_2] \Subset \ldots$ — последовательность отрезков, исчерпывающая конечный или бесконечный интервал $(a; b)$ вещественной прямой, P_k — банахово пространство, состоящее из всех целых функций φ, для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_k = \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|\varphi(z)|}{(2+|z|)^k \exp(b_k y^+ - a_k y^-)},$$
$$y^{\pm} = \max\{0, \pm y\},\ z = x + iy.$$

Обозначим через $\mathcal{P}(a; b)$ индуктивный предел последовательности $\{P_k\}$. В пространстве $\mathcal{P}(a; b)$ операция умножения на независимую переменную z непрерывна, поэтому $\mathcal{P}(a; b)$ — топологический модуль над кольцом многочленов $\mathbb{C}[z]$. В частности, $\mathcal{P} = \mathcal{P}(-\infty; \infty)$ — топологическая алгебра над кольцом $\mathbb{C}[z]$. Хорошо известно, что алгебра $\mathcal{P}$ есть образ пространства Шварца $(C^\infty(\mathbb{R}))'$ при линейном топологическом изоморфизме, осуществляемом преобразованием Фурье–Лапласа (см., например, [1]).

Функция $\varphi \in \mathcal{P}$ называется обратимой по Эренпрайсу, если главный идеал $\mathcal{I}_\varphi$, порождённый этой функцией в $\mathcal{P}$, замкнут (см. [2, 3]). Л. Эренпрайсу принадлежит следующий

Аналитический критерий обратимости [3, теорема I]. *Функция $\varphi \in \mathcal{P}$ обратима тогда и только тогда, когда существует $a > 0$ такое, что для каждого $x \in \mathbb{R}$ найдётся $y \in \mathbb{R}$ со свойствами*

$$|x - y| \le a\ln(1 + |x|) \text{ и } |\varphi(y)| \ge (\alpha + |y|)^{-a}.$$

Из этого критерия можно вывести, что целая функция экспоненциального типа f с вещественными нулями Λ принадлежит алгебре $\mathcal{P}$ и обратима по Эренпрайсу тогда и только тогда, когда $\ln|f(x)| = O(\ln(1 + |x|))$, $|x| \to \infty$, $x \notin E$. При этом исключительное множество E можно покрыть счётным множеством кружков $K_j = \{z: |z - z_j| \le r_j\}$, центрированных с Λ и таких, что $\overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \dfrac{r_j}{\ln|z_j|} < +\infty$ (множество кружков $\{K_j\}$ центрировано с Λ, если $\Lambda \subset \bigcup K_j$ и $K_j \cap \Lambda \ne \phi$ для всех j).

Обратимые по Эренпрайсу функции в алгебре $\mathcal{P}$ играют важную роль в исследовании инвариантных относительно дифференцирования подпространств W пространства $C^\infty(a; b)$, допускающих слабый спектральный синтез (см. [4–6]). А именно, эти функции связаны с нерешёнными в настоящий момент вопросами: о фундаментальном принципе в какой-либо форме для таких подпространств и о возможности представления W в виде топологической прямой суммы его “резидуального” подпространства W_I и замыкания линейной оболочки множества экспоненциальных одночленов, содержащихся в W.

Здесь рассматривается задача о нахождении условий на нулевое множество функции $f \in \mathcal{P}$, при которых она будет обратима по Эренпрайсу. Эта задача была сформулирована Л. Эренпрайсом в [3] и до настоящего времени полностью не решена. Мы изучаем её в рамках более общего вопроса: при каких условиях на нулевое множество $\Lambda_f \subset \mathbb{R}$ целая функция экспоненциального типа f принадлежит алгебре $\mathcal{P}$ и обратима по Эренпрайсу?

Башкирский государственный университет, Уфа
E-mail: abnatf@gmail.com

2. Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$ такова, что формула

$$f(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_j|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right) \qquad (1)$$

корректно определяет целую функцию экспоненциального типа.

Для $z \in \mathbb{C}$ и $t > 0$ обозначим $n_\Lambda(z, t)$ число точек $\lambda_k \in \Lambda$ в замкнутом круге $|w - z| \le t$, для $x \in \mathbb{R}$ и $t > 0$ символами $n_\Lambda^+(x, t)$ и $n_\Lambda^-(x, t)$ будем обозначать число точек $\lambda_k \in \Lambda$ в промежутках $(x; x + t]$, $(x - t; x]$ соответственно. Положим

$$v_\Lambda(x) := \begin{cases} 0, \ x = 0, \\ n_\Lambda^+(0, x), \ x > 0, \\ -(n_\Lambda(0, |x|) - n_\Lambda^+(0, |x|)), \ x < 0. \end{cases}$$

Предложение 1. *Если $f \in \mathcal{P}$ и обратима по Эренпрайсу, то*

$$v_\Lambda(t) - c_0 t = O(\ln^2|t|), \quad |t| \to +\infty,$$

где $2c_0 = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{n_\Lambda(0, t)}{t}$ *— плотность последовательности* Λ.

Доказательство предложения 1 основано на двух фактах: цитированном выше аналитическом критерии Л. Эренпрайса и следующей формуле (см. [7, III Н.2]), выражающей функцию v_Λ через функцию $\ln |f|$ и справедливой, в частности, для функций из $\mathcal{P}$:

$$v_\Lambda(x) = c_0 x - \frac{1}{\pi^2} \lim_{y\to 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - \tau}{(x-\tau)^2 + y^2} + \frac{\tau}{\tau^2 + 1} \right) \ln|f(\tau)|\, d\tau. \qquad (2)$$

Напомним, что функцией типа синуса называется целая функция экспоненциального типа f, удовлетворяющая оценкам

$$0 < c_f < |f(z)| e^{-\pi|\mathrm{Im}\, z|} < C_f < +\infty, \ |\mathrm{Im} z| > H_f > 0.$$

Ясно, что всякая функция типа синуса — обратимый по Эренпрайсу элемент алгебры $\mathcal{P}$.

В вопросе о разложении в ряды по экспоненциальным одночленам (многочленам) в пространствах L^p на интервале функции типа синуса играют роль, схожую с ролью обратимых по Эренпрайсу функций в упомянутых выше вопросах о фундаментальном принципе и о представлении в виде топологической прямой суммы для подпространств пространства $C^\infty(a; b)$, допускающих слабый спектральный синтез.

При помощи формулы (2) нетрудно доказать следующие два утверждения.

Утверждение 1. *Пусть* $f(z) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt}\, d\varphi(t)$, *$\varphi$ — функция ограниченной вариации на отрезке* $[-\pi; \pi]$, *f — функция типа синуса* (*для этого функция φ должна иметь скачки в точках* $\pm\pi$ [8, *лемма* 4]). *Тогда её нулевое множество Λ удовлетворяет условию*

$$v_\Lambda(t) - t = O(1), \ |t| \to +\infty. \qquad (3)$$

Утверждение 2. *Если f — функция типа синуса, то её нулевое множество Λ удовлетворяет условию*

$$v_\Lambda(t) - t = O(\ln|t|), \ |t| \to +\infty. \qquad (4)$$

Первое из этих утверждений содержится в работе [10], второе — без доказательства — приведено во введении работы [9].

Отметим, что условие (3) не является ни необходимым, ни достаточным для того, чтобы f была функцией типа синуса (см. [9; 10; 12, §2]). В классической монографии [13, теорема XXXIII] доказано, что в случае чётной последовательности Λ из (3) следует, что функция f принадлежит алгебре $\mathcal{P}$ и обратима по Эренпрайсу. В случае произвольной (не обязательно чётной) последовательности Λ этот результат может быть выведен из представления (7) и аналога второго утверждения леммы 1 (см. п. 3) для произвольной (не обязательно чётной) функции.

В свою очередь, соотношение (4) не является ни необходимым, ни достаточным условием для того, чтобы функция f, определённая формулой (1), принадлежала алгебре $\mathcal{P}$ и была обратима по Эренпрайсу (теорема 4 и примеры 1, 2, 3 в п. 5).

3. В работе [14, лемма 1] доказано, что если последовательность $\Lambda = \{\lambda_j\} \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям

$$n_\Lambda(0, t) = O(t),$$
$$n_\Lambda(0, t + 1) - n_\Lambda(0, t) = o(t), \ t \to \infty, \qquad (5)$$

$$\exists \lim_{R\to+\infty} \sum_{0<|\lambda_j|<R} \lambda_j^{-1} \in \mathbb{C}, \qquad (6)$$

то формула (1) корректно определяет целую функцию экспоненциального типа и

$$\ln|f(z)| = \int_0^{+\infty} \frac{n_\Lambda(0, t) - n_\Lambda(z, t)}{t}\, dt. \qquad (7)$$

Рассмотрим положительную последовательность $M = \{\mu_k\}$, для которой

$$m(x) := v_M(x) - x = o(x), \ x \to +\infty,$$

и, следовательно, существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\upsilon_M(x)}{x}=1$. Последовательность $\mathcal{M}=M\cup(-M)$ имеет плотность, равную 2, и удовлетворяет условиям (5), (6), поэтому для чётной целой функции

$$g(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\mu_k^2}\right) \tag{8}$$

можем написать

$$\ln|g(x)|=\int_0^{+\infty}\frac{n_{\mathcal{M}}(0,t)-n_{\mathcal{M}}(x,t)}{t}dt=$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{n_{\mathcal{M}}^-(t,x)-n_{\mathcal{M}}^+(t,x)}{t}dt. \tag{9}$$

Л е м м а 1. 1. *Если* $m(x)=O(\ln^2 x)$, $x\to+\infty$, *то* $\int_{x\ln x}^{+\infty}\frac{n_{\mathcal{M}}^-(t,x)-n_{\mathcal{M}}^+(t,x)}{t}dt=O(\ln x)$, $x\to+\infty$.

2. *Если*

$$m(x)-m\left(\frac{x}{h}\right)=O((\ln h+1)\ln x),\ x\to+\infty,\ h\to+\infty, \tag{10}$$

то

$$\int_x^{+\infty}\frac{n_{\mathcal{M}}^-(t,x)-n_{\mathcal{M}}^+(t,x)}{t}dt=O(\ln x),\ x\to+\infty.$$

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы функция* g, *определённая формулой* (8), *принадлежала алгебре* $\mathcal{P}$ *и была обратима по Эренпрайсу, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения*

$$m(x)=O(\ln^2 x),\ x\to+\infty,$$

$$\lim_{A\to+\infty}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{A\ln x}\int_{A\ln x}^{x\ln x}\frac{n_{\mathcal{M}}(x,t)-n_{\mathcal{M}}(0,t)}{t}dt=2.$$

Доказательство приведённого критерия опирается на предложение 1 и первое утверждение леммы 1.

При помощи второго утверждения леммы 1 и предложения 1 доказывается следующая

Т е о р е м а 2. *Пусть для функции* g, *определённой формулой* (8), *выполнено условие* (10). *Для того чтобы функция* g *принадлежала алгебре* $\mathcal{P}$ *и была обратима по Эренпрайсу, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\delta>0$

$$\lim_{A\to+\infty}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{A\ln x}\int_{A\ln x}^{\delta x}\frac{n_{\mathcal{M}}(x,t)-n_{\mathcal{M}}(0,t)}{t}dt=2.$$

4. В этом пункте вновь рассмотрим последовательность $\Lambda\subset\mathbb{R}$ и функцию f, такие, как в п. 2. Предположим, что $v_\Lambda(t)=t+o(t)$, $|t|\to+\infty$. Введём обозначения

$$L(t)=v_\Lambda(t)-t,\quad L^*(t)=L(t)-L(-t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Нетрудно убедиться в том, что если $f\in\mathcal{P}$, то $f(z)f(-z)\in\mathcal{P}$, и эти функции обратимы по Эренпрайсу или нет одновременно. Учитывая данный факт, из предложения 1, теорем 1 и 2 получаем такие утверждения.

С л е д с т в и е 1. *Пусть функция* f, *определённая формулой* (1), *принадлежит алгебре* $\mathcal{P}$. *Для того чтобы* f *была обратима по Эренпрайсу, необходимо и достаточно, чтобы* $L(x)=O(\ln^2|x|)$, $|x|\to+\infty$, *и*

$$\lim_{A\to+\infty}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{A\ln x}\int_{A\ln x}^{x\ln x}\frac{L^*(x+t)-L^*(x-t)-2L^*(t)}{t}dt=4. \tag{11}$$

С л е д с т в и е 2. *Пусть* $f\in\mathcal{P}$ *и выполнено условие* (10) *с заменой функции* m *на функцию* L^*. *Для того чтобы функция* f *была обратима по Эренпрайсу, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\delta>0$

$$\lim_{A\to+\infty}\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{A\ln x}\int_{A\ln x}^{\delta x}\frac{L^*(x+t)-L^*(x-t)-2L^*(t)}{t}dt=4.$$

Удобные для проверки достаточные условия содержатся в следующей теореме.

Т е о р е м а 3. *Пусть* f — *функция, определённая формулой* (1), *и выполнены два условия:*

$$\int_0^x\frac{L^*(t)}{t}dt=O(\ln x),\quad x\to+\infty,$$

$$L(x)-L\left(\frac{x}{h}\right)=O(\ln h\ln|x|)),\ |x|\to+\infty,\ h\to+\infty.$$

Тогда функция f *принадлежит* $\mathcal{P}$ *и обратима по Эренпрайсу.*

5. Рассмотрим последовательность

$$\lambda_k=k+l(|k|),\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \tag{12}$$

где l — дифференцируемая функция на положительной полуоси, $l(0)=0$ и

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\frac{\ln|l(t)|}{\ln t}\in[0;1). \tag{13}$$

Положим $g=zf$, где функция f определена формулой (1) по последовательности $\{\lambda_k\}$.

В работе [11] доказана следующая

Т е о р е м а А. *Пусть функция* $l(t)$, $t\geq0$, *положительна, дифференцируема, вогнута и удовлетворяет условию* (13).

Тогда для принадлежности g *классу функций типа синуса необходимо и достаточно, чтобы* $tl'(t)=O(1)$, $t\to\infty$.

Отметим, что в работе [11] используются отличные от предлагаемых нами представление для $\ln|g|$ и техника оценок.

Откажемся от условия положительности функции l, а требование вогнутости заменим более слабым ограничением:

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{|l'(t)|t}{|l(t)|} < +\infty. \qquad (14)$$

Из условий (13) и (14) следует, что точки последовательности $\{\lambda_k\}$ “разделены”, т.е. существует число $\delta_0 > 0$, для которого $|\lambda_k - \lambda_j| \ge \delta_0$ при всех k, $j \in \mathbb{Z}$, $k \neq j$.

Т е о р е м а 4. *Пусть функция l дифференцируема на* $(0; +\infty)$ *и выполнены условия* (13), (14). *Если*

$$tl'(t) = O(\ln t), \ t \to +\infty, \qquad (15)$$

то функция f, определённая формулой (1) *по последовательности* (12), *принадлежит $\mathcal{P}$ и обратима по Эренпрайсу. Более того, для любого $\delta \in (0; \delta_0)$ найдётся положительная постоянная C_δ такая, что*

$$\ln|f(x)| \ge -C_\delta \ln(1 + |x|), \, x \in \mathbb{R},$$

$$|x - \lambda_k| \ge \delta, \, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

З а м е ч а н и е 1. Первая часть этой теоремы, касающаяся включения $f \in \mathcal{P}$ и обратимости f по Эренпрайсу, выводится из теоремы 3. А именно, доказывается, что при выполнении условий (13)–(15) нулевое множество функции f удовлетворяет требованиям теоремы 3.

Следующее утверждение представляет собой аналог цитированной выше теоремы А для обратимых по Эренпрайсу функций.

Т е о р е м а 5. *Пусть l — положительная, вогнутая, дифференцируемая на* $(0; +\infty)$ *функция, удовлетворяющая условию* (13), *а функция f определена формулой* (1) *по последовательности* (12). *Тогда соотношение* (15) *является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция f была обратимым по Эренпрайсу элементом алгебры $\mathcal{P}$.*

П р и м е р 1. Функция $l(t) = \ln^2(1+t)$, очевидно, удовлетворяет условиям первой части теоремы 4. Поэтому функция

$$f(z) = \lim_{R\to\infty} \prod_{|\lambda_k|<R} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right),$$

$$\lambda_k = k + l(|k|), \ k = \pm1, \pm2, \ \ldots,$$

содержится и обратима в $\mathcal{P}$.

П р и м е р 2. Положим $\lambda_k = k - \ln k$, $k = 1, 2, \ldots$, и рассмотрим чётную целую функцию $g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)$. Легко видеть, что

$$v_\Lambda(x) = [x + \ln x] + O(1), \, x \ge 1,$$

где $[a]$ обозначает целую часть числа. Используя представление (9) и лемму 1, убеждаемся в том, что $g \notin \mathcal{P}$.

П р и м е р 3. Пусть теперь $\lambda_k = k + \ln k$, $k = 1, 2, \ldots$, и $g(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_k^2}\right)$. Легко видеть, что

$$v_\Lambda(x) = [x - \ln x] + O(1), \, x \ge 1.$$

Как и в предыдущем примере, с помощью представления (9) и леммы 1 убеждаемся в том, что функция g содержится в алгебре $\mathcal{P}$ и не обратима по Эренпрайсу.

Источник финансирования. Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект 18–11–00002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
2. *Berenstein C.A., Taylor B.A.* // Adv. Math. 1980. V. 33. P. 109–143.
3. *Ehrenpreis L.* // Amer. J. Math. 1960. V. 57. P. 522–588.
4. *Абузярова Н.Ф.* // ДАН. 2014. Т. 457. № 5. С. 510–513.
5. *Aleman A., Baranov A., Belov Yu.* // J. Funct. Anal. 2015. V. 268. № 8. P. 2421–2439.
6. *Абузярова Н.Ф.* // Мат. заметки. 2017. Т. 102. № 2. С. 163–177.
7. *Koosis P.* The Logarithmic Integral I. Cambridge Univ. Press. 1998, 462 c.
8. *Седлецкий А. М.* //Изв. АН СССР. Сер. мат. 34. № 6 1970. С. 1391–1415.
9. *Левин Б.Я., Любарский Ю.И.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1975. Т. 39. №3. С. 657–702.
10. *Седлецкий А.М.* // Мат. заметки. 2007. Т. 82. № 2. С. 262–271.
11. *Юхименко А.А.* // Мат. заметки, 2008. Т. 83. № 6. С. 941–954.
12. *Левин Б.Я., Островский И.В.* // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43. № 1. С. 87–110.
13. *Paley R.E.A.C., Wiener N.* Fourier Transforms in the Complex Domain. N. Y.: AMS, 1934. 267 p.
14. *Фаворов С.Ю.* // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20. № 1. С. 138–145.

FUNCTIONS IN THE SCHWARTZ ALGEBRA THAT ARE INVERTIBLE IN THE SENSE OF EHRENPREIS

N. F. Abuzyarova

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichiy May 14, 2018

Received July 27, 2018

We consider the problem of obtaining the restrictions on the zero set of an entire function of exponential type under which this function belongs to the Schwartz algebra and invertible in the sense of Ehrenpreis.

Keywords: Schwartz algebra, entire function, zero set distribution.