

УДК 517.97

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДВИЖЕНИЕМ СРЕДЫ БИНГАМА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ ПО ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

В. Г. Звягин, М. В. Турбин*

Представлено академиком РАН А.Т. Фоменко 17.09.2018 г.

Поступило 08.10.2018 г.

Доказывается существование оптимального управления задачи с обратной связью для движения среды Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным в двумерном и трёхмерном случаях, т.е. на двумерном и трёхмерном торе. Сначала на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики даётся интерпретация задачи управления с обратной связью движением среды Бингама в виде операторного включения с многозначной правой частью. Затем на основе теории степени одного класса многозначных отображений доказывается существование решений получившегося включения (а значит, и задачи управления). После чего доказывается, что среди решений рассматриваемого включения (а значит, и исходной задачи) существует решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

Ключевые слова: оптимальное управление с обратной связью, модель Бингама, слабое решение, многозначное отображение, аппроксимационно-топологический подход.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524852139-141>

1. Исследованию задач управления посвящено большое количество работ. Однако в то время как управление для линейных систем более или менее изучено, управление для нелинейных систем остаётся серьёзной задачей. Теорию управления (оптимального управления) для нелинейных систем гидродинамики исследовали J.-L. Lions [1], H. Choi, R. Temam, P. Moin, J. Kim [2], M. Gunzburger, L. Hou и T. Svobodny [3], A.B. Фурсиков [4] и др. (подробный обзор результатов, связанных с задачами управления для систем гидродинамики, приведён в [2]). В монографии [5] и целом ряде других работ при исследовании различных аспектов теории управляемых систем с обратной связью (т.е. ситуации, когда внешняя сила, которая и является управлением, зависит от скорости движения среды) классическое понятие обратной связи используется в расширенном смысле: отображение обратной связи понимается многозначным, ставящим в соответствие состоянию системы целое множество допустимых управлений. Этот подход позволяет эффективно использовать для описания управляемых систем теорию дифференциальных включений и теорию степени многозначных отображений для исследования разрешимости этих включений.

Такой подход позволил исследовать задачи управления ряда моделей движения неньютоновых сред

(суспензий, водных растворов полимеров, различных сред с памятью [6–12]), которые в силу сложности этих систем ранее были недостаточно изучены с точки зрения оптимального управления.

В данном сообщении доказывается существование оптимального управления задачи с обратной связью для движения среды Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным в двумерном и трёхмерном случаях, т.е. на двумерном и трёхмерном торе.

2. Движение однородной несжимаемой среды с единичной плотностью описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \operatorname{grad} p = f, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (2)$$

Здесь $v(x, t)$, $p(x, t)$, $\sigma(x, t)$, $f(x, t)$ — вектор скорости частицы жидкости, давление, девиатор тензора напряжений и плотность внешних сил (в нашем случае это ещё и управление) соответственно в точке x в момент времени t .

Система уравнений, описывающая движение конкретной среды, получается добавлением к общему уравнению реологического соотношения между девиатором тензора напряжений σ и тензором скоростей деформаций $\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T)$.

Для жидкости Бингама реологическое соотношение имеет вид

$$\sigma = 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} \text{ для } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \quad (3)$$

$$|\sigma| \leq \tau^* \text{ для } |\mathcal{E}(v)| = 0,$$

где μ, τ^* — некоторые положительные константы. Эта модель применяется для описания движения вязкопластичных сред, например различных гелей, суспензий, красок, и достаточно подробно исследована с точки зрения разрешимости (см. [13, 14] и имеющуюся там библиографию) начально-краевых задач.

Для системы уравнений (1)–(3) рассмотрим начальную задачу с начальным условием

$$v(0) = a. \quad (4)$$

Нас будет интересовать вопрос о существовании оптимального решения задачи управления с обратной связью для рассматриваемой задачи Коши в случае периодических условий по пространственным переменным, т.е. рассматривается задача Коши на торе (двумерном или трёхмерном). А именно мы предполагаем, что внешние силы (управление) принадлежат образу некоторого многозначного отображения (коротко — мультиотображения), которое зависит от скорости движения жидкости:

$$f \in \Psi(v). \quad (5)$$

Введём используемые в работе обозначения.

Пусть $\Omega = \prod_{i=1}^n (0, l_i) \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$. Через $(C_{\text{per}}^\infty)^n$ обозначим пространство периодических вектор-функций со значениями в $\mathbb{R}^n$ и с периодами l_i . Введём множество

$$\Phi = \left\{ \phi \in (C_{\text{per}}^\infty)^n : \int_{\Omega} \phi dx = 0, \operatorname{div} \phi = 0 \right\}.$$

Через V^1, V^2, V^0 обозначим замыкание множества Φ по нормам $W_2^1(\Omega)^n, W_2^2(\Omega)^n$ и $(L_2(\Omega))^n$ соответственно. Через $(\cdot, \cdot)$ мы будем обозначать скалярное произведение в $(L_2(\Omega))^n$. Через V^{-1} обозначим сопряжённое к V^1 пространство. Обозначим через $D(A) = V^2$ и рассмотрим на $D(A)$ оператор A : $Au = -P\Delta u$, $u \in D(A)$, где P — проектор, определяемый разложением Гельмгольца—Вейля на торе. Подробное определение пространств, а также их свойства можно найти в [15].

Для двух матриц $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ обозначим

$$A : B = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

Введём в рассмотрение ещё одно функциональное пространство. При $n = 2$ положим

$$W = \{u : u \in L_2(0, T; V^1), u' \in L_2(0, T; V^{-1})\}$$

с нормой

$$\|u\|_W = \|u\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|u'\|_{L_2(0,T;V^{-1})},$$

а при $n = 3$ будем полагать, что

$$W = \{u : u \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), \\ u' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\}$$

с нормой

$$\|u\|_W = \|u\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|u\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|u'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}.$$

В работе нами рассматривается задача (1)–(5) с периодическим условием по пространственной переменной, которую в дальнейшем будем называть периодической (по пространственной переменной) задачей управления с обратной связью для модели Бингама.

В качестве функции управления рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W \rightrightarrows L_2(0, T; V^0)$. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) отображение Ψ определено на W и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;

(Ψ2) отображение Ψ полунепрерывно сверху (т.е. для каждого $v \in W$ и открытого множества $V \subset L_2(0, T; V^0)$ такого, что $\Psi(v) \subset V$, существует окрестность $U(v)$ такая, что $\Psi(U(v)) \subset V$) и компактно (т.е. образ Ψ относительно компактен в $L_2(0, T; V^0)$);

(Ψ3) отображение Ψ глобально ограничено, т.е. существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T;V^0)} := \sup\{\|u\|_{L_2(0,T;V^0)} : u \in \Psi(v)\} \leq M$$

для всех $v \in W$;

(Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле: если $\{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W$, $v_l \rightharpoonup v_0$, $u_l \in \Psi(v_l)$ и $u_l \rightarrow u_0$ в $L_2(0, T; V^0)$, то $u_0 \in \Psi(v_0)$.

Пусть $a \in V^1$. Дадим определение слабого решения рассматриваемой задачи.

Определение 1. Слабым решением периодической задачи управления с обратной связью для модели Бингама (1)–(5) назовём тройку функций $(v \in W, \sigma \in (L_2(Q_T))^n, f \in L_2(0, T; V^0))$, которая для всех $\phi \in V^1$ и для почти всех $t \in (0, T)$ удовлетворяет тождеству

$$\langle v', \varphi \rangle - \sum_{ij=1}^n \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \sigma: \varepsilon(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle, \quad (6)$$

реологическому соотношению (3), условию обратной связи (5) и начальному условию $v(0) = a$.

Имеет место следующая теорема о существовании решения рассматриваемой задачи.

Теорема 1. *Предположим, что $n = 2, 3$ и $a \in V^1$. Тогда периодическая задача управления с обратной связью для модели Бингама (1)–(5) имеет хотя бы одно слабое решение (v, σ, f) .*

Обозначим через $\Sigma \subset W \times (L_2(Q_T))^{n^2} \times L_2(0, T; V^0)$ множество всех слабых решений периодической задачи управления с обратной связью для модели Бингама (1)–(5). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Ф1) существует число γ такое, что $\Phi(v, \sigma, f) \geq \gamma$ для всех $(v, \sigma, f) \in \Sigma$;

(Ф2) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W , $\sigma_m \rightharpoonup \sigma_*$ в $(L_2(Q_T))^{n^2}$ и $f_m \rightarrow f_*$ в $L_2(0, T; V^0)$, то $\Phi(v_*, \sigma_*, f_*) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \Phi(v_m, \sigma_m, f_m)$.

Вторым результатом работы является следующая

Теорема 2. *Предположим, что $n = 2, 3$. Если отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4), а функционал Φ удовлетворяет условиям (Ф1) и (Ф2), тогда периодическая задача управления с обратной связью для модели Бингама (1)–(5) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, σ_*, f_*) такое, что*

$$\Phi(v_*, \sigma_*, f_*) = \inf_{(v, \sigma, f) \in \Sigma} \Phi(v, \sigma, f). \quad (7)$$

Источник финансирования. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект 14.Z50.31.0037).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lions J.-L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. B.: Springer-Verlag, 1971. 400 p.
2. Choi H., Temam R., Moin P., Kim J. // J. Fluid Mech. 1993. V. 253. P. 509–543.
3. Gunzburger M.D., Hou L., Svobodny T.P. // SIAM J. on Control and Optim. 1992. V. 30. № 1. P. 167–181.
4. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Науч. кн., 1999. 352 с.
5. Aubin J.-P., Cellina A. // Differential Inclusions. B.: Springer-Verlag, 1984. 344 p.
6. Zvyagin V.G., Turbin M.V. // J. Optim. Theory and Appl. 2011. V. 148. № 1. P. 146–163.
7. Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A. // J. Fixed Point Theory and Appl. 2014. V. 16. P. 27–82.
8. Obukhovskii V.V., Zecca P., Zvyagin V.G. // Topol. Methods in Nonlin. Anal. 2004. V. 23. P. 323–337.
9. Звягин А.В. // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 2. С. 245–249.
10. Звягин А.В. // ДАН. 2016. Т. 468. № 3. С. 251–253.
11. Zvyagin A.V. // Appl. Anal. 2013. V. 92. № 6. P. 1157–1168.
12. Звягин А.В. // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54. № 4. С. 807–825.
13. Shelukhin V.V. // J. Math. Fluid Mech. 2002. V. 4. № 2. P. 109–127.
14. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
15. Temam R. Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis. 2nd ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995. 141 p.

OPTIMAL FEEDBACK CONTROL PROBLEM FOR BINGHAM MEDIA MOTION WITH PERIODIC BOUNDARY CONDITIONS

V. G. Zvyagin, M. V. Turbin

Presented by Academician of the RAS A.T. Fomenko September 17, 2018

Received October 8, 2018

We study the optimal feedback control problem for the motion of Bingham media with periodic boundary conditions in two- and three-dimensional cases. First, the considered problem is interpreted as an operator inclusion with a multivalued right-hand side. Then, the approximation-topological approach to hydrodynamic problems and the degree theory for a class of multivalued maps are used to prove the existence of solutions of this inclusion. Finally, we prove that, among the solutions of the considered problem, there exists one minimizing the given cost functional.

Keywords: optimal feedback control, Bingham model, weak solution, multivalued map, approximation-topological approach.