ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 485, № 2, с. 153–157

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977.1, 517.977.5

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ОПТИМАЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА В (B)-ПРОСТРАНСТВАХ. ПРИМЕРЫ ДЛЯ ОДУ В $\mathbb{R}^n$

А. И. Прилепко

Представлено академиком РАН В.А. Садовничим 17.10.2018 г.

Поступило 17.10.2018 г.

Рассматриваются задачи управления и наблюдения для операторных уравнений первого рода в банаховых пространствах, для которых приводится критерий управляемости. В случае рефлексивных строго выпуклых (B)-пространств используются BUME-метод и метод монотонных отображений для нахождения оптимальных управлений, сформулирован также абстрактный принцип максимума. В качестве примера исследуются указанные задачи для систем ОДУ в $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: монотонные отображения, BUME-метод, оптимальное управление, уравнение первого рода, принцип максимума.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-56524852153-157

1. Всюду в сообщении (B)-пространства считаются вещественными и используются обозначения из [5, 8] и др. Пусть даны (B)-пространства U, E и их сопряжённые U^*, E^*. Задан линейный замкнутый оператор A: $D(A) \to E$, $\overline{D(A)} = U$ и его банахово сопряжённый A^*: $D(A^*) \to U^*$, $D(A^*) \subset E^*$. Введём на $D(A)$ норму графика, тогда U_A есть (B)-пространство и оператор A рассматривается как ограниченный $A \in \mathcal{L}(U_A, E)$. Для A и A^* рассмотрим уравнения первого рода как задачи управления и наблюдения.

З а д а ч а у п р а в л е н и я. Для данного $e \in E$ найти $u \in D(A)$ из уравнения

$$Au = e. \tag{1}$$

З а д а ч а н а б л ю д е н и я. Для данного $e^* \in D(A^*)$ получить обратное неравенство для уравнения

$$A^*e^* = u^*, \quad u^* \in U^*. \tag{1*}$$

Решение $u_e \in D(A)$ задачи (1) при заданном $e \in E$ называем точным управлением или просто управлением, а через U_e обозначаем множество всех управлений $u_e \in U_e \subset U$. Управление с минимальной нормой называем оптимальным, т.е. $u_e^{\text{opt}} \equiv u_e^o$ — оптимальное управление (1), если

$$\|u_e^o\|_U = \inf\{\|u_e\|_U : \forall u_e \in U_e\}.$$

Задача (1*) называется непрерывно наблюдаемой (см. [8]), если выполняется обратное неравенство наблюдаемости, т.е. $\exists \mu > 0$: $\|A^*e^*\|_{U^*} \ge \mu \|e^*\|_{E^*}$ $\forall e^* \in D(A^*)$. Последнее неравенство равносильно выполнению двух равенств $R(A^*) = \overline{R(A^*)}$, $N(A^*) = 0$; число μ называется константой наблюдаемости. Если $N(A^*) = 0$, то задача (1*) называется наблюдаемой.

Задача (1) называется плотно (или аппроксимативно) управляемой, если $\overline{R(A)} = E$.

Сформулируем некоторые теоремы Банаха (см. [5, гл. 3, § 1; 3, гл. 7, § 5] для замкнутых операторов в терминах управления и наблюдения.

Т е о р е м а 1 (Критерий управляемости). *Существование точного управления u_e задачи* (1) *при любом $e \in E \Leftrightarrow R(A) = E \Leftrightarrow$ непрерывной наблюдаемости* $(1^*) \Leftrightarrow \|(A^*)_\ell^{-1}\| \le \mu^{-1} \Leftrightarrow \{U_e = A_r^{-1}(E)\}$, $A \in \mathcal{L}(U_A, E)$, *здесь $U_e \ne \phi$ при $e \ne 0$, $U_e \subset U$; A_r^{-1} — правый обратный для A, а $(A^*)_\ell^{-1}$ — левый обратный оператор для A^*.*

Т е о р е м а 1′ (Аппроксимативная управляемость). *Плотная* (*или аппроксимативная*) *управляемость* (1), *т.е.* $\overline{R(A)} = E \Leftrightarrow$ *наблюдаемости* (1*), *т.е.* $N(A^*) = 0$.

2. В данном пункте дополнительно предполагается, что (B)-пространства рефлексивные и строго выпуклые, причём $A \in \mathcal{L}(U, E)$, $A^* \in \mathcal{L}(E^*, U^*)$.

Т е о р е м а 2. *Пусть* (B)-*пространства U, U^*, E, E^* — рефлексивные и строго выпуклые. Критерий*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: *prilepko.ai@yandex.ru*

управляемости (*теорема* 1) $\Leftrightarrow$ *существованию единственного оптимального управления* $u_e^o \neq 0$, *при* $e \neq 0$; $u_e^o \in U_e \subset U$.

Обозначим через $J_U \in (U^* \to U)$ нелинейное дуальное отображение (см. [1, 4, 8]). Введём главное отображение [8] $\Lambda \in (E^* \to E)$ по правилу $\Lambda = AJ_U A^*$. Это отображение называем ещё оптимальным отображением для задачи (1).

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\Lambda e^* = e, \tag{2}$$

где элемент $e \in E$ задан, а $e^* \in E^*$ является искомым.

Теорема 3. *Отображение* $\Lambda \in (E^* \to E)$ *является биективным* (*т.е. взаимно однозначным*, *при этом* $\Lambda^{-1} \in (E \to E^*)$) $\Leftrightarrow \exists \mu > 0\colon \forall e^* \in E^* \quad \|A^*e^*\|_{U^*} \geq \mu\|e^*\|_{E^*} \Leftrightarrow \langle \Lambda e^*, e^* \rangle_{EE^*} = \|A^*e^*\|_{U^*}^2 \geq \mu^2\|e^*\|_{E^*}^2 \ \forall e^* \in E^*$. *Здесь* $\mu > 0$ — *константа непрерывной наблюдаемости*.

Теорема 4. *Критерий управляемости* (*теорема* 1) $\Leftrightarrow$ *существованию единственного оптимального управления* $u_e^o \in U_e$, $u_e^o = J_U u_e^*$, *где* $u_e^* = A^*\Lambda^{-1}e \Leftrightarrow \langle u_e, u_e^* \rangle_{UU^*} = \langle u_e^o, u_e^* \rangle_{UU^*} \Leftrightarrow$ *абстрактному принципу максимума* (*см. теоремы* 5 *и* 6 *из* [8]), *кроме того*, *для* $e^* = \Lambda^{-1}e$ *справедлива оценка* $\|e^*\|_{E^*} = \|\Lambda^{-1}e\|_{E^*} \leq \dfrac{1}{\mu^2}\|e\|_E$, $\|u_e^o\|_U \leq \dfrac{1}{\mu}\|e\|_E$ *с константой* $\mu > 0$, *причём* $U_e = N(A) + u_e^o$, $u_e^o \in N(A)^\perp$.

3. В данном пункте для ОДУ в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим указанные выше задачи. Фиксируем число $T \in (0, +\infty)$; $\mathcal{I} = (0, T)$ и гильбертовы пространства $E = E^* = \mathbb{R}^n$, $E_1 = E_1^* = \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \leq n$. Обозначим (B)-пространства: $L^p(\mathcal{I}; E)$ с нормой $\|g\|_p$ и пространства Соболева $W^{k,p}(\mathcal{I}; E)$, $1 \leq p \leq \infty$, $k \geq 0$ — целое число, с нормой

$$\|g\|_{k,p} = \|g\|_p + \|g^{(k)}\|_p.$$

Далее пусть даны (вещественные): $(n \times n)$-матрица $A(t) \in L^1(\mathcal{I}; n \times n)$ и её транспонированная $A^*(t)$; $(n \times m)$-матрица $B(t)$ (с ненулевой нормой) и её транспонированная $B^*(t)$, причём $B(t)$, $B^*(t) \in L^q(\mathcal{I}; \cdot)$, $1 < q < \infty$, либо $B(t), B^*(t) \in L^\infty(\mathcal{I}; \cdot)$. Управление $u(t)$ ищем из пространства $U = L^p(\mathcal{I}; E_1)$, $1 < p < \infty$, при этом $U^* = L^q(\mathcal{I}; E_1^*)$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. В этих обозначениях рассмотрим следующую задачу.

Задача управления. Найти $u(t) \in U$ и $y(t) \in W^{1,1}(\mathcal{I}; E)$ из условий

$$\begin{aligned} &\dot{y}(t) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \ t \in \mathcal{I}, \\ &y(0) = 0, \ y(T) = e. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $e \in E$ дано, $y(t) = y(t; u)$, при этом $y(t) \in W^{1,1}(\mathcal{I}; E)$ для случая $B(t) \in L^q$ и $y(t) \in W^{1,p}(\mathcal{I}; E)$ для $B(t) \in L^\infty$ в силу известных свойств решения задачи Коши. Решение $u_e(t)$ задачи (3) называем управлением, а $y_e(t)$ — траекторией управления, обозначим $U_e \subset U$ множество всех управлений. Как и выше, управление с минимальной нормой называем оптимальным, т.е. $u_e^{\text{opt}} \equiv u_e^o$ — оптимальное управление (3), если $\|u_e^o\|_U = \inf\{\|u_e\|_U \colon \forall u_e \in U_e\}$, а $y_e^o(t)$ есть соответствующая оптимальная траектория.

Запишем задачу (3) как операторную задачу управления. Для заданного элемента $e \in E$ найти $u(t) \in U = L^p(\mathcal{I}; E_1)$, $1 < p < \infty$, из условий

$$A_T u \equiv \int\limits_0^T S_A(T, t)B(t)u(t)dt = e, \tag{4}$$

где $A_T \in \mathcal{L}(U, E)$, $S_A(t, \tau)$ — абсолютно непрерывная эволюционная матрица нестационарной задачи Коши; для постоянной матрицы A, $S_A = e^{A(t-\tau)}$.

Сопряжённая к (4) задача есть задача наблюдения

$$A_T^* e^* = u^*, \quad A_T^* \in \mathcal{L}(E^*, U^*), \tag{5}$$

для которой требуется получить обратное неравенство. Задача (5) может быть записана в виде $B^*(t)z^*(t) = u^*(t)$, где $z^*(t) = S_A^*(T, t)e^*$ — абсолютно непрерывное решение задачи

$$\begin{aligned} &\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t), \ t \in \mathcal{I}, \\ &z(T) = e^*, \end{aligned}$$

причём $u^*(t) \in L^q$ для случая $B^*(t) \in L^q$ и $u^*(t) \in L^\infty \subset L^q$ для $B^*(t) \in L^\infty$.

Теорема 5. *Задача* (3) (*или* (4)) *управляема*, *т.е. существует* $u_e \neq 0$ *при* $e \neq 0 \Leftrightarrow R(A_T) = E \Leftrightarrow$ *непрерывной наблюдаемости* (5), *т.е. существованию числа* $\mu(T) > 0$ *такого*, *что* $\|A_T^*e^*\|_{U^*} \geq \mu_T\|e^*\|_{E^*}$ *при всех* $e^* \in E^* \Leftrightarrow R(A_T^*) = \overline{R(A_T^*)}$, $N(A_T^*) = 0$.

Задача (5) называется вполне наблюдаемой, если $N(A_T^*) = 0$. Для общего случая п. 3 $N(A_T^*) = 0 \Leftrightarrow \overline{R(A_T)} = E$, т.е. задача (4) плотно (или аппроксимативно) управляема. Позже покажем, что для случая $B(t) \in L^2(\mathcal{I}; \cdot)$ либо $B(t) \in L^\infty(\mathcal{I}; \cdot)$ условие

$N(A_T^*) = 0$ равносильно точной управляемости задачи (3) (или (4)).

Введём оператор оптимальности $\Lambda_T = A_T J_U A_T^*$, где $J_U \in (U^* \to U)$ — дуальное отображение, $U^* = L^q(\mathcal{I};\, E_1^*)$, $U = L^p(\mathcal{I};\, E_1)$, $1 < p < \infty$, и рассмотрим операторную задачу оптимальности. Требуется найти $e^* \in E^*$ из уравнения

$$\Lambda_T e^* \equiv \int_0^T S_A(T,\, t)B(t)J_U(t)B^*(t)S_A^*(T,\, t)e^* dt = e, \quad (10)$$

где $\Lambda_T \in (E^* \to E)$, а элемент $e \in E$ задан.

Сформулируем обратную задачу оптимальности. Пусть матрица $B(t) \in L^q$, $1 < q < \infty$, либо $B(t) \in L^\infty$, дан элемент $e \in E$, а требуется найти $e^* \in E^*$ и $w(t)$ из условий

$$\begin{gathered}\dot{w}(t) = A(t)w(t) + G_\Lambda(t)e^*,\ t \in \mathcal{I};\\ w(0) = 0,\ w(T) = e,\end{gathered} \quad (11)$$

где оператор $G_\Lambda(t) \equiv B(t)J_U B^*(t)S_A^*(T,\, t)$ дан и такой, что $G_\Lambda \in L^1$ при $B(t) \in L^q$ и $G_\Lambda \in L^p$ при $B(t) \in L^\infty$. Отметим, что при этом решение $w(t)$ будет принадлежать пространству Соболева $W^{1,1}(\mathcal{I};\, E)$ для случая $B(t) \in L^q$ и $W^{1,p}(\mathcal{I};\, E)$ для $B(t) \in L^\infty$.

Теорема 6. *Пусть матрица $B(t) \in L^q(\mathcal{I};\, n \times m)$, $1 < q < \infty$, либо $B(t) \in L^\infty(\mathcal{I};\, n \times m)$, $U = L^p(\mathcal{I};\, E_1)$, $U^* = L^q(\mathcal{I};\, E_1^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Задача (10) $\Leftrightarrow$ задаче (11). В этом случае непрерывная наблюдаемость задачи (5) $\Leftrightarrow \langle \Lambda_T e^*,\, e^* \rangle_{EE^*} = \|A_T^* e^*\|_{U^*}^2 \ge \mu^2(T)\|e^*\|_{E^*}^2$ $\forall e^* \in E^*$, причём $\Lambda_T \in (E^* \to E)$ есть биективное отображение и для решения $e^* = \Lambda_T^{-1}e$ справедлива оценка $\|e^*\|_{E^*} \le \frac{1}{\mu_T^2}\|e\|_E$.*

Теорема 7. *Пусть матрица $B(t) \in L^q(\mathcal{I};\, n \times m)$, $1 < q < \infty$, либо $B(t) \in L^\infty(\mathcal{I};\, n \times m)$, $U = L^p(\mathcal{I};\, E_1)$, $U^* = L^q(\mathcal{I};\, E_1^*)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Непрерывная наблюдаемость задачи (5) $\Leftrightarrow$ существованию единственного $u_e^o = J_U u_e^*$, где элемент $u_e^* = A_T^* \Lambda_T^{-1} e$, причём $\|u_e^o\|_U^2 \le \frac{1}{\mu_T^2}\|e\|_E^2 \Leftrightarrow \langle u_e,\, u_e^* \rangle_{UU^*} = \langle u_e^o,\, u_e^* \rangle_{UU^*} \Leftrightarrow$ выполнению интегрального принципа максимума*

$$\max_{u_e \in U_e} \int_0^T \mathcal{H}(y_e^o(t),\, u_e(t),\, z_e^*(t))dt = \int_0^T \mathcal{H}(y_e^o(t),\, u_e^{\mathrm{opt}}(t),\, z_e^*(t))dt,$$

где

$$\mathcal{H}(y_e^o(t),\, u_e(t),\, z_e^*(t)) \equiv \equiv \langle A(t)y_e^o(t) + B(t)u_e(t),\, z_e^*(t) \rangle_{EE^*} - |u_e(t)|_{E_1}^p,$$

а $z_e^*(t) = S_A^*(T,\, t)\Lambda_T^{-1}e$ с системой оптимальности $\dot{y}_e^o(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_e^*}$; $y_e^o(0) = 0$, $y_e^o(T) = e$; $\dot{z}_e^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_e^o}$; $z_e^*(T) = \Lambda_T^{-1}e \Leftrightarrow$ двухточечной задаче оптимальности

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_e^o(t) \\ z_e^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)J_U B^*(t) \\ 0 & -A^*(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_e^o(t) \\ z_e^*(t) \end{pmatrix},\ t \in \mathcal{I},$$
$$y_e^o(0) = 0,\ y_e^o(T) = e;\ z_e^*(T) = \Lambda_T^{-1}e,$$

в которой $z_e^* \in W^{1,1}(\mathcal{I};\, E^*)$, $y_e^o \in W^{1,1}$ при $B \in L^q$; $y_e^o \in W^{1,p}$ при $B \in L^\infty$.

4. Рассмотрим случай $B(t) \in L^2(\mathcal{I};\, n \times m)$, $U = U^* = L^2(\mathcal{I};\, E_1)$ либо $B(t) \in L^\infty(\mathcal{I};\, n \times m)$, $U = L^p(\mathcal{I};\, E_1)$, $U^* = L^q(\mathcal{I};\, E_1^*)$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. При этих условиях введём матрицу $\Gamma_T = A_T A_T^*$ — грамиан управления (3).

Рассмотрим задачу нахождения $e^* \in E^*$ из уравнения

$$\Gamma_T e^* = e, \quad \Gamma_T \in \mathcal{L}(E^*,\, E) \quad (12)$$

с заданным $e \in E$. Введём обратную задачу управляемости. Для данного элемента $e \in E$ найти $e^* \in E^*$ и функцию $w(t)$ из условий

$$\begin{gathered}\dot{w}(t) = A(t)w(t) + G_\Gamma(t)e^*, \quad t \in \mathcal{I};\\ w(0) = 0,\ w(T) = e,\end{gathered} \quad (13)$$

где матрица $G_\Gamma(t) \equiv B(t)B^*(t)S_A^*(T,\, t)$ дана и такова, что $G_\Gamma \in L^1$ при $B(t) \in L^2$ и $G_\Gamma \in L^\infty$ при $B(t) \in L^\infty$. Отметим, что при этом решение $w(t)$ будет принадлежать пространству Соболева $W^{1,1}(\mathcal{I};\, E)$ для случая $B(t) \in L^2$ и $W^{1,\infty}(\mathcal{I};\, E)$ для $B(t) \in L^\infty$.

Утверждение 1. *Задача* (12) $\Leftrightarrow$ *задаче* (13) $\Leftrightarrow \langle \Gamma_T e^*,\, e^* \rangle_{EE^*} = \|A_T^* e^*\|_{L^2}^2$.

Теорема 8. *Пусть матрица $B(t) \in L^2(\mathcal{I};\, n \times m)$ либо $B(t) \in L^\infty(\mathcal{I};\, n \times m)$. Вполне наблюдаемость задачи (5), т.е. выполнение равенства $N(A_T^*) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Gamma_T = \Gamma_T^* > 0$; $\exists \mu_\Gamma(T) > 0$: $\langle \Gamma_T e^*,\, e^* \rangle_{EE^*} \ge$ $\Gamma_T = \Gamma_T^* > 0$, $\|\Gamma_T^{-1}\| \le \frac{1}{\mu_\Gamma^2(T)} \Leftrightarrow \exists u_e = u_\Gamma^*$, $u_\Gamma^* = A_T^* \Gamma_T^{-1} e$,*

u_Γ^* — *решение задачи* (3) *или* (4), *причём справедлива оценка* $\|u_\Gamma^*\|_{L^2}^2 \le \dfrac{1}{\mu_\Gamma^2(T)}\|e\|_E^2 \Leftrightarrow$ *непрерывной наблюдаемости задачи* (5) $\Leftrightarrow$ *теоремам* 6 *и* 7.

Следствие 1. *Пусть* $B(t) \in L^2(\mathcal{I}; n\times m)$, $U = U^* = L^2(\mathcal{I}; E_1)$. *Условие* $N(A_T^*) = 0 \Leftrightarrow$ *существованию единственного оптимального решения* $u_e^o = A_T^*\Gamma_T^{-1}e$; $\|u_e^o\|_{L^2}^2 \le \dfrac{1}{\mu_\Gamma^2(T)}\|e\|_E^2$, $\|\Gamma_T^{-1}\| \le \dfrac{1}{\mu_\Gamma^2(T)}$. *Причём при* $p = 2$ *имеем* $J_U = I$ *и справедлив принцип максимума теоремы* 7. *Если дополнительно выполняется оценка* $\|e\|^2 \le M^2\mu_\Gamma^2$, $M > 0$, *то* $\|u_e^o\|_{L^2}^2 \le M^2$.

Следствие 2. *Пусть* $B(t) \in L^\infty(\mathcal{I}; n\times m)$, $U = L^p(\mathcal{I}; E_1)$, $U^* = L^q(\mathcal{I}; E_1^*)$, $1 < p < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Условие* $N(A_T^*) = 0 \Leftrightarrow$ *существованию единственного оптимального решения* $u_e^o = J_U u_e^*$, $u_e^* = A_T^*\Lambda_T^{-1}e$, *причём* $\|u_e^o\|_{L^p}^2 \le \dfrac{1}{\mu^2(T)}\|e\|_E^2$, *где* $\mu(T) > 0$ — *константа непрерывной наблюдаемости. В этом случае для* $1 < p \le 2$ *справедлива другая оценка* $\|u_e^o\|_{L^p}^2 \le \dfrac{1}{\mu_1^2(T)}\|e\|_E^2$, *где* $\mu_1(T) = T^{1/2-1/q}\mu_\Gamma(T)$, $q = \dfrac{p}{p-1} \ge 2$; $\|\Gamma_T^{-1}\| \le \dfrac{1}{\mu_\Gamma^2(T)}$.

Замечание 1. Обозначим через $KC(\mathcal{I};\cdot)$ множество кусочно-непрерывных матриц или вектор-функций. Пусть в условии следствия 1 дополнительно $B(t) \in KC(\mathcal{I};\cdot)$. Тогда оптимальное управление $u_e^o \in L^2(\mathcal{I}, E_1)$. В этом случае справедливы утверждения и оценки следствия 1.

5. Приведём краткое доказательство основных результатов п. 4 для случая $B(t) \in L^2(\mathcal{I}; n\times m)$, $U = U^* = L^2(\mathcal{I}; E_1)$. Будем иметь $\Gamma_T = A_T A_T^* = \Gamma_T^*$, $\langle \Gamma_T e^*, e^*\rangle_{EE^*} = \int_0^T |B^*(t)S_A^*(T,t)e|_E^2 dt = \|A_T^* e^*\|_{L^2}^2$. Поэтому $N(A_T^*) = 0 \Leftrightarrow \Gamma_T = \Gamma_T^* > 0 \Leftrightarrow \exists \mu_\Gamma > 0$: $\langle \Gamma_T e^*, e^*\rangle_{EE^*} \ge \mu_\Gamma^2\|e^*\|_{E^*}^2 \Leftrightarrow \Gamma_T = \Gamma_T^* \ge 0$, $\det\Gamma_T \ne 0$. При этом $\|\Gamma_T^{-1}\| \le \dfrac{1}{\mu_\Gamma^2}$ и $\Lambda_T = \Gamma_T$, поскольку $J_U = I$ в $L^2 \Leftrightarrow u_e(t) = A_T^*\Gamma_T^{-1}e$, решение (3) или (4) $\Leftrightarrow R(A_T^*) = \overline{R(A_T^*)}$, $N(A_T^*) = 0$. Пусть u_e — произвольное решение (3), тогда $u_e = u_e^* + u_{eo}$, где $u_e^*(t) = A_T^*\Gamma_T^{-1}e$ — решение (3), $u_{eo} \in N(A_T)$, а так как $R(A_T^*) = \overline{R(A_T^*)} = N(A_T)^\perp$ и $u_e^* \in R(A_T^*)$, то $(u_{eo}, u_e^*)_U = 0$. Поэтому $\|u_e\|^2 = \|u_e^*\|^2 + \|u_{eo}\|^2$ и $\|u_e\| \ge \|u_e^*\|$, т.е. $u_e^*(t) = u_e^o(t)$ — оптимальное управление. Далее $(u_e, u_e^*)_U = (u_e^*, u_e^*)_U$ и

$$\|u_e^o\|^2 = (A_T^*\Gamma_T^{-1}e, A_T^*\Gamma_T^{-1}e)_U = \langle e, \Gamma_T^{-1}e\rangle_{EE^*} \le \frac{1}{\mu_\Gamma^2}\|e\|^2.$$

Заметим, что $u_e^* = B^*(t)z_e^*(t)$, где $z_e^*(t)$ есть решение задачи $\dot z(t) = -A^*(t)z(t)$, $t \in \mathcal{I}$, $z(T) = \Gamma_T^{-1}e$. Поэтому

$$(u_e, u_e^*)_U = (u_e, u_e^o)_U = (u_e, B^*(t)z_e^*(t))_U =$$
$$= \int_0^T \langle B(t)u_e(t), z_e^*(t)\rangle_{EE^*} dt = \int_0^T \langle B(t)u_e^o(t), z_e^*(t)\rangle_{EE^*} dt.$$

Верно равенство

$$\int_0^T \langle A(t)y_e^o(t), z_e^*(t)\rangle_{EE^*} dt = \int_0^T \langle y_e^o(t), A^*(t)z_e^*(t)\rangle_{EE^*} dt.$$

Введём функцию

$$\mathcal{H}(y_e^o(t), u_e(t), z_e^*(t)) \equiv$$
$$\equiv \langle A(t)y_e^o(t) + B(t)u_e(t), z_e^*(t)\rangle_{EE^*} - |u_e(t)|_{E_1}^2,$$

отсюда следует, что

$$\max_{u_e\in U_e}\int_0^T \mathcal{H}(y_e^o(t), u_e(t), z_e^*(t))dt =$$
$$= \int_0^T \mathcal{H}(y_e^o(t), u_e^{\mathrm{opt}}(t), z_e^*(t))dt,$$

причём справедливы равенства

$$\dot y_e^o(t) = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z_e^*};\quad y_e^o(0) = 0,\ y_e^o(T) = e,$$
$$\dot z_e^*(t) = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y_e^o},\quad z_e^*(T) = \Gamma_T^{-1}e,$$

что эквивалентно двухточечной задаче оптимальности

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_e^o(t)\\ z_e^*(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)B^*(t)\\ 0 & -A^*(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_e^o(t)\\ z_e^*(t)\end{pmatrix},\quad t \in \mathcal{I},$$
$$y_e^o(0) = 0,\ y_e^o(T) = e,\quad z_e^*(T) = \Gamma_T^{-1}e.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнберг М.М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. М.: Наука, 1972. 416 с.
2. *Васильев Ф.П.*, *Куржанский М.А.*, *Потапов М.М.*, *Разгулин А.В.* Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения. М.: МАКС Пресс, 2010. 384 с.
3. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967. 624 с.

4. *Гаевский Х.*, *Грёгер К.*, *Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. 336 с.

5. Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. М.: Наука, 1972. 544 с.

6. *Фурсиков А.В.* Оптимальное управление распределёнными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Науч. кн., 1999. 350 с.

7. *Prilepko A.I.*, *Orlovsky D.G.*, *Vasin I.A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. N.Y.: Marcel Dekker, 2000. 750 p.

8. *Прилепко А.И.* // ДАН. 2017. Т. 476. № 4. С. 377–380.

CONTROLLABILITY AND OPTIMAL CONTROLLABILITY FOR OPERATOR EQUATIONS OF THE FIRST KIND IN (B)-SPACES. EXAMPLES FOR ODE IN $\mathbb{R}^n$

A. I. Prilepko

Presented by Academician of the RAS V.A. Sadovnichiy October 17, 2018

Received October 17, 2018

For control and observation problems considered for operator equations of the first kind in Banach spaces, an controllability criterion is stated. In the case of reflexive strictly convex (B)-spaces, the BUME method and the method of monotone mappings are used to find optimal controls and an abstract maximum principle is formulated. The indicated problems for ODE systems in $\mathbb{R}^n$ are investigated as an example.

Keywords: monotone mappings, BUME method, optimal control, first kind equation, maximum principle.