ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2019, том 486, № 1, с. 12–19

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.223

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В ОБЛАСТИ, ПЕРФОРИРОВАННОЙ ВДОЛЬ (*n* – 1)-МЕРНОГО МНОГООБРАЗИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ГРАНИЦЕ ПЕРФОРАЦИЙ: КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

М. Н. Зубова, Т. А. Шапошникова*

Представлено академиком РАН В.В. Козловым 24.01.2019 г.

Поступило 29.01.2019 г.

Изучена задача усреднения для уравнения диффузии в области, перфорированной вдоль $(n-1)$-мерного многообразия с динамическими краевыми условиями на границе перфораций. Построена усреднённая модель, являющаяся задачей сопряжения для уравнения диффузии, причём условия сопряжения содержат слагаемое с памятью. Доказана теорема о сходимости решений исходной задачи к решению усреднённой.

Ключевые слова: усреднение, уравнение диффузии, динамические краевые условия, перфорированная область.

DOI: https://doi.org/10.31857/S0869-5652486112-19

В сообщении изучена задача усреднения для уравнения диффузии в области, перфорированной вдоль $(n-1)$-мерного многообразия с динамическими краевыми условиями на границе перфораций, содержащими параметр $\varepsilon^{-\gamma}$, $\gamma = \dfrac{n-1}{n-2}$, $n \geq 3$, ε — малый положительный параметр. Предполагается, что перфорация образована шарами G_ε^j, $j \in \mathbb{Z}'$, где $\mathbb{Z}'$ — множество векторов вида $z = (0, z_2, \ldots, z_n)$ с целыми координатами z_i, $i = 2, 3, \ldots, n$, радиуса $a_\varepsilon = C_0\varepsilon^\gamma$, $C_0 = \text{const} > 0$, расположенными ε-периодически вдоль плоскости $x_1 = 0$.

Задачи усреднения в перфорированных по всему объему областях в случае, когда диаметр перфораций равен $C\varepsilon$, где ε — период структуры, с динамическими краевымии условиями на границе полостей, изучены в [1, 2].

Целью данной работы является построение и обоснование усреднённой модели, которая в данном случае является задачей сопряжения для уравнения диффузии, причём условия сопряжения содержат слагаемое с памятью.

Усреднение краевых и начально-краевых задач с классическими краевыми условиями типа Робина изучены во многих работах, см. [3–10] и список литературы там.

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, с гладкой границей $\partial\Omega$, $S_0 = \Omega \cap \{x_1 = 0\} \neq \phi$ — область на плоскости $x_1 = 0$, $Y = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)^n$, $G_0 = \{x: |x| < 1\}$. Обозначим $\delta B = \{x \mid \delta^{-1}x \in B\}$, $\delta > 0$, $\Omega^+ = \Omega \cap \{x_1 > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{x_1 < 0\}$.

Введём множество $\widetilde{G_\varepsilon} = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} (a_\varepsilon G_0 + \varepsilon j) = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{Z}} G_\varepsilon^j$, где $\varepsilon > 0$, $a_\varepsilon = C_0\varepsilon^\gamma$, $\gamma = \dfrac{n-1}{n-2}$, $C_0 > 0$.

Положим $G_\varepsilon = \bigcup\limits_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j$, где $\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}': \rho(\partial\Omega, \overline{G_\varepsilon^j}) \geq 2\varepsilon\}$. Заметим, что $|\Upsilon_\varepsilon| = d\varepsilon^{1-n}$, $d = \text{const} > 0$. Обозначим через T_r^j шар с центром в точке P_ε^j радиуса r, где P_ε^j — центр куба $Y_\varepsilon^j = \varepsilon Y + j\varepsilon, j \in \Upsilon_\varepsilon$.

Определим множества

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon},\ S_\varepsilon = \partial G_\varepsilon,\ \partial\Omega_\varepsilon = S_\varepsilon \cup \partial\Omega. \qquad (1)$$

В $Q_\varepsilon^T = \Omega_\varepsilon \times (0, T)$ рассмотрим задачу

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

**E-mail: shaposh.tan@mail.ru*

$$\begin{aligned}
&\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f(x,t), \qquad (x,t)\in Q_\varepsilon^T,\\
&\varepsilon^{-\gamma}\partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-\gamma} a(x) u_\varepsilon = \varepsilon^{-\gamma} g(x), \qquad (x,t)\in S_\varepsilon^T = S_\varepsilon\times(0,T),\\
&u_\varepsilon = 0, \qquad (x,t)\in \Gamma^T = \partial\Omega\times(0,T),\\
&u_\varepsilon(x,0)=0, \qquad x\in\Omega_\varepsilon,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $f\in L^2(Q^T)$, $Q^T=\Omega\times(0,T)$, $a(x)\ge a_0>0$, $a_0=\text{const}$, $a(x), g(x)\in C^1(\overline{\Omega})$, ν — вектор внешней единичной нормали к границе S_ε, $\gamma=\dfrac{n-1}{n-2}$, $n\ge 3$.

Функция $u_\varepsilon\in L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $\partial_t u_\varepsilon\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, $\partial_t u_\varepsilon\in L^2(0,T;H^{-1/2}(S_\varepsilon,\partial\Omega))$, $u_\varepsilon(x,0)=0$, если $x\in\Omega_\varepsilon$, называется обобщённым решением задачи (2), если выполняется интегральное тождество

$$\int_0^T\langle\partial_t u_\varepsilon, v\rangle_{\Omega_\varepsilon}dt+\varepsilon^{-\gamma}\int_0^T\langle\partial_t u_\varepsilon, v\rangle_{S_\varepsilon}dt+$$

$$+\int_{Q_\varepsilon^T}\nabla u_\varepsilon\nabla v\,dxdt+\varepsilon^{-\gamma}\int_0^T\int_{S_\varepsilon}a(x)u_\varepsilon v\,dsdt=$$

$$=\varepsilon^{-\gamma}\int_0^T\int_{S_\varepsilon}g(x)v(x,t)\,dsdt+\int_{Q_\varepsilon^T}fv\,dxdt, \tag{3}$$

где v — произвольная фукция из $L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$, скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Omega_\varepsilon}$ обозначают отношение двойственности между пространствами $H^{-1}(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)$ и $H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{S_\varepsilon}$ — отношение двойственности между $H^{-1/2}(S_\varepsilon,\partial\Omega)$ и $H^{1/2}(S_\varepsilon,\partial\Omega)$. Через $H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)$ обозначено пространство, полученное замыканием в $H^1(\Omega_\varepsilon)$ множества бесконечно дифференцируемых функций в $\overline{\Omega}_\varepsilon$, обращающихся в ноль в окрестности $\partial\Omega$.

Теорема 1. *Задача* (2) *имеет единственное обобщённое решение и для него имеет место оценка*

$$\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega_\varepsilon))}+\varepsilon^{-\gamma/2}\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(S_\varepsilon))}+$$

$$+\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))}+\varepsilon^{-\gamma/2}\|u_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(S_\varepsilon))}\le K, \tag{4}$$

где постоянная K здесь и далее не зависит от ε.

Доказательство. Докажем единственность обобщённого решения задачи (2). Предположим, что $u_{\varepsilon,1}$ и $u_{\varepsilon,2}$ — два обобщённых решения задачи (2). Для разности $w_\varepsilon=u_{\varepsilon,1}-u_{\varepsilon,2}$ имеет место равенство

$$\int_0^T\langle\partial_t w_\varepsilon, w_\varepsilon\rangle_{\Omega_\varepsilon}dt+\varepsilon^{-\gamma}\int_0^T\langle\partial_t w_\varepsilon, w_\varepsilon\rangle_{S_\varepsilon}dt+$$

$$+\int_{Q_\varepsilon^T}|\nabla w_\varepsilon|^2dxdt+\varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon^T}a(x)w_\varepsilon^2dsdt=0.$$

Следовательно, имеем

$$\frac12\|w_\varepsilon(x,T)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+\frac12\varepsilon^{-\gamma}\|w_\varepsilon(x,T)\|^2_{L^2(S_\varepsilon)}+$$

$$+\int_{Q_\varepsilon^T}|\nabla w_\varepsilon|^2dxdt+\varepsilon^{-\gamma}\int_{S_\varepsilon^T}a(x)w_\varepsilon^2ds=0. \tag{5}$$

Из (5) вытекает, что $w_\varepsilon=0$ п.в. в Q_ε^T.

Положим $H_\varepsilon=L^2(\Omega_\varepsilon)\times L^2(S_\varepsilon)$ и зададим на нём скалярное произведение

$$((u,\tilde u),(v,\tilde v))_{H_\varepsilon}=(u,v)_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+\varepsilon^{-\gamma}(\tilde u,\tilde v)_{L^2(S_\varepsilon)}.$$

Очевидно, что H_ε — гильбертово пространство. Введём $V_{0,\varepsilon}=\{(u,u|_{S_\varepsilon}):u\in H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)\}$, где $u|_{S_\varepsilon}$ — след функции $u\in H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)$ на границе S_ε. Легко видеть, что $V_{0,\varepsilon}$ — замкнутое подпространство пространства $H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)\times H^{1/2}(S_\varepsilon,\partial\Omega)$ с нормой

$$\|(v,v|_{S_\varepsilon})\|^2_{V_{0,\varepsilon}}=\|v\|^2_{H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)}+\|v|_{S_\varepsilon}\|^2_{H^{1/2}(S_\varepsilon,\partial\Omega)}. \tag{6}$$

В $H^{1/2}(S_\varepsilon,\partial\Omega)$ задана норма $\|v\|_{H^{1/2}(S_\varepsilon,\partial\Omega)}=\inf\{\|g\|_{H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)}:g|_{S_\varepsilon}=v\}$. Заметим, что эта норма эквивалентна норме, порождённой стандартным скалярным произведением в $H^{1/2}(S_\varepsilon,\partial\Omega)$, (см. [10]). Пространство $V_{0,\varepsilon}$ с нормой (6) является рефлексивным сепарабельным банаховым пространством, всюду плотным в H_ε (см. [2]).

Обозначим через $\{(w_j^\varepsilon, w_j^\varepsilon|_{S_\varepsilon})\}$, $j=1,2,\ldots$, ортонормированный базис в H_ε, линейная оболочка которого всюду плотна в $V_{0,\varepsilon}$.

Для доказательства существования обобщённого решения задачи (2) используем метод Галёркина. Будем искать элемент $(u_{\varepsilon,m},u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon})\in V_{0,\varepsilon}$ вида

$$(u_{\varepsilon,m}, u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon}) = \sum_{j=1}^{m} d_{m,j}^{\varepsilon}(t)(w_j^{\varepsilon}, w_j^{\varepsilon}|_{S_\varepsilon}),$$

удовлетворяющий системе уравнений

$$((\partial_t u_{\varepsilon,m}, \partial_t(u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon})), (w_k^{\varepsilon}, w_k^{\varepsilon}|_{S_\varepsilon}))_{H_\varepsilon} +$$

$$+(\nabla u_{\varepsilon,m}, \nabla w_k^{\varepsilon})_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma}(a(x)u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon}, w_k^{\varepsilon}|_{S_\varepsilon})_{L^2(S_\varepsilon)} =$$

$$= \varepsilon^{-\gamma}(g, w_k^{\varepsilon}|_{S_\varepsilon})_{L^2(S_\varepsilon)} + (f, w_k^{\varepsilon})_{L^2(\Omega_\varepsilon)},\ k = 1, 2, \ldots, m, \quad (7)$$

и начальному условию

$$(u_{\varepsilon,m}, u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon})|_{t=0} = 0.$$

Заметим, что (7) — задача Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $d_{m,j}^{\varepsilon}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, вида

$$\begin{aligned} &D'_{m,\varepsilon} = \mathcal{F}_{1,\varepsilon} D_{m,\varepsilon} + \mathcal{F}_{2,\varepsilon}(t), \\ &D_{m,\varepsilon}(0) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\mathcal{F}_{1,\varepsilon}$ — матрица с постоянными коэффициентами $m \times m$, $D_{m,\varepsilon}(t) = (d_{m,1}^{\varepsilon}(t), \ldots, d_{m,m}^{\varepsilon}(t))^T$, $D_{m,\varepsilon}\colon [0,T] \to \mathbb{R}^m$, $\mathcal{F}_{2,\varepsilon}(t) \in (L^2(0,T))^m$.

Хорошо известно, что система (8) имеет единственное решение, являющееся абсолютно непрерывной вектор-фукцией, определённой на $[0,T]$.

Получим оценки для $u_{\varepsilon,m}$. Умножая k-е уравнение системы (7) на $d_{m,k}^{\varepsilon}(t)$ и суммируя по $k = 1, 2, \ldots, m$, получим

$$(\partial_t u_{\varepsilon,m}, u_{\varepsilon,m})_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma}(\partial_t u_{\varepsilon,m}, u_{\varepsilon,m})_{L^2(S_\varepsilon)} +$$

$$+\|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma}\|\sqrt{a(x)}u_{\varepsilon,m}\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} =$$

$$= \varepsilon^{-\gamma}(g, u_{\varepsilon,m})_{L^2(S_\varepsilon)} + (f, u_{\varepsilon,m})_{L^2(\Omega_\varepsilon)}. \quad (9)$$

Интегрируем (9) по t от 0 до $\tau \in [0,T]$, получим

$$\frac{1}{2}\|u_{\varepsilon,m}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \frac{1}{2}\varepsilon^{-\gamma}\|u_{\varepsilon,m}(x,\tau)\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} +$$

$$+\int_0^\tau \|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\,dt + \varepsilon^{-\gamma}\int_0^\tau \|\sqrt{a(x)}u_{\varepsilon,m}\|^2_{L^2(S_\varepsilon)}\,dt =$$

$$= \varepsilon^{-\gamma}\int_0^\tau (g, u_{\varepsilon,m})_{L^2(S_\varepsilon)}\,dt + \int_0^\tau (f, u_{\varepsilon,m})_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\,dt.$$

Отсюда вытекает

$$\|u_{\varepsilon,m}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma}\|u_{\varepsilon,m}(x,\tau)\|^2_{L^2(S_\varepsilon)} +$$

$$+2\int_0^\tau \|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\,dt +$$

$$+2a_0\varepsilon^{-\gamma}\int_0^\tau \|u_{\varepsilon,m}\|^2_{L^2(S_\varepsilon)}\,dt \le$$

$$\le \int_0^\tau \|f(x,t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\,dt + \int_0^\tau \|u_{\varepsilon,m}(x,t)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\,dt +$$

$$+\varepsilon^{-\gamma}C_\delta \max_{\bar{\Omega}}|g(x)|^2\, T\,|S_\varepsilon| +$$

$$+\delta\varepsilon^{-\gamma}\int_0^\tau \|u_{\varepsilon,m}(x,t)\|^2_{L^2(S_\varepsilon)}\,dt. \quad (10)$$

Положим $\delta = 1 + 2a_0$ в (10). Тогда имеем

$$\|(u_{\varepsilon,m}, u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon})\|^2_{H_\varepsilon} \le C + \int_0^\tau \|(u_{\varepsilon,m}, u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon})\|^2_{H_\varepsilon}\,dt, \quad (11)$$

где C — положительная постоянная. Применяя лемму Гронуолла, получим

$$\|(u_{\varepsilon,m},\ u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon})\|_{H_\varepsilon} \le K, \quad (12)$$

для любого $\tau \in [0,T]$.

Из (10), (12) имеем

$$\int_0^\tau \|\nabla u_{\varepsilon,m}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}\,dt \le K, \quad (13)$$

где τ — произвольное число из отрезка $[0,T]$.

Применяя (12) и (13), имеем

$$\|(u_{\varepsilon,m}, u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon})\|_{L^2(0,T;V_{0,\varepsilon})} \le K. \quad (14)$$

Умножая (7) на $(d_{m,k}^{\varepsilon})'$ и суммируя по k от 1 до m, получим

$$\|(\partial_t u_{\varepsilon,m}, \partial_t u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon})\|^2_{H_\varepsilon} + (\nabla u_{\varepsilon,m}, \partial_t \nabla u_{\varepsilon,m})_{L^2(\Omega_\varepsilon)} +$$

$$+\varepsilon^{-\gamma}(a(x)u_{\varepsilon,m}, \partial_t u_{\varepsilon,m})_{L^2(S_\varepsilon)} =$$

$$= (f, \partial_t u_{\varepsilon,m})_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon^{-\gamma}(g, \partial_t u_{\varepsilon,m})_{L^2(S_\varepsilon)}. \quad (15)$$

Интегрируем (15) от 0 до $\tau \in [0,T]$, имеем

$$\int_0^\tau \|(\partial_t u_{\varepsilon,m}, \partial_t u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon})\|^2_{H_\varepsilon}\,dt + \frac{1}{2}\|\nabla u_{\varepsilon,m}(x,\tau)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} +$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon^{-\gamma}\|\sqrt{a(x)}u_{\varepsilon,m}(x,\tau)\|^2_{L^2(S_\varepsilon)}=$$

$$=\int_0^\tau (f,\partial_t u_{\varepsilon,m})_{L^2(\Omega_\varepsilon)}dt+\varepsilon^{-\gamma}\int_0^\tau (g,\partial_t u_{\varepsilon,m})_{L^2(S_\varepsilon)}dt\le$$

$$\le C_\delta\int_0^\tau \|f\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}dt+\delta\int_0^\tau \|\partial_t u_{\varepsilon,m}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}dt+$$

$$+C_\delta\varepsilon^{-\gamma}\int_0^\tau \|g\|^2_{L^2(S_\varepsilon)}dt+\delta\varepsilon^{-\gamma}\int_0^\tau \|\partial_t u_{\varepsilon,m}\|^2_{L^2(S_\varepsilon)}dt. \quad (16)$$

Полагая $\delta=\frac{1}{2}$, выводим

$$\|(\partial_t u_{\varepsilon,m},\partial_t u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon})\|_{L^2(0,T;H_\varepsilon)}+\max_{[0,T]}\|\nabla u_{\varepsilon,m}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+$$
$$+\varepsilon^{-\gamma/2}\max_{[0,T]}\|u_{\varepsilon,m}\|_{L^2(S_\varepsilon)}\le K, \quad (17)$$

где постоянная K не зависит от m и от ε.

Из оценок (12), (17) следует, что для некоторой подпоследовательности (сохраняем для неё обозначение исходной последовательности) при $m\to\infty$ имеем

$$u_{\varepsilon,m}\rightharpoonup u_\varepsilon \text{ слабо в } L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega)), \quad (18)$$

$$\partial_t u_{\varepsilon,m}\rightharpoonup \partial_t u_\varepsilon \text{ слабо в } L^2(Q_\varepsilon^T), \quad (19)$$

$$u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon^T}\to u_\varepsilon|_{S_\varepsilon^T} \text{ сильно в } L^2(S_\varepsilon^T), \quad (20)$$

$$\partial_t u_{\varepsilon,m}|_{S_\varepsilon^T}\rightharpoonup \partial_t u_\varepsilon|_{S_\varepsilon^T} \text{ слабо в } L^2(S_\varepsilon^T). \quad (21)$$

Применяя неравенства (12), (14), (17), выводим оценку (4).

Умножим равенства (7) на $b_k^\varepsilon(t)\in L^2(0,T)$, проинтегрируем его по t от 0 до T и перейдём к пределу при $m\to\infty$. Учитывая (18)–(21), получим

$$(\partial_t u_\varepsilon,b_k^\varepsilon(t)w_k^\varepsilon(x))_{L^2(Q_\varepsilon^T)}+\varepsilon^{-\gamma}(\partial_t u_\varepsilon,b_k^\varepsilon(t)w_k^\varepsilon(x))_{L^2(S_\varepsilon^T)}+$$
$$+(\nabla u_\varepsilon,\nabla(b_k^\varepsilon(t)w_k^\varepsilon(x)))_{L^2(Q_\varepsilon^T)}+\varepsilon^{-\gamma}(a(x)u_\varepsilon,b_k^\varepsilon w_k^\varepsilon)_{L^2(S_\varepsilon^T)}=$$
$$=\varepsilon^{-\gamma}(g,b_k^\varepsilon w_k^\varepsilon)_{L^2(S_\varepsilon^T)}+(f,b_k^\varepsilon(t)w_k^\varepsilon(x))_{L^2(Q_\varepsilon^T)}. \quad (22)$$

Принимая во внимание, что функции вида $\sum_{k=1}^N b_k^\varepsilon(t)(w_k^\varepsilon(x),w_k^\varepsilon(x)|_{S_\varepsilon})_{H_\varepsilon}$ всюду плотны в $L^2(0,T;V_{0,\varepsilon})$, получим, что u_ε удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t u_\varepsilon\phi\,dxdt+\varepsilon^{-\gamma}\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\partial_t u_\varepsilon\phi\,dsdt+$$
$$+\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla u_\varepsilon\nabla\phi\,dxdt+\varepsilon^{-\gamma}\int_0^T\int_{S_\varepsilon}a(x)u_\varepsilon\phi\,dsdt=$$
$$=\varepsilon^{-\gamma}\int_0^T\int_{S_\varepsilon}g(x)\phi\,dsdt+\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}f\phi\,dxdt, \quad (23)$$

где ϕ — произвольный элемент из $L^2(0,T;H^1(\Omega_\varepsilon,\partial\Omega))$. Кроме того, учитывая, что $u_{\varepsilon,m}(x,0)=0$, выводим $u_\varepsilon(x,0)=0$.

Из оценки (4) имеем

$$\|u_\varepsilon\|_{H^1(Q_\varepsilon^T)}\le K. \quad (24)$$

Следовательно, для u_ε существует H^1-продолжение $\tilde u_\varepsilon\in H^1(Q^T)$, $Q^T=\Omega\times(0,T)$, такое, что

$$\|\tilde u_\varepsilon\|_{H^1(Q^T)}\le K\|u_\varepsilon\|_{H^1(Q_\varepsilon^T)}, \quad (25)$$

$$\|\partial_t\tilde u_\varepsilon\|^2_{L^2(Q^T)}+\|\nabla_x\tilde u_\varepsilon\|^2_{L^2(Q^T)}\le$$
$$\le K\left(\|\partial_t u_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_\varepsilon^T)}+\|\nabla_x u_\varepsilon\|^2_{L^2(Q_\varepsilon^T)}\right). \quad (26)$$

Из оценок (25), (26) вытекает существование подпоследовательности (обозначим её так же, как исходную) такой, что при $\varepsilon\to 0$ имеем

$$\tilde u_\varepsilon\rightharpoonup u \text{ слабо в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \quad (27)$$

$$\partial_t\tilde u_\varepsilon\rightharpoonup \partial_t u \text{ слабо в } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad (28)$$

$$\tilde u_\varepsilon\to u \text{ сильно в } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad (29)$$

Теорема 2. *Пусть* $n\ge 3$, $\gamma=\frac{n-1}{n-2}$, u_ε — *обобщённое решение* (2). *Тогда функция u, определённая в* (27)–(29), *является обобщённым решением задачи*

$$\begin{aligned}
&\partial_t u-\Delta u=f(x,t), \qquad (x,t)\in Q^T,\\
&[u]\big|_{S_0}=0, \qquad t\in(0,T),\\
&[\partial_{x_1}u]\big|_{S_0}=(n-2)C_0^{n-2}\omega_n H_u(x,t), \qquad t\in(0,T), \quad (30)\\
&u=0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\
&u(x,0)=0, \qquad x\in\Omega,
\end{aligned}$$

где

$$H_u(x,t)=u(x,t)-\frac{(n-2)}{C_0}\int_0^t u(x,s)e^{-\left(a(x)+\frac{n-2}{C_0}\right)(t-s)}ds-$$

$$-\frac{g(x)(n-2)C_0^{n-2}\omega_n}{a(x)+\dfrac{n-2}{C_0}}\left(1-e^{-\left(a(x)+\frac{n-2}{C_0}\right)t}\right) \qquad (31)$$

и через $[h]|_{S_0}$ *обозначен скачок функции h в точках* $x\in S_0$, $t\in(0,T)$.

Доказательство. Из интегрального тождества (23) выводим, что u_ε удовлетворяет интегральному неравенству

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\partial_t\phi(\phi-u_\varepsilon)dxdt+\varepsilon^{-\gamma}\int_0^T\int_{S_\varepsilon}\partial_t\phi(\phi-u_\varepsilon)dsdt+$$

$$+\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}\nabla\phi\nabla(\phi-u_\varepsilon)dxdt+\varepsilon^{-\gamma}\int_0^T\int_{S_\varepsilon}a(x)\phi(\phi-u_\varepsilon)dsdt\ge$$

$$\ge\varepsilon^{-\gamma}\int_0^T\int_{S_\varepsilon}g(x)(\phi-u_\varepsilon)dsdt+\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}f(\phi-u_\varepsilon)dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\|\phi(x,0)\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}-\frac{1}{2}\varepsilon^{-\gamma}\|\phi(x,0)\|^2_{L^2(S_\varepsilon)}, \qquad (32)$$

где $\phi(x,t)=\psi(x)\eta(t)$, $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta\in C^1[0,T]$.

Для произвольной функции $\eta(t)\in C^1[0,T]$ и параметра $u\in\mathbb{R}$ введём функцию $H_{\varepsilon,j}(t)$ $(j\in\Upsilon_\varepsilon)$ как решение задачи Коши

$$\begin{gathered}H'_{\varepsilon,j}+\frac{n-2}{C_0}H_{\varepsilon,j}-a(P_\varepsilon^j)(u\eta-H_{\varepsilon,j})=u\eta'-g(P_\varepsilon^j),\\ H_{\varepsilon,j}(0)=u\eta(0).\end{gathered} \qquad (33)$$

Задача (33) при $u=\psi(P_\varepsilon^j)$, где $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$, имеет решение

$$H_{\varepsilon,j}(t)=\psi(P_\varepsilon^j)\eta(t)-\frac{n-2}{C_0}\int_0^t e^{\left(a\left(P_\varepsilon^j\right)+\frac{n-2}{C_0}\right)(s-t)}\psi(P_\varepsilon^j)\eta(s)ds-$$

$$-\frac{g(P_\varepsilon^j)}{a(P_\varepsilon^j)+\dfrac{n-2}{C_0}}\left(1-e^{-\left(a\left(P_\varepsilon^j\right)+\frac{n-2}{C_0}\right)t}\right). \qquad (34)$$

Обозначим через $w_\varepsilon^j(x)$ решение задачи

$$\begin{gathered}\Delta w_\varepsilon^j=0,\ x\in T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G_\varepsilon^j};\ w_\varepsilon^j=1,\ x\in\partial G_\varepsilon^j;\\ w_\varepsilon^j=0,\ x\in\partial T^j_{\varepsilon/4}.\end{gathered} \qquad (35)$$

Положим

$$W_\varepsilon(x)=\begin{cases}w_\varepsilon^j(x), & x\in T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G_\varepsilon^j},\ j\in\Upsilon_\varepsilon,\\ 1, & x\in G_\varepsilon^j, j\in\Upsilon_\varepsilon,\\ 0, & x\in\Omega\setminus\overline{\cup_{j\in\Upsilon_\varepsilon}T^j_{\varepsilon/4}}.\end{cases}$$

Имеем $W_\varepsilon\in H_0^1(\Omega)$ и $W_\varepsilon\rightharpoonup 0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ при $\varepsilon\to 0$.

Введём функцию

$$w_\varepsilon(\psi\eta)=$$

$$=\begin{cases}w_\varepsilon^j(x)H_{\varepsilon,j}(t), & x\in T^j_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G_\varepsilon^j}, j\in\Upsilon_\varepsilon, t\in[0,T],\\ 0, & x\in\Omega\setminus\overline{\cup_{j\in\Upsilon_\varepsilon}T^j_{\varepsilon/4}}, t\in[0,T],\end{cases} \qquad (36)$$

где $H_{\varepsilon,j}(t)$ задано формулой (34).

Легко видеть, что $w_\varepsilon(\psi\eta)\in H^1(Q_\varepsilon^T)$. Обозначим через $\widetilde{w_\varepsilon(\psi\eta)}$ — H^1-продолжение на Q^T функции $w_\varepsilon(\psi\eta)$, удовлетворяющее неравенствам (25), (26). Учитывая свойства функции W_ε, получим при $\varepsilon\to 0$

$$\widetilde{w_\varepsilon(\psi\eta)}\rightharpoonup 0 \text{ слабо в } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \qquad (37)$$

$$\widetilde{w_\varepsilon(\psi\eta)}\to 0,\ \partial_t\widetilde{w_\varepsilon(\psi\eta)}\to 0 \text{ сильно в } L^2(Q^T). \qquad (38)$$

Возьмём в неравенстве (32) в качестве тестовой функцию $\phi(x,t)=\psi(x)\eta(t)-w_\varepsilon(\psi\eta)$, где $\psi\in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta\in C^1[0,T]$. Получим

$$\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}(\psi(x)\eta'(t)-\partial_t w_\varepsilon(\psi\eta))(\psi(x)\eta(t)-w_\varepsilon(\psi\eta)-u_\varepsilon)dxdt+$$

$$+\varepsilon^{-\gamma}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial G_\varepsilon^j}(\psi(x)\eta'(t)-H'_{\varepsilon,j}(t))(\psi(x)\eta(t)-$$

$$-H_{\varepsilon,j}(t)-u_\varepsilon)dsdt+$$

$$+\varepsilon^{-\gamma}\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon}\int_0^T\int_{\partial G_\varepsilon^j}a(x)(\psi(x)\eta(t)-H_{\varepsilon,j}(t))(\psi(x)\eta(t)-$$

$$-H_{\varepsilon,j}(t)-u_\varepsilon)dsdt+$$

$$+\int_0^T\int_{\Omega_\varepsilon}(\eta\nabla\psi(x)-\nabla w_\varepsilon(\psi\eta))(\eta(t)\nabla\psi(x)-$$

$$-\nabla w_\varepsilon(\psi\eta)-\nabla u_\varepsilon)dxdt\ge$$

$$\geq \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f(x,t)(\psi(x)\eta(t) - w_\varepsilon(\psi\eta))dxdt +$$

$$+\varepsilon^{-\gamma} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} g(x)(\psi(x)\eta(t) - H_{\varepsilon,j}(t) - u_\varepsilon)dsdt -$$

$$-\frac{1}{2} \| \psi(x)\eta(0) - w_\varepsilon(\psi\eta)|_{t=0}\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)} -$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{-\gamma} \| \psi(x)\eta(0) - w_\varepsilon(\psi\eta)|_{t=0}\|^2_{L^2(S_\varepsilon)}. \qquad (39)$$

В силу (37), (38), имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{Q_\varepsilon^T} (\psi(x)\eta'(t) - \partial_t w_\varepsilon(\psi\eta))(\psi\eta - w_\varepsilon(\psi\eta) - u_\varepsilon)dxdt =$$

$$= \int_{Q^T} \psi(x)\eta'(t)(\psi(x)\eta(t) - u)dxdt, \qquad (40)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla(\psi(x)\eta(t))(\nabla(\psi(x)\eta(t)) - \nabla w_\varepsilon(\psi\eta) - \nabla u_\varepsilon)dxdt =$$

$$= \int_{Q^T} \nabla(\psi(x)\eta(t))\nabla(\psi(x)\eta(t) - u)dxdt. \qquad (41)$$

Рассмотрим выражение

$$-\int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla w_\varepsilon(\psi\eta)(\nabla(\psi(x)\eta(t)) - \nabla w_\varepsilon(\psi\eta) - \nabla u_\varepsilon)dxdt =$$

$$= -\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{T^T_{\varepsilon/4}\setminus\overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_\varepsilon^j \nabla(H_{\varepsilon,j}(t)(\psi(x)\eta(t) -$$

$$- w_\varepsilon^j(x) H_{\varepsilon,j}(t) - u_\varepsilon))dxdt =$$

$$= -\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T^T_{\varepsilon/4}} \partial_\nu w_\varepsilon^j H_{\varepsilon,j}(t)(\psi(x)\eta(t) - u_\varepsilon)dsdt -$$

$$-\sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_\nu w_\varepsilon^j H_{\varepsilon,j}(t)(\psi(x)\eta(t) - H_{\varepsilon,j}(t) - u_\varepsilon)dsdt. \ (42)$$

Легко видеть, что

$$w_\varepsilon^j(x) = \frac{r^{2-n} - \left(\dfrac{\varepsilon}{4}\right)^{2-n}}{a_\varepsilon^{2-n} - \left(\dfrac{\varepsilon}{4}\right)^{2-n}}, \qquad (43)$$

$$\partial_\nu w_\varepsilon^j|_{\partial T^j_{\varepsilon/4}} = \frac{(2-n)C_0^{n-2}\cdot 4^{n-1}}{1-\alpha_\varepsilon};$$
$$\partial_\nu w_\varepsilon^j|_{\partial G_\varepsilon^j} = \frac{(n-2)C_0^{-1}\varepsilon^{-\gamma}}{1-\alpha_\varepsilon}, \qquad (44)$$

где $\alpha_\varepsilon \to 0$, если $\varepsilon \to 0$.

Рассмотрим интегралы по $S_\varepsilon \times (0,T)$, $S_\varepsilon \times \{t=0\}$, содержащиеся в неравенстве (39). Имеем

$$\varepsilon^{-\gamma} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} (\psi(x)\eta'(t) - H'_{\varepsilon,j}(t))(\psi(x)\eta(t) -$$
$$- H_{\varepsilon,j}(t) - u_\varepsilon)dsdt +$$

$$+\varepsilon^{-\gamma} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} a(x)(\psi(x)\eta(t) - H_{\varepsilon,j}(t))(\psi(x)\eta(t) -$$
$$-H_{\varepsilon,j}(t) - u_\varepsilon)dsdt -$$

$$-\frac{(n-2)\varepsilon^{-\gamma}}{C_0(1-\alpha_\varepsilon)} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} H_{\varepsilon,j}(t)(\psi(x)\eta(t) - H_{\varepsilon,j}(t) - u_\varepsilon)dsdt -$$

$$-\varepsilon^{-\gamma} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} g(x)(\psi(x)\eta(t) - H_{\varepsilon,j}(t) - u_\varepsilon)dsdt -$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon^{-\gamma} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int_{\partial G_\varepsilon^j} (\psi(x)\eta(0) - H_{\varepsilon,j}(0))^2 ds =$$

$$= \varepsilon^{-\gamma} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \{\psi(P_\varepsilon^j)\eta'(t) - H'_{\varepsilon,j}(t) + a(P_\varepsilon^j)\psi(P_\varepsilon^j)\eta(t) -$$

$$-\left(a(P_\varepsilon^j) + \frac{n-2}{C_0}\right) H_{\varepsilon,j}(t) - g(P_\varepsilon^j)\} \times (\psi(x)\eta(t) -$$
$$-H_{\varepsilon,j}(t) - u_\varepsilon)dsdt + \beta_\varepsilon, \qquad (45)$$

где $\beta_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Учитывая, что $H_{\varepsilon,j}(t)$ — решение задачи Коши (33), получим, что при $\varepsilon \to 0$ сумма всех интегралов по границе $S_\varepsilon \times (0,T)$ и по границе $S_\varepsilon \times \{t=0\}$, входящих в (39), стремится к нулю.

Из (39)–(45) вытекает, что u удовлетворяет интегральному неравенству

$$\int_{Q^T} \psi(x)\eta'(t)(\psi(x)\eta(t) - u)dxdt +$$
$$+ \int_{Q^T} \nabla(\psi(x)\eta(t))\nabla(\psi(x)\eta(t) - u)dxdt -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}} \partial_\nu w_\varepsilon^j H_{\varepsilon,j}(t)(\psi(x)\eta(t) - u_\varepsilon)dsdt \geq$$

$$\geq \int_{Q^T} f(\psi(x)\eta(t) - u)dxdt - \frac{1}{2}\|\psi(x)\eta(0)\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (46)$$

Применяя лемму 5 из [11], получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} 4^{n-1} \sum_{j\in\Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T^j_{\varepsilon/4}} H_{\varepsilon,j}(t)(\psi(x)\eta(t)-u_\varepsilon)dsdt =$$

$$=\omega_n \int_0^T \int_{S_0} H_{\psi\eta}(0,\hat{x},t)(\psi(x)\eta(t)-u)d\hat{x}dt, \qquad (47)$$

где $\hat{x}=(x_2,\dots,x_n)$, ω_n — площадь поверхности единичной сферы в $\mathbb{R}^n$,

$$H_{\psi\eta}(x,t)=\psi(x)\eta(t)-\frac{n-2}{C_0}\int_0^t \psi(x)\eta(s)e^{\left(a(x)+\frac{n-2}{C_0}\right)(s-t)}ds -$$

$$-\frac{g(x)}{a(x)+\frac{n-2}{C_0}}\left(1-e^{\left(a(x)+\frac{n-2}{C_0}\right)t}\right). \qquad (48)$$

Таким образом, u удовлетворяет интегральному неравенству

$$\int_{Q^T} \psi(x)\eta'(t)(\psi(x)\eta(t)-u)dxdt +$$

$$+\int_{Q^T} \nabla_x(\psi(x)\eta(t))\nabla(\psi(x)\eta(t)-u)dxdt +$$

$$+(n-2)C_0^{n-2}\omega_n \int_0^T \int_{S_0} H_{\psi\eta}(0,\hat{x},t)(\psi(x)\eta(t)-u)d\hat{x}dt \geq$$

$$\geq \int_{Q^T} f(\psi(x)\eta(t)-u)dxdt - \frac{1}{2}\|\psi(x)\eta(0)\|^2_{L^2(\Omega)}. \qquad (49)$$

Принимая во внимание, что линейная оболочка функций $\{\psi(x)\eta(t)\colon \psi\in C_0^\infty(\Omega), \eta\in C^1[0,T]\}$ всюду плотна в пространстве $\mathcal{M} = \left\{u\in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\ \partial_t u\in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))\right\}$, выводим, что неравенство (49) выполняется для произвольной функции $\varphi(x,t)\in\mathcal{M}$. Полагая $\varphi=u\pm\tau v$, где $v=\psi(x)\eta(t)$, $\psi\in H_0^1(\Omega)$, $\eta\in C^1[0,T]$ и переходя к пределу при $\tau\to+0$, получим для u интегральное тождество

$$\int_0^T\int_\Omega \partial_t uvdxdt + \int_{Q^T} \nabla u\nabla vdxdt +$$

$$+(n-2)C_0^{n-2}\omega_n \int_0^T \int_{S_0} H_u(0,\hat{x},t)vd\hat{x}dt = \int_{Q^T} fvdxdt, \qquad (50)$$

где

$$H_u(x,t)=u(x,t)-\frac{n-2}{C_0}\int_0^t u(x,s)e^{-\left(a(x)+\frac{n-2}{C_0}\right)(t-s)}ds -$$

$$-\frac{g(x)}{a(x)+\frac{n-2}{C_0}}\left(1-e^{-\left(a(x)+\frac{n-2}{C_0}\right)t}\right).$$

Итак, u — обобщённое решение задачи (30).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Timofte C.* //Math. Modelling and Anal. 2003. V. 8. № 4. P. 337–350.
2. *Angulano M.* // arXiv:1712.01183v1[math.AP]4. Dec 2017.
3. *Jager W., Neuss-Radu M., Shaposhnikova T.A.* // J. Math. Sci. 2011. V. 179. Iss. 3. P. 446–459.
4. *Zubova M.N., Shaposhnikova T.A.* // Different. Equats. 2011. V. 47. P. 78–90.
5. *Diaz J.I., Gomez-Castro D., Podol'skii A.V., Shaposhnikova T.A.* // Adv. Nonlin. Anal. 2017. DOI:10.1515/anona-2017–0140.
6. *Diaz J.I., Gomez-Castro D., Shaposhnikova T.A., Zubova M.N.* // Electron. J. Differen. Equat. 2017. V. 178. P. 1–25.
7. *Diaz J.I., Gomez-Castro D., Podol'skii A.V., Shaposhnikova T.A.* // Adv. in Nonlin. Anal. 2018. DOI:10.1515/anona-2018–0158.
8. *Shaposhnikova T.A., Zubova M.N.* // J. Math. Sci. 2018. V. 232. № 4. P. 573–591.
9. *Gomez D., Lobo M., Perez M.E., Shaposhnikova T.A., Zubova M.N.* // Math. Methods Appl. Sci. 2014. DOI:10.1002/mma32.46.
10. *Lions J.-L., Magenes E.* Problemes aux Limites Nonhomogenes et Applications. P.: Dunod. V. 1. 1968.
11. *Lobo M., Oleinik O.A., Perez M.E., Shaposhnikova T.A.*// Ann. Scuola Norm. Super. Pisa Cl. Sci. Ser. 4. 1997. V. 25. P. 611–629.

HOMOGENIZATION LIMIT FOR THE DIFFUSION EQUATION IN A DOMAIN PERFORATED ALONG (n – 1)-DIMENSIONAL MANIFOLD WITH DYNAMIC CONDITIONS ON THE BOUNDARY OF THE PERFORATIONS: CRITICAL CASE

M. N. Zubova, T. A. Shaposhnikova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

Presented by Academician of the RAS V.V. Kozlov January 24, 2019

Received January 29, 2019

The problem of homogenization the diffusion equation in a domain perforated along an (n – 1)-dimensional manifold with dynamic boundary conditions on the boundary of the perforations is studied. A homogenization model is constructed that is a transmission problem for the diffusion equation with the transmission conditions containing a term with memory. A theorem on the convergence of solutions of the original problem to the solution of the homogenized one is proved.

Keywords: homogenization, diffusion equation, dynamic boundary conditions, perforated domain.