УДК 517.9

ОПЕРАТОРНЫЕ КОСИНУС-ФУНКЦИИ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

В. А. Костин*, Д. В. Костин, А. В. Костин

Представлено академиком РАН В.П. Масловым 19.12.2018 г.

Поступило 06.02.2019 г.

В сообщении впервые применяется теория сильно непрерывных операторных косинус-функций (КОФ) к исследованию корректной разрешимости краевых задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве (эллиптический случай). Обычно в терминах КОФ формулируется корректная разрешимость задачи Коши (гиперболический случай). В сообщении указываются условия на порядок роста КОФ, при которых краевая задача Дирихле корректна на конечном интервале. Приводится интегральное представление решения и его точная оценка.

Ключевые слова: сильно непрерывные косинус-функции и полугруппы преобразований, краевые задачи, корректная разрешимость.

DOI: <https://doi.org/10.31857/S0869-56524865531-536>

Как известно, косинус-функции, начиная с работ М. Совы и С. Курепы [10, 12], являются важным инструментом при исследовании корректной разрешимости задачи Коши

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}^+ = [0, \infty), \quad (1)$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad (2)$$

где A — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E , с областью определения $D(A)$ плотной в E .

Решением уравнения (1) при $t \in [0, T]$ называется функция $u(t) \in D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемая при $t \in [0, T]$ и удовлетворяющая уравнению (1).

Задача Коши (1)–(2) называется корректной типа ω на $\mathbb{R}^+$ или $\mathbb{R}$, где $\omega \in \mathbb{R}$, если выполняются следующие условия:

а) существует плотное подмножество $D \subset D(A)$ такое, что для любых $u_0, u_1 \in D$ найдётся единственное решение $u(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2);

б) для каждого решения, такого как в а),

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \|u(t)\| \leq \omega; \quad (3)$$

в) если $\{u_n(t)\}$ — последовательность решений задачи (1)–(2) при $u_0 = u_1 = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t) = 0$ и сходимость равномерная по t на ограниченных подмножествах $\mathbb{R}^+$ (или $\mathbb{R}$). М. Сове принадлежит следующий результат.

Теорема корректности (см. [2, с. 176]). *Задача Коши (1)–(2) корректна тогда и только тогда, когда A порождает сильно непрерывную операторную косинус-функцию $C(t)$ со свойствами:*

$$1) C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s), \quad t, s \in \mathbb{R},$$

$$2) C(0) = I,$$

$$3) \lim_{t \rightarrow 0} \|C(t)\varphi - \varphi\| = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in E.$$

В этом случае

$$\left. \frac{d^2 C(t)}{dt^2} \right|_{t=0} \varphi = A\varphi, \quad \varphi \in D(A), \quad (4)$$

и решение имеет вид

$$u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1, \quad (5)$$

где

$$S(t)u_1 = \int_0^t C(s)u_1 ds \quad (6)$$

есть ассоциированный с $C(t)$ синус.

Существуют константы M и $\omega \geq 0$, при которых имеет место оценка

$$\|C(t, A)\| \leq M \exp(\omega |t|). \quad (7)$$

Для всех $\lambda > \omega \geq 0$, $f \in E$ выполняется соотношение, связывающее резольвенту $R(\lambda, A)$ оператора A и $C(t, A)$ [3, с. 177]

$$\lambda \left((\lambda^2 I - A)^{-1} \right) f = \lambda (\lambda^2, A) f = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) C(t, A) f dt. \quad (8)$$

Понятие косинус-функции также применяется и при установлении корректной разрешимости задачи Коши для уравнения первого порядка

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t \in [0, T] \subset \mathbb{R}^+, \quad (9)$$

$$u(0) = u_0 \in D(A), \quad (10)$$

когда отыскивается сильно дифференцируемая на $[0, T]$ функция $u(t)$ со значениями в $D(A)$, удовлетворяющая уравнению (9) и условию (10).

Задача (9)–(10) называется равномерно корректной, если она однозначно разрешима и из $u_n \rightarrow 0$ следует, что $u_n(t) \rightarrow 0$ равномерно по t на каждом промежутке $[0, T]$.

Изучению этой задачи посвящена теория сильно непрерывных полугрупп преобразований (см. [1–3, 6–12]).

В то же время оказывается, что если оператор A является производящим оператором сильно непрерывной косинус-функции $C(t, A)$, то задача (9)–(10) равномерно корректна и её решение имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4t}} C(\xi, A) u_0 d\xi. \quad (11)$$

Применение косинус-функции к граничным задачам впервые рассматривается в настоящем сообщении.

1. ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ И КОСИНУС-ФУНКЦИЯ

Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) = 0, \quad t \in [0, l] \subset \mathbb{R}^+, \quad (12)$$

A — замкнутый линейный оператор, с плотной в E областью определения $D(A)$.

Ставится задача отыскания функции $u(t)$ со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемой, удовлетворяющей уравнению (12) на отрезке $[0, l]$ и условиям

$$u(0) = \varphi, \quad u(l) = \psi, \quad \varphi, \psi \in D(A). \quad (13)$$

Определение 1. Задача (12)–(13) называется корректной, если она однозначно разрешима для любых $\varphi, \psi \in D(A)$ и существует константа $M > 0$ такая, что для всех решений уравнения (12) справедливо неравенство

$$\sup_{t \in [0, l]} \|u(t)\|_E \leq M (\|\varphi\|_E + \|\psi\|_E). \quad (14)$$

Исследованием корректной разрешимости задачи (12)–(13) занимались многие авторы [3, 6–8]. Заметим, что в этих работах уравнение (12) записывается в виде (1). При такой записи результаты удобно формулировать в терминах позитивности оператора A . В нашем случае используется понятие косинус-функции, поэтому форма записи (12) здесь более удобна.

Что же касается существа вопроса, то фундаментальные результаты по корректной разрешимости граничных задач приводятся в [6, с. 305], из которых следует, что если в (12) оператор $-A$ позитивный, т.е. если его резольвентное множество $\rho(A) \subset [0, \infty)$ и для резольвенты $R(\lambda, -A)$ выполняется оценка

$$\|R(\lambda, -A)\| \leq \frac{M}{1 + \lambda}, \quad (15)$$

$\lambda > 0$, то задача (12)–(13) корректна.

В [3] для задачи Дирихле вводится понятие корректности с ограниченным отклонением по Адамару (см. [5, с. 366]), которое связано с учётом длины отрезка $[0, l]$ в соответствии со следующим определением.

Определение 2 [3]. Задача (12)–(13) называется корректной для функции с ограниченным отклонением по Адамару (a -корректной), если она однозначно разрешима для всех $u_1, u_2 \in D(A)$, для некоторого $C > 0$ для всех решений $u(t)$ выполняется оценка

$$\left\| \int_0^l \sin \frac{n\pi t}{l} u(t) dt \right\| \leq Cn (\|u(0)\| + \|u(l)\|). \quad (16)$$

Из результатов, приведённых в [3], следует, что задача (12)–(13) a -корректно разрешима тогда

и только тогда, когда резольвентное множество $\rho(A)$ содержит точки $\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$ и выполняется оценка

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \left(\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \cdot \left(\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 - A \right)^{-1} \right) \right\| < \infty. \quad (17)$$

Для решения такой задачи справедливо представление

$$u(t) = F(t-l, l, A)\varphi + F(t, l, A)\psi, \quad (18)$$

где

$$F(t, l, A)\varphi = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi t}{l} \cdot l \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} - A \right)^{-1} \varphi. \quad (19)$$

Заметим, что по терминологии, используемой в [3] условие (17) определяет α -позитивность оператора $-A$, который допускает принадлежность отрицательных точек в резольвентном множестве $\rho(A)$.

Нашим результатом является следующая

Теорема 1. *Если оператор A является генератором сильно непрерывной косинус-функции $C(t, A)$ с порядком роста, удовлетворяющего условию*

$$0 \leq \omega < \frac{\pi}{l}, \quad (20)$$

то задача (12)–(13) α -корректна и её решение имеет вид

$$u(t) = \frac{1}{l} \sin \frac{\pi t}{l} \times \left[\int_0^{\infty} \frac{C(y, A)\varphi dy}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi y}{l}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{l}\right)} + \int_0^{\infty} \frac{C(y, A)\psi dy}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi y}{l}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{l}\right)} \right]. \quad (21)$$

Доказательство. Поскольку A является генератором косинус-функции, то из (7) и (8) при $n \in \mathbb{N}$ следуют неравенства

$$\begin{aligned} n^2 \left\| \left(\frac{\pi n^2}{l^2} - A \right)^{-1} \varphi \right\| &\leq Mn \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l} - \omega\right)t} dt \|\varphi\| = \\ &= \frac{Mn \|\varphi\|}{\frac{n\pi}{l} - \omega} \leq \frac{M \|\varphi\|}{\frac{\pi}{l} - \omega}. \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, (12) обеспечивает оценку (17) и α -корректность задачи (12)–(13). И справедливо представление (18) для её решения.

Далее, пользуясь (6) в (18), получаем соотношения

$$\begin{aligned} F(t, l, A)\varphi &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi t}{l} \cdot n \left(\frac{n^2 \pi^2}{l^2} - A \right)^{-1} \varphi = \\ &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi t}{l} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{n\pi}{l} y\right) C(y, A)\varphi dy = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n\pi}{l} y\right) \sin \frac{n\pi t}{l} \right) C(y, A)\varphi dy. \end{aligned}$$

Отсюда после суммирования под знаком интеграла получим равенство

$$F(t, l, A)\varphi = \frac{1}{l} \sin \frac{\pi t}{l} \int_0^{\infty} \frac{C(y, A)\varphi dy}{\operatorname{ch}\left(\frac{\pi y}{l}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{l}\right)}. \quad (23)$$

Из (23) и (18) следует представление (21).

2. ТОЧНАЯ ОЦЕНКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

Представление (13) позволяет установить точную оценку решения задачи (12)–(13) через её граничные значения и, как следствие, показать её равномерную корректность.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Если в задаче (12)–(13) оператор A является генератором косинус-функции $C(t, A)$ с порядком роста ω , удовлетворяющим условию (20), то эта задача корректно разрешима и выполняется оценка*

$$\|F(t, l, A)\psi\|_E \leq \frac{M \sin \omega t}{\sin \omega l} \|\psi\|_E. \quad (24)$$

Для доказательства воспользуемся известным равенством (см. [4, с. 199])

$$\int_0^{\infty} \frac{\tau^p d\tau}{\tau^2 + 2\tau \cos \xi + 1} = \frac{\pi \sin p\xi}{\sin \xi \sin p\pi}, \quad 0 < p < 1, \quad 0 < \xi < \pi \quad (25)$$

и при $\alpha = \frac{\pi}{l}$ и $\xi = \alpha t$ проведём вычисления

$$J_+ = \int_0^\infty \frac{\exp(\omega y) dy}{\operatorname{ch} \alpha y + \cos \alpha \xi} = \frac{2}{\alpha} \int_1^\infty \frac{\tau^{\frac{\omega}{\alpha}} d\tau}{\tau^2 + 2\tau \cos \alpha \xi + 1}. \quad (26)$$

Под знаком интеграла сделана замена $e^{\alpha y} = \tau$.

Аналогично

$$J_- = \int_0^\infty \frac{\exp(-\omega y) dy}{\operatorname{ch} \alpha y + \cos \alpha \xi} = \frac{2}{\alpha} \int_0^1 \frac{\tau^{\frac{\omega}{\alpha}} d\tau}{\tau^2 + 2\tau \cos \alpha \xi + 1}. \quad (27)$$

Из (26) и (27) следует равенство

$$\int_0^\infty \frac{\exp(-\omega y) dy}{\operatorname{ch} \alpha y + \cos \alpha \xi} = \begin{cases} \frac{l \sin \omega t}{\sin \omega l \cdot \sin \frac{\pi t}{l}}, & \omega \neq 0, \\ \frac{t}{\sin \pi t l}, & \omega = 0, \end{cases} \quad (28)$$

справедливое для $0 < \omega l < \pi$.

Из (28) и (23) следует (24). И, таким образом, если выполняется оценка (7), то для решения задачи (12)–(13) справедлива оценка

$$\|u(t)\| \leq \frac{M}{\sin \omega l} [\sin \omega(l-t) \|\varphi\| + \sin \omega t \|\psi\|], \quad (29)$$

если $0 < l < \pi$, и

$$\|u(t)\| \leq \frac{M}{l} [(l-t) \|\varphi\| + t \|\psi\|], \quad (30)$$

если $\omega = 0$.

Замечание 1. Таким образом, если A — генератор косинус-функции $C(t, A)$ с типом $0 \leq \omega t < \frac{\pi}{l}$, то из полученного результата следует, что построена операторная функция

$$F(t, l, A) = \frac{\sin t \sqrt{A}}{\sin l \sqrt{A}}, \quad t \in [0, l], \quad (31)$$

и для неё справедлива оценка

$$\|F(t, l, A)\psi\| \leq M \frac{\sin \omega t}{\sin \omega l} \|\psi\|. \quad (32)$$

Оценка (32) является точной, так как в скалярном случае, когда $A = \omega^2$, $\omega \in \mathbb{R}^+$, $\psi \in \mathbb{R}$,

$$F(t, l, A)\psi = F(t, l\omega)\psi = \frac{\sin \omega t}{\sin \omega l} \psi$$

и, следовательно, в (32) достигается равенство.

3. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ КОСИНУС-ФУНКЦИИ И ИХ СВЯЗКА

Важным классом операторных косинус-функций являются экспоненциальные косинус-функции [1], которые представимы в виде

$$C(t) = \frac{1}{2} [\exp(tA) + \exp(-tA)], \quad t \in \mathbb{R}, \quad (33)$$

где $\exp(tA)$ — однопараметрическая группа линейных преобразований с генератором A . Известно ([1, 2]), что косинус-функцией является экспоненциальной, если операторы A и $-A$ являются генераторами сильно непрерывных полугрупп в E . В этом случае производящим оператором косинус-функции $C(t)$ является оператор A^2 и $C(t) = C(t, A^2)$.

В [7] введено понятие связки экспоненциальных косинус-функций $C_1(t, A_1^2)$ и $C_2(t, A_2^2)$:

если $C_1(t, A_1^2)$ и $C_2(t, A_2^2)$ — экспоненциальные косинус-функции в E , коммутирующие между собой, то конструкцию

$$\begin{aligned} C_1(t, A_1^2) * C_2(t, A_2^2) &= \\ &= \frac{1}{2} [\exp(t, A_1) \exp(t, A_2) + \exp(-t, A_1) \exp(-t, A_2)] \end{aligned}$$

мы называем связкой косинус-функций $C_1(t, A_1^2)$ и $C_2(t, A_2^2)$.

Непосредственной проверкой доказываем, что связка косинус-функций $C_1(t, A_1^2)$ и $C_2(t, A_2^2)$ является косинус-функция с генератором $(A_1 + A_2)^2$:

$$C_1(t, A_1^2) * C_2(t, A_2^2) = C_3[t, (A_1 + A_2)^2], \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \|C_1 * C_2\| &\leq \frac{1}{2} [e^{(\omega_1 + \omega_2)t} + e^{-(\omega_1 + \omega_2)t}] \leq \\ &\leq e^{(\omega_1 + \omega_2)t}. \end{aligned} \quad (35)$$

Очевидно, что формулы (34) и (35) легко определяются на случай произвольного числа операторов A_i :

$$C_1(t, A_1^2) * C_2(t, A_2^2) * C_n(t, A_n^2) = \\ = C\left(t, \left(\sum_{i=1}^n A_i\right)^2\right) \cdot \prod_{i=1}^n C_i = 1^n C_i(t, A_i^2) = C\left(t, \left(\sum_{i=1}^n A_i\right)^2\right).$$

Пример. Пусть $E = L_{p,\gamma}(-\infty, \infty)$ с нормой $\|f\| = \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma x} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$ и оператор A задаётся

дифференциальным выражением $\mathbb{D}f = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$,

$D(A) = \{f \in L_{p,\gamma}\}$. В этом случае по формуле Даламбера

$$C(t, A)f = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)],$$

$$\|C(t)f\|_{p,\gamma} = \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma x} |f(x+t) + f(x-t)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma x} |f(x+t)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\gamma x} |f(x-t)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \\ = \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{\gamma t}{p}} \|f\|_{L_{p,\gamma}}^p + e^{\frac{\gamma t}{p}} \|f\|_{L_{p,\gamma}}^p \right]^{\frac{1}{p}} = e^{\frac{\gamma t}{p}} \|f\|_{L_{p,\gamma}}.$$

Таким образом, косинус-функция имеет тип $\omega = \frac{1}{p}$ и, следовательно, при $0 \leq \frac{\gamma}{p} < \frac{\pi}{l}$ задача Дирихле

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u(x, l) = \psi(x)$$

для $\varphi, \psi \in L_{p,\gamma}$ равномерно корректна, её решение имеет вид

$$u(x, t) = \sin \frac{\pi t}{l} \left[\int_0^{\infty} \frac{(\varphi(x+\xi) + \varphi(x-\xi)) d\xi}{\operatorname{ch} \frac{\pi \xi}{l} - \cos \frac{\pi t}{l}} + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{(\psi(x+\xi) + \psi(x-\xi)) d\xi}{\operatorname{ch} \frac{\pi \xi}{l} + \cos \frac{\pi t}{l}} \right]$$

и справедлива оценка

$$\|u(t)\| \leq \frac{\sin \frac{t}{p}}{\sin \frac{l}{p}} \|\varphi\| + \frac{\sin \frac{(l-t)}{p}}{\sin \frac{l}{p}} \|\psi\| = \\ = \frac{1}{\sin \frac{l}{p}} \left[\sin \frac{l}{p} \|\psi\| + \sin \frac{(l-t)}{p} \|\varphi\| \right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев В.В. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения. Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1990. С. 87–202.
2. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. Киев: Выща школа, 1989. 347 с.
3. Горбачук В.И., Князюк А.И. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений // УМН. 1989. Т. 44. № 3 (267). С. 55–91.
4. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., 1978. 228 с.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. I. М.: Мир, 1965. 616 с.
6. Костин В.А., Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка // ДАН. 2009. Т. 428. № 1. С. 20–22.
7. Костин В.А. Сильно непрерывная косинус-функция и корректность краевой задачи Дирихле. Междунар. конф., посвященная 100-летию со дня рождения С.Г. Крейна (13–19 ноября 2017 г.): Сб. материалов. Воронеж. гос. ун-т / Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова / Мат. ин-т им. В.А. Стеклова РАН. Воронеж: Издат. дом ВГУ, 2017. С. 126–128.
8. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.
9. Маслов В.П. Операторные методы. М.: Наука, 1973. 544 с.
10. Kurepa S. Semigroups and Cosine Functions // Lect. Notes in Math. 1982. V. 948. P. 47–72.
11. Sova M. Cosine Operator Functions // Rozpr. mat. 1966. V. 49. P. 1–47.
12. Sova M. Concerning the Characterization of Generators of Distribution Semigroups // Cas. pestov. mat. 1980. V. 105. № 4. P. 329–34.

OPERATOR COSINE-FUNCTIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS**V. A. Kostin, A. V. Kostin, D. V. Kostin***Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

Presented by Academician of the RAS V.P. Maslov December 19, 2018

Received February 6, 2019

For the first time, the theory of strongly continuous operator cosines of functions (COF) is applied to the study of the correct solvability of boundary value problems for second-order linear differential equations in Banach space (elliptic case). Usually in COF terms the correct solvability of the Cauchy problem (hyperbolic case) is formulated. The note specifies the conditions on the order of COF growth under which the Dirichlet boundary value problem is correct on the finite interval. The integral representation of the solution and its exact estimation are given.

Keywords: strongly continuous cosine functions and transformation semigroups, boundary value problems, correct solvability.